

### Απόλυτη τιμή αθροίσματος $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

#### Συμπληρωματικό Υλικό 1.5.3

##### Απόδειξη

1. Διακρίνουμε τις τρεις (δυνατές) περιπτώσεις: (α)  $\alpha, \beta$  ομόσημοι, (β)  $\alpha, \beta$  ετερόσημοι (γ)  $\alpha=0$  ή  $\beta=0$ .

**(α)** Αν  $\alpha > 0$  και  $\beta > 0$ , τότε  $\alpha + \beta > 0$ , οπότε,  $|\alpha|=\alpha$ ,  $|\beta|=\beta$  και  $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta$ . Άρα,  $|\alpha| + |\beta|=\alpha + \beta$ , οπότε  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ .

Αν  $\alpha < 0$  και  $\beta < 0$ , τότε  $\alpha + \beta < 0$ , οπότε,  $|\alpha|=-\alpha$ ,  $|\beta|=-\beta$  και  $|\alpha + \beta|=-(\alpha + \beta)$ . Άρα,  $|\alpha| + |\beta|=(-\alpha) + (-\beta)=-(\alpha + \beta)$ , οπότε, πάλι έχουμε ισότητα, δηλαδή,  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ .

**(β)** Έστω τώρα ότι  $\alpha < 0$  και  $\beta > 0$ . Τότε,  $d(\alpha, \beta) = d(\alpha, 0) + d(\beta, 0)$  (η ισότητα αυτή είναι προφανής, αν χρησιμοποιήσετε την πραγματική ευθεία.). Η ισότητα αυτή με τη χρήση της έννοιας της απόλυτης τιμής γράφεται  $|\beta - \alpha| = |\alpha| + |\beta|$ .

Αν  $d(\alpha, 0) < d(\beta, 0)$  τότε  $d(-\alpha, \beta) < d(\beta, 0)$ , οπότε:

$$|\alpha + \beta| = |\beta - (-\alpha)| = d(-\alpha, \beta) < d(\beta, 0) < d(\beta, 0) + d(\alpha, 0) = |\beta| + |\alpha|, \text{ δηλαδή,}$$

$$|\alpha + \beta| < |\beta| + |\alpha|.$$

Όμοια και αν  $d(\alpha, 0) > d(\beta, 0)$

**(γ)** Αν  $\alpha = 0$ , τότε  $|\alpha + \beta| = |0 + \beta| = |\beta|$  και  $|\alpha| + |\beta| = |0| + |\beta| = |\beta|$ , οπότε έχουμε ισότητα, δηλαδή,  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ . (Όμοια αν  $\beta=0$ ).

Από τις παραπάνω ισοδυναμίες φαίνεται ότι η ισότητα  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$  ισχύει αν και μόνο αν  $\alpha\beta = |\alpha||\beta|$ , δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

Τίτλος: «**Απόλυτη τιμή αθροίσματος  $|α + β| ≤ |α| + |β|$** »

Έκδοση: **1.5**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**



*Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (ΜΙΣ) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.*



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων  
και Αθλητισμού



ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ  
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση  
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα  
Ανθρώπινο Δυναμικό και  
Κοινωνική Συνοχή