Διδακτική διαχείριση και μαθηματική δραστηριότητα από τους μαθητές/τριες

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Απαραίτητα στοιχεία για μια επιτυχημένη διδακτική διαχείριση του νέου προγράμματος σπουδών (ΠΣ) είναι, η γνώση από τον/την εκπαιδευτικό των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων (ΠΜΑ) κάθε μαθηματικής ενότητας καθώς και ο κατάλληλος σχεδιασμός της διδασκαλίας σύμφωνα με τις θεωρητικές παραδοχές του νέου ΠΣ.

Τα ΠΜΑ του ΠΣ στο βιβλίο αυτό αναγράφονται στο εισαγωγικό μέρος κάθε ενότητας. Στη συνέχεια παραθέτουμε συνοπτικά τα παρακάτω:

1. **Κυρίαρχα διδακτικά μοντέλα.**
2. **Θεωρητικές παραδοχές του νέου ΠΣ και οι συνέπειές του στη διδακτική διαχείριση καθώς και στη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών.**
3. **Διδακτική διαχείριση και μαθηματική δραστηριότητα μαθητών/τριών.**
4. **Ενδεικτικές πηγές δυσκολιών των μαθητών.**
5. **Ενδεικτικά παραδείγματα.**
6. **Αξιοποίηση της τεχνολογίας στη διδακτική διαχείριση.**

1. Τα κυρίαρχα διδακτικά μοντέλα

Τις τελευταίες δεκαετίες στην εκπαίδευση κυριαρχούν τα ακόλουθα διδακτικά μοντέλα:

Α. Το **"παραδοσιακό"** διδακτικό μοντέλο με εμφανείς τις επιδράσεις των συμπεριφοριστικών θεωριών μάθησης οι οποίες εστιάζουν στην παρατηρήσιμη συμπεριφορά των μαθητών/τριών και θεωρούν ότι η μάθηση επιτυγχάνεται με την σύνδεση ερεθισμάτων και αντιδράσεων. Στις θεωρίες αυτές η μάθηση ορίζεται «*ως η μόνιμη (μακροπρόθεσμη) αλλαγή της συμπεριφοράς που προκύπτει ως αποτέλεσμα άσκησης ή εμπειρίας*» (Κολιάδης, 1996, σ. 200), ενώ η αλλαγή της συμπεριφοράς πρέπει να μπορεί να παρατηρηθεί και να μετρηθεί. Για τις θεωρίες αυτές, ο εγκέφαλος των μαθητών και των μαθητριών είναι ένα μαύρο κουτί, όπου οι νοητικές διεργασίες που λαμβάνουν χώρα δεν αποτελούν αντικείμενο έρευνας, αφού δεν είναι παρατηρήσιμες (Κόμης, 2004).

Στο **παραδοσιακό** διδακτικό μοντέλο η γνώση θεωρείται ένα σύνολο πληροφοριών, γεγονότων, καταστάσεων, δεξιοτήτων, στάσεων που πρέπει να μεταδοθούν από το δάσκαλο στο μαθητή/τρια χωρίς να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην κριτική σκέψη και τη δημιουργικότητα.

Ως προς το περιεχόμενο η γνώση θεωρείται στατική με αντικειμενικά χαρακτηριστικά οργανωμένη σε μαθήματα και θεματικές ενότητες, χωρίς να δίνεται η δυνατότητα συμμετοχής του/της μαθητή/τριας/τρια στην διαμόρφωσή της.

Τα λάθη θεωρούνται ανεπιθύμητα και ένδειξη ανεπαρκούς κατανόησης. Ως θεραπεία προκρίνεται η ενασχόληση με περισσότερες ασκήσεις και μεγαλύτερη προσπάθεια απομνημόνευσης (Μπαραλός, 2007).

Ο ρόλος των εκπαιδευτικών το πλαίσιο αυτό είναι να μεταδίδουν τη γνώση που κατέχουν στους μαθητές/τριες που δεν την κατέχουν δίνοντας το κατάλληλο ερέθισμα ώστε να επιτύχουν την επιθυμητή συμπεριφορά.

Οι εσωτερικές νοητικές διεργασίες δεν ενδιαφέρουν αφού δεν μπορούν να παρατηρηθούν.

Για παράδειγμα, η απάντηση ενός μαθητή ότι: $(α+β)^2= α^2+β^2$,εκλαμβάνεται ως έλλειψη κατανόησης η οποία «διορθώνεται» με περισσότερες εξηγήσεις και ασκήσεις για εξάσκηση. Η ερμηνεία του λάθους ότι μπορεί να αποτελεί παρανόηση μιας προηγούμενης ιδιότητας όπως της $(αβ)^2= α^2β^2$ δεν είναι βασικό εργαλείο αυτού του μοντέλου.

Το "παραδοσιακό" μοντέλο κυριάρχησε τις προηγούμενες δεκαετίες στο εκπαιδευτικό μας σύστημα. Τα τελευταία χρόνια αν και βρίσκεται σε υποχώρηση, εξακολουθεί να έχει ισχυρή παρουσία στη διδασκαλία.

Ο/η εκπαιδευτικός παραμένει η κύρια πηγή γνώσης και αυθεντίας ενώ ο ρόλος του/της μαθητή/τριας είναι να ακούει και να εφαρμόζει την παρεχόμενη γνώση. Η αξιολόγηση του/της μαθητή/τριας αφορά κυρίως στην ικανότητά του να αναπαράγει τις πληροφορίες που του έχουν δοθεί.

Β. Το **"σύγχρονο"** διδακτικό μοντέλο το οποίο υποστηρίζεται από τις θεωρίες οικοδόμησης της γνώσης οι οποίες υποστηρίζουν ότι η γνώση δεν μεταδίδεται παθητικά από τους εκπαιδευτικούς στους μαθητές/τριες αλλά

αντίθετα αντιμετωπίζεται ως μια δυναμική και εξελισσόμενη διαδικασία η οποία οικοδομείται μέσα από τη συνεργασία τη διερεύνηση και την ενεργή συμμετοχή των μαθητών. Η μάθηση προκύπτει μέσω βιωματικών εμπειριών διερεύνησης προβλημάτων, επίλυσης πραγματικών ζητημάτων καθώς και αλληλεπίδρασης με το κοινωνικό περιβάλλον.

Η μάθηση είναι προϊόν της εννοιολογικής αλλαγής που επέρχεται στους μαθητές/τριες λόγω της γνωστικής σύγκρουσης στην οποία υποβάλλονται όταν οι γνώσεις τους αποδεικνύονται ανεπαρκείς να επιλύσουν ένα πρόβλημα. Τα λάθη αντανακλούν την προσπάθειά τους να επιλύσουν προβλήματα με βάση τις γνώσεις τους μέχρι τη στιγμή της εμπλοκής τους με τις νέες γνωστικές προκλήσεις. Είναι αποκαλυπτικά των αντιλήψεων του/της μαθητή/τριας και αντιμετωπίζονται ως ευκαιρία για μάθηση.

Ο ρόλος του/της εκπαιδευτικού αλλάζει. Δρα ως εμψυχωτής και συντονιστής στην διαδικασία της μάθησης παρέχοντας στους μαθητές/τριες την κατάλληλη καθοδήγηση στην προσπάθειά τους για την οικοδόμηση της νέας γνώσης και όχι ως μεταδότης της γνώσης που κατέχει στους μαθητές/τριες. Η διδασκαλία δεν επικεντρώνεται στην παροχή πληροφοριών στους μαθητές/τριες, αλλά στην παροχή ευκαιριών που θα διευκολύνουν τους μαθητές/τριες να οικοδομήσουν τη δική τους γνώση. Επομένως, στόχος της διδασκαλίας είναι να σχεδιάσει ο/η εκπαιδευτικός τα κατάλληλα περιβάλλοντα.

Βασική λειτουργία του/της εκπαιδευτικού είναι να βοηθά τους μαθητές/τριες να γίνουν ενεργοί συμμετέχοντες στη μάθησή τους και να οικοδομούν ουσιαστικές συνδέσεις μεταξύ της προηγούμενης γνώσης, της νέας γνώσης και των διαδικασιών που εμπλέκονται στη μάθηση (Tam, 2000)

Η γνώση αναπτύσσεται σε αλληλεπίδραση με το περιβάλλον (Vygotsky, 1988) και για την κατασκευή της από τους μαθητές/τριες, διαμεσολαβεί ο/η εκπαιδευτικός ή ένας συνομήλικος μαθητή/τρια, βοηθώντας να γεφυρωθεί ο χώρος ανάμεσα σε αυτό που ο μαθητής μπορεί να επιτύχει χωρίς βοήθεια και σε αυτό που μπορεί να πετύχει με τη βοήθειά τους (Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (Vygotsky in Yasnitsky (2018)).

Η επικοινωνία και η γλώσσα, η κατάλληλη καθοδήγηση, η ανατροφοδότηση και η νοητική σκαλωσιά (scaffolding) αναδεικνύονται ως ιδιαίτερα αποτελεσματικές.

Ευνοείται η δημιουργία συνεργατικών περιβαλλόντων στα οποία η γνώση οικοδομείται μέσω της υλοποίησης δραστηριοτήτων στο πλαίσιο της ομάδας τους, διερευνήσεων, συζητήσεων, εικασιών, επαληθεύσεων ή διαψεύσεων και ατομικών αναστοχασμών.

Οι βασικές αρχές των θεωριών οικοδόμησης της μάθησης είναι:

- Η γνώση οικοδομείται στη βάση της προηγούμενης γνώσης κάνοντας συγκρίσεις και δημιουργώντας συνδέσεις.
- Οι μαθητές/τριες κατακτούν τη γνώση συμμετέχοντας ενεργά σε διερευνήσεις και μαθηματικές δραστηριότητες με τη διαμεσολάβηση των εκπαιδευτικών.
- Δεν υπάρχουν σωστές ή λάθος απαντήσεις. Τα λάθη των μαθητών αποκαλύπτουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν για να αποκτήσουν νέα γνώση.
- Η διαδικασία είναι εξίσου σημαντική με το προϊόν.
- Η μάθηση διευκολύνεται σε συνεργατικά περιβάλλοντα.
- Χειραπτικά υλικά, προσομοιώσεις, νέες τεχνολογίες συμβάλουν στην καλύτερη κατανόηση.

- Οι εκπαιδευτικοί δρουν ως διευκολυντές και ερευνητές.

Το "σύγχρονο» μοντέλο διδασκαλίας εμπεριέχει επιλογές του «παραδοσιακού» μοντέλου οι οποίες αποκτούν ένα πιο συγκεκριμένο περιεχόμενο μέσα σε ένα ευρύτερο φάσμα διδακτικών ενεργειών.

2. Οι θεωρητικές παραδοχές του νέου ΠΣ και οι συνέπειές του στη διδακτική διαχείριση και στη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών.

Τα νέα ΠΣ προκρίνουν τις θεωρίες οικοδόμησης της γνώσης σύμφωνα με τις οποίες η γνώση κατασκευάζεται από τους μαθητές/τριες, οπότε ο προσανατολισμός των νέων βιβλίων είναι μαθητοκεντρικός.

Στο πλαίσιο αυτό η παραδοσιακή διδασκαλία υποχωρεί δίνοντας προτεραιότητα στο διερευνητικό μοντέλο της μάθησης, δηλαδή σε μορφές μάθησης και διδασκαλίας που στηρίζονται κυρίως στην ενεργό συμμετοχή των μαθητών και στην εμπλοκή τους με νέες διδακτικές καταστάσεις υπό την καθοδήγηση των εκπαιδευτικών. Βασική διάσταση του ρόλου του/της εκπαιδευτικού είναι να επιλέγει κατάλληλα μαθηματικά έργα και να εφαρμόζει μαθηματικές πρακτικές, που προάγουν αυθεντικές μαθηματικές δραστηριότητες.

Η διδακτική διαχείριση της διδασκαλίας και η μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών στο νέο ΠΣ ως συνέπεια της θεωρητικής παραδοχής ότι οι μαθητές/τριες κατασκευάζουν ενεργά τη δική τους κατανόηση και γνώση μέσω εμπειριών και αλληλεπιδράσεων αρθρώνεται στους ακόλουθους άξονες:
Ενεργητική μάθηση, Συνεργατική μάθηση, Μάθηση μέσα από διερευνήσεις και προβλήματα, Σκαλωσιές μάθησης, Οικοδόμηση γνώσης στηριγμένης σε υπάρχουσες γνώσεις, Αξιολόγηση ως μέρος της μάθησης, Χρήση της τεχνολογίας, Εννοιολογική κατανόηση, Μεγάλες ιδέες των μαθηματικών.

1. Ενεργητική μάθηση.

- Ο/Η εκπαιδευτικός ενεργεί ως διευκολυντής και οι μαθητές/τριες ενθαρρύνονται να εξερευνήσουν μαθηματικές έννοιες, να κάνουν ερωτήσεις και να ανακαλύψουν μόνοι τους ή/και σε συνεργασία με συμμαθητές/τριες τους βιώσιμες απαντήσεις.
- Οι μαθητές/τριες συμμετέχουν σε διερευνήσεις και δραστηριότητες, χρησιμοποιούν μαθηματικά εργαλεία (π.χ. χάρακες, αριθμομηχανές), χειρίζονται αντικείμενα και μοντελοποιούν τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες με τη βοήθεια λογισμικών και χειραπτικών υλικών.

2. Συνεργατική μάθηση.

- Οι μαθητές/τριες συχνά εργάζονται σε ζεύγη ή μικρές ομάδες για να λύσουν προβλήματα. Η συνεργασία τους επιτρέπει να μοιράζονται διαφορετικές στρατηγικές, να εξηγούν τη σκέψη τους και να μαθαίνουν ο ένας από τις απόψεις του άλλου.
- Η συζήτηση με ολόκληρη την τάξη είναι βασικό συστατικό ενός σύγχρονου διδακτικού μοντέλου (Βερύκιος, 2006). Οι μαθητές/τριες εξηγούν τους συλλογισμούς τους, αιτιολογούν τις απαντήσεις τους και συμμετέχοντας σε συζητήσεις βοηθιούνται στην εμβάθυνση της κατανόησής τους και στη βελτίωση της μαθηματικής τους σκέψης.

3. Μάθηση μέσα από διερευνήσεις και προβλήματα.

- Ο/Η εκπαιδευτικός ενεργεί ως σχεδιαστής και πάροχος κατάλληλων καταστάσεων μάθησης, όπως διερευνήσεις και προβλήματα που έχουν νόημα για τους μαθητές/τριες.
- Οι μαθητές/τριες εμπλέκονται στις σχεδιασμένες από τον/την εκπαιδευτικό καταστάσεις μάθησης οι οποίες απαιτούν εξερεύνηση και διερεύνηση. Δημιουργούν υποθέσεις, δοκιμάζουν τις ιδέες τους και μαθαίνουν μέσω δοκιμής και λάθους.

4. **Σκαλωσιές μάθησης.**
   - Οι καθηγητές/τριες παρέχουν σκαλωσιές μάθησης, προσφέροντας υποδείξεις, κάνοντας καθοδηγητικές ερωτήσεις ή/και εισάγοντας εργαλεία (χειραπτικά ή/και ψηφιακά) που βοηθούν τους μαθητές/τριες να κατασκευάσουν μαθηματικά νοήματα.
   - Η δουλειά του/της εκπαιδευτικού είναι να δημιουργεί διδακτικές καταστάσεις και να βοηθά τους μαθητές/τριες/τριες να βρίσκουν απαντήσεις στα ερωτήματα που δημιουργούνται. Η βοήθεια μειώνεται σταδιακά καθώς οι μαθητές/τριες/τριες αποκτούν κατανόηση και γίνονται αυτόνομοι.
   - Η διδασκαλία προσαρμόζεται στις ατομικές ανάγκες των μαθητών παρέχοντας διαφορετικές εργασίες ή προκλήσεις, ανάλογα με το επίπεδο κατανόησης του κάθε μαθητή.

5. **Συμπερίληψη, διαφοροποίηση και εξατομικευμένη μάθηση:**
   Η συμπερίληψη, η διαφοροποιημένη διδασκαλία και η εξατομικευμένη μάθηση αποτελούν θεμελιώδεις αρχές για την προώθηση της ισότιμης πρόσβασης στη μαθηματική εκπαίδευση. Η συμπερίληψη εστιάζει στη δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που προάγει την ισότητα, αναγνωρίζει τη διαφορετικότητα και ενισχύει την αυτοεκτίμηση και την ενσυναίσθηση (Κόσυβας, 2023). Η διαφοροποίηση ενθαρρύνει την παροχή ευέλικτων μαθησιακών εμπειριών, προσαρμοσμένων στις πολιτισμικές, γνωστικές και προσωπικές ιδιαιτερότητες των μαθητών. Οι εκπαιδευτικοί, με κατάλληλες προσαρμογές στη διδασκαλία, καλλιεργούν δεξιότητες όπως η επίλυση προβλημάτων και η κριτική σκέψη, ενθαρρύνοντας την ενεργητική συμμετοχή και τη συνεργασία (Kosyvas & Glinou, 2023). Ειδικότερος σχεδιασμός και διαχείριση χρειάζεται για μαθητές/τριες με μαθησιακά προβλήματα προκειμένου να επωφεληθούν από την συμμετοχή τους στη μαθησιακή διαδικασία (Τζεκάκη, Μπαραλός, Σταγιόπουλος, 2011).

6. **Οικοδόμηση γνώσης στηριγμένης σε υπάρχουσες γνώσεις.**
   - Οι μαθητές/τριες ενθαρρύνονται να συνδέσουν νέες μαθηματικές έννοιες με αυτό που ήδη γνωρίζουν προκειμένου να οικοδομήσουν μια πιο ολοκληρωμένη και συνεκτική κατανόηση των μαθηματικών.
   - Οι μαθητές/τριες παρακινούνται να αναστοχαστούν πως λειτούργησαν, τι έμαθαν και πώς μπορούν να εφαρμόσουν όσα έμαθαν σε νέες καταστάσεις.

7. **Αξιολόγηση ως μέρος της μάθησης.**
   - Οι εκπαιδευτικοί δρουν ως ερευνητές. Παρατηρούν τους μαθητές/τριες, κάνουν διερευνητικές ερωτήσεις και παρέχουν ανατροφοδότηση που βοηθά στην καθοδήγηση της περαιτέρω μάθησης.
   - Τα λάθη θεωρούνται ως ευκαιρίες μάθησης και όχι ως αποτυχίες. Οδηγούν σε νέες ερωτήσεις και απορίες, δίνοντας τη δυνατότητα στους/στις εκπαιδευτικούς να αντιληφθούν έννοιες που τα παιδιά δεν έχουν κατανοήσει και να αποκτήσουν μια βαθύτερη γνώση των παρανοήσεων τους (Οδηγός εκπαιδευτικού, 2022).
   - Η διαμορφωτική αξιολόγηση αποτελεί συστατικό στοιχείο της διδασκαλίας, που αποσκοπεί στη συνεχή παρακολούθηση και βελτίωση της μαθησιακής διαδικασίας (Black & Wiliam, 2010). Επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς να εντοπίζουν παρανοήσεις, να προσαρμόζουν τις διδακτικές προσεγγίσεις στις αναπτυξιακές και μαθησιακές ανάγκες των μαθητών και να διαμορφώνουν διαφοροποιημένες δραστηριότητες που ενισχύουν την κατανόηση και τη δημιουργική σκέψη. Οι μαθητές/τριες ενθαρρύνονται να εφαρμόζουν την αυτοαξιολόγηση και την ετεροαξιολόγηση μέσα από συζητήσεις και συνεργατικές δραστηριότητες, να αναστοχάζονται πάνω στην πρόοδό τους, να αναγνωρίζουν τις δυνατότητές τους και να καλλιεργούν την αυτονομία και την υπευθυνότητά τους στη μάθηση.

8. Χρήση της τεχνολογίας.

- Χρησιμοποιούνται διαδραστικά εργαλεία, λογισμικά και προσομοιώσεις για την εξερεύνηση μαθηματικών εννοιών με ελκυστικό και λειτουργικό τρόπο.
- Οι μαθητές/τριες χρησιμοποιήσουν με την βοήθεια και υπό την επίβλεψη του/της εκπαιδευτικού το διαδίκτυο για να ερευνήσουν μαθηματικά προβλήματα, να εξερευνήσουν διαφορετικές μεθόδους ή να βρουν πραγματικές εφαρμογές των μαθηματικών που μαθαίνουν.

9. Εννοιολογική κατανόηση.

- Δίνεται έμφαση στην κατανόηση του «γιατί» και του «πώς» και όχι απλώς στην απομνημόνευση τύπων ή αλγορίθμων.
- Οι μαθητές/τριες αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων .
- Οι μαθητές/τριες ενθαρρύνονται να αναγνωρίσουν συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας έννοιας καθώς και μεταξύ μαθηματικών εννοιών.

10. Μεγάλες ιδέες των μαθηματικών.

Ανάδειξη των μεγάλων ιδεών στα μαθηματικά, δηλαδή των κεντρικών ιδεών στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών οι οποίες συνδέουν διαφορετικές μαθηματικές έννοιες ή οπτικές σε ένα συνεκτικό σύνολο (NCTM, 2000).

Στο νέο ΠΣ ως μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών αναγνωρίζονται: η *Μαθηματική δομή*, η *Απόδειξη*, η *Γενίκευση*, η *Μεταβολή*, η *Ισοδυναμία*, οι *Μετασχηματισμοί* και η *Προσέγγιση-σύγκλιση*.

3. Διδακτική διαχείριση και μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών/τριών

Καθοριστικά στοιχεία για τη διδακτική διαχείριση είναι:

- Η έμφαση που πρέπει να δίνει ο/η εκπαιδευτικός στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών, στη μαθηματική δραστηριότητα και μάθηση και όχι απλά στη διεκπεραίωση του έργου.
- Η δυνατότητα του/της εκπαιδευτικού να υποστηρίζει και να συντονίζει το διάλογο και τη συζήτηση μέσα στην τάξη (Clarke & Mesiti, 2013).

Ένα καλά σχεδιασμένο έργο ενισχύει τη διερεύνηση, τον πειραματισμό και τον αναστοχασμό, ενώ η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και ψηφιακών εργαλείων διευκολύνει την κατανόηση και την επικοινωνία ιδεών.

Η διδακτική διαχείριση σύμφωνα με την θεωρία των διδακτικών καταστάσεων (Brousseau, 1998) η οποία εκπορεύεται από τις θεωρίες κατασκευής της γνώσης, είναι ένα εργαλείο για την εξέλιξη της μαθησιακής διαδικασίας στην τάξη η οποία μπορεί να αναλυθεί στις ακόλουθες τέσσερις φάσεις:

Διερευνητική φάση (Δράση μαθητών/τριών)

Ο/η εκπαιδευτικός οργανώνει ένα διδακτικό περιβάλλον με σκοπό να εμπλέξει τους μαθητές/τριες του και στη συνέχεια να απομακρυνθεί. Ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη αυτού του περιβάλλοντος θα πρέπει να περιλαμβάνει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Οι μαθητές/τριες να είναι πρόθυμοι να το υιοθετήσουν σαν δικό τους και
- να έχουν τα μέσα να κατασκευάσουν μόνοι τους τη λύση ή το τελικό προϊόν.

Σε αυτή την κατάσταση η γνώση εμφανίζεται μέσα από, μια διερεύνηση, την επίλυση ενός προβλήματος ή μια διαδικασία μοντελοποίησης.

Φάση διατύπωσης

Ο/η εκπαιδευτικός έχει φροντίσει να αναπτυχθεί ένα διδακτικό περιβάλλον που βασίζεται σε προηγούμενες κοινές εμπειρίες, ενθαρρύνει και συντονίζει ανταλλαγές απόψεων.

Οι μαθητές/τριες ανταλλάσσουν και συγκρίνουν τις παρατηρήσεις τους. Στην προσπάθειά τους αυτή να επικοινωνήσουν οδηγούνται στο να δημιουργήσουν κοινά νοήματα καθώς και να διαμορφώσουν μια γλώσσα επικοινωνίας.

Η γνώση εμφανίζεται ως αποτέλεσα μιας προσωπικής εμπειρίας η οποία όταν κοινοποιηθεί αποπροσωποποιείται και στη συνέχεια ενσωματώνεται στην εμπειρία της κοινότητας των μαθητών.

Φάση επικύρωσης

Ο/η εκπαιδευτικός ενεργεί ως συντονιστής. Παρεμβαίνει με σκοπό την ανάπτυξη παραγωγικού διαλόγου, παρακινεί για περισσότερη ακρίβεια και μεθοδικότητα στη χρήση των εννοιών και εφιστά την προσοχή των μαθητών σε πιθανές αντιφάσεις.

Οι μαθητές/τριες εμπλέκονται σε μαθηματικά έργα προσπαθώντας να επαληθεύσουν μια υπόθεση ή να εξηγήσουν κάποιο φαινόμενο.

Η γνώση έχει τα δυναμικά χαρακτηριστικά μιας θεωρίας εν τη γενέσει της .

Η φάση αυτή έχει διαλεκτικό χαρακτήρα και *«η κάθε υπόθεση πρέπει να αιτιολογείται επαρκώς ώστε είτε να γίνει αποδεκτή είτε να απορριφθεί»* (Brousseau, 1997).

Φάση θεσμοποίησης.

Ο/η εκπαιδευτικός ως εκπρόσωπος των επίσημων μαθηματικών βοηθά τους μαθητές/τριες στη διατύπωση των αποτελεσμάτων της φάσης της επικύρωσης σύμφωνα με ορολογίες, ορισμούς, θεωρήματα, και κανόνες, όπως παρουσιάζονται από το θεσμό των αναλυτικών προγραμμάτων, των σχολικών βιβλίων και της επίσημης παιδείας.

Για τους μαθητές/τριες το διδακτικό περιβάλλον είναι ένα ευκρινές πλαίσιο κανόνων.

Παρέχονται στους/στις μαθητές/τριες εφαρμογές, ασκήσεις εμπέδωσης και έργα επέκτασης. Χρειάζεται προσοχή γιατί η πρόωρη θεσμοποίηση μπορεί να διακόψει την κατασκευή νοήματος και η όψιμη να ενισχύσει ανακριβείς ερμηνείες. Και στις δύο περιπτώσεις δημιουργούνται εμπόδια προσπέλασης της γνώσης.

Ο σχεδιασμός του βιβλίου σε σχέση με τη διδακτική διαχείριση έχει ως αφετηρία τη διερευνητική φάση (Δράση μαθητών/τριών) και ακολουθούν οι φάσεις της διατύπωσης, της επικύρωσης και τέλος της θεσμοποίησης.

Η διδακτική διαχείριση ενός μαθηματικού έργου (διερεύνηση, ερώτημα, πρόβλημα) επικεντρώνεται στην ενεργητική εμπλοκή των μαθητών, στη μαθηματική δραστηριότητα και στη δημιουργία ενός πλαισίου διαπραγμάτευσης μέσω διαλόγου. Η μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών/τριών προκύπτει από μια διδασκαλία που υποστηρίζει τη διερεύνηση στο σύγχρονο διδακτικό μοντέλο και έχει τις ακόλουθες διαστάσεις:

Α. Εμπλέκει τους μαθητές/τριες στις διερευνήσεις του βιβλίου ή σε άλλες που θεωρούνται κατάλληλες για κάθε διδακτική ενότητα, έτσι ώστε οι μαθητές/τριες να συμμετέχουν ενεργά σε διαδικασίες σκέψης που ενθαρρύνουν και ευνοούν την ανάπτυξη συνδέσεων.

Τα έργα για την μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών/τριών που δίνονται προτείνεται να :

- είναι κατανοητά από όλους τους μαθητές/τριες.
- είναι ενδιαφέροντα για τους μαθητές/τριες.
- περιλαμβάνουν ρεαλιστικές νοητικές και χρονικές προσδοκίες.
- αναπτύσσουν την κατανόηση και την εκμάθηση διαδικασιών.
- αντιμετωπίζονται με ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών.
- δίνουν έμφαση στις διαδικασίες και στην εννοιολογική κατανόηση. Όχι στην απάντηση.

Β. Ευνοεί τη δημιουργία συνεργατικού περιβάλλοντος και υποστηρίζει την ανταλλαγή επιχειρημάτων και ιδεών προκειμένου να οικοδομηθούν συγκεκριμένα μαθηματικά νοήματα.

Το περιβάλλον της τάξης προτείνεται να :

- υποστηρίζει την ανταλλαγή ιδεών και προσεγγίσεων
- αξιοποιεί διαφορετικές ιδέες
- προωθεί την ανταλλαγή απόψεων και τον κριτικό διάλογο
- ενθαρρύνει την υποστήριξη μαθητών από συμμαθητές/τριες τους

Γ. Απευθύνει ερωτήσεις που κινητοποιούν τους μαθητές/τριες και προωθούν την ανάπτυξη συλλογισμών και επικοινωνίας των μαθηματικών ιδεών τους.

Οι ερωτήσεις προτείνεται να :

- θέτουν μαθηματικές προκλήσεις στους μαθητές/τριες
- ενθαρρύνουν την αποτίμηση και ανάλυση μεθόδων και στρατηγικών
- αξιοποιούν τις παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών προκειμένου να μπορέσουν οι μαθητές/τριες να μπορέσουν να αντικαταστήσουν τα ενδεχόμενα ανεπαρκή και ακατάλληλα γνωστικά τους σχήματα.
- προωθούν την εξερεύνηση και την ανακάλυψη των νέων ιδεών.

Η εφαρμογή ενός μαθηματικού έργου στη σχολική τάξη μπορεί να διακριθεί στα ακόλουθα τρια στάδια (Πόταρη κ.α., 2022):

Στάδιο 1ο : Στο πρώτο στάδιο της εισαγωγής του μαθηματικού έργου στην τάξη, ο/η εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές/τριες να κατανοήσουν το πλαίσιο του έργου και να το συνδέσουν με τις προηγούμενες μαθηματικές τους γνώσεις. Παράλληλα, ενθαρρύνει τους μαθητές/τριες στην επιλογή και χρήση κατάλληλων πόρων (π.χ. χειραπτικών, ψηφιακών, οπτικών αναπαραστάσεων) (González & Eli, 2017).

Στάδιο 2ο : Οι μαθητές/τριες εργάζονται ατομικά ή σε ομάδες και ο/η εκπαιδευτικός αλληλοεπιδρά μαζί τους. Είναι σημαντικό ο/η εκπαιδευτικός να έχει προβλέψει κατά το σχεδιασμό του μαθηματικού έργου πιθανές στρατηγικές των μαθητών και πιθανές παρανοήσεις και να έχει σκεφτεί τρόπους και μεθόδους για να τις αναγνωρίσει και να τις διαχειριστεί. Μπορεί να υποστηρίξει το διάλογο και τη συζήτηση στις ομάδες βοηθώντας τους μαθητές/τριες να αποσαφηνίσουν τις ιδέες τους με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα με διευκρινιστικές ερωτήσεις ή ζητώντας από ένα μαθητή να αναδιατυπώσει τις ιδέες ενός άλλου μαθητή της ομάδας του. Επίσης, ο/η εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει έμφαση στη συλλογιστική σκέψη των παιδιών και στη νοερή επιχειρηματολογία με ερωτήσεις όπως: *«Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον συμμαθητή σας; Γιατί;», «Τι θα γινόταν αν…; Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;» «Η απάντηση που δώσατε έχει νόημα; Είστε σίγουροι ότι η απάντηση που δίνετε είναι σωστή; Πώς το ξέρετε;», «Υπάρχει άλλη απάντηση;», «Υπάρχει άλλος τρόπος να βρούμε τη λύση; Πού διαφέρουν οι διαφορετικές στρατηγικές που ακολουθήσατε;»* κλπ. Όταν παρέχει οδηγίες ο/η εκπαιδευτικός ενδείκνυται να εστιάζει κυρίως στη διαδικασία και όχι στο τελικό προϊόν της μαθηματικής διερεύνησης. Για παράδειγμα, μπορεί να απευθύνει στους μαθητές/τριες ερωτήσεις/υποδείξεις όπως: *«Ποια είναι τα στοιχεία - κλειδιά τους προβλήματος;», «Τι αλλάζει και τι παραμένει σταθερό; Διατηρήστε όλες τις μεταβλητές πλην μιας σταθερές και αρχίστε να πειραματίζεστε με αυτή. Ποιος ο ρόλος της; Ακολουθήστε τη ιδία διαδικασία για κάθε μεταβλητή»* κλπ. (Van de Walle et al., 2014).

Στάδιο 3ο : Οι μαθητές/τριες παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της δραστηριότητάς τους και τις στρατηγικές που ανέπτυξαν και έτσι ο/η εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να υποστηρίξει τους μαθητές/τριες να προχωρήσουν σε συνδέσεις και επεκτάσεις των μαθηματικών ιδεών που προσεγγίστηκαν (Stein et al., 2008), ενώ παράλληλα επικυρώνει και αξιολογεί τη μαθηματική γνώση των μαθητών (Burton & Morgan, 2000).

Το βιβλίο αυτό υλοποιεί τα παραπάνω, παρέχοντας στους εκπαιδευτικούς υποστήριξη για το σχεδιασμό και τη διδακτική διαχείριση των ΠΜΑ. *Ειδικότερα :*

- Εισαγωγικές διερευνήσεις που αποτελούν γέφυρες ανάμεσα σε αυτά που ξέρουν και σε αυτά που πρόκειται να μάθουν (προκαταβολικοί οργανωτές) οι μαθητές/τριες/τριες.
- Θεωρία με παραδείγματα βασισμένα στις εμπειρίες των μαθητών.
- Εφαρμογές που λειτουργούν ως παραδείγματα για τους μαθητές/τριες/τριες.
- Πλήθος ψηφιακών δραστηριοτήτων σε κάθε ενότητα οι οποίες δίνουν την δυνατότητα διερευνήσεων και πολλαπλών αναπαραστάσεων.
- Συμπληρωματικό υλικό με πλήθος ιστορικών σημειωμάτων και εργασιών επέκτασης.
- Ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης.
- Ερωτήσεις κατανόησης.
- Συνθετικές εργασίες.
- Αξιολόγηση (Ασκήσεις και προβλήματα).
- Ανακεφαλαίωση.
- Επαναληπτικά έργα.

4. Ενδεικτικές δυσκολίες των μαθητών[1].

Αριθμοί

Οι πιθανές δυσκολίες των μαθητών σχετίζονται με:

- την ιδέα ότι ένας αριθμός μπορεί να γραφεί με διαφορετικούς τρόπους χωρίς να αλλάζει. Για παράδειγμα ο 9 στο δεκαδικό, γράφεται 1001 στο δυαδικό και αντίστροφα.
- το ίδιο σύμβολο αναπαριστά διαφορετικούς αριθμούς σε διαφορετικά συστήματα. Για παράδειγμα το 11 αναπαριστά διαφορετικούς αριθμούς στο δεκαδικό και στο δυαδικό.
- τη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών. Για παράδειγμα μπορεί να μην αναγνωρίζουν το $\frac{4}{5}$ και το 0,8 ως τον ίδιο αριθμό.
- την αναγνώριση των δεκαδικών με άπειρα δεκαδικά ψηφία με περίοδο, ως ρητών αριθμών όπως π.χ. ο 0,333… ή ο 1,999… (Giannakoulias, Sougioul & Zachariades, 2007)
- την ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών, δηλαδή ότι μεταξύ δύο διαφορετικών ρητών υπάρχει πάντα ρητός αριθμός σε αντίθεση με τους ακέραιους όπου κάθε ακέραιος έχει επόμενο.

Άλγεβρα

Κανονικότητες – Συναρτήσεις

Οι πιθανές δυσκολίες των μαθητών με τις συναρτήσεις σχετίζονται με:

- τη συνθετότητα της έννοιας, την ποικιλία των μαθηματικών νοημάτων που σχετίζονται με αυτήν, όπως μεταβλητή (ανεξάρτητη και εξαρτημένη), συμμεταβολή, σύνολο, καθώς και την ποικιλία των αναπαραστάσεών της (λεκτική διατύπωση, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση, πίνακας τιμών).
- την αναγκαιότητα να αντιληφθούν οι μαθητές/τριες την έννοια της συνάρτησης ως διαδικασία και ως αντικείμενο που συνοδεύεται από μια ποικιλία αναπαραστάσεων.

[1] ΙΕΠ (2022). *Οδηγός Μαθηματικών Γυμνασίου*

- την ταύτιση της έννοιας της συνάρτησης με μια υπολογιστική διαδικασία ή έναν τύπο.
- την παράλληλη αντιμετώπιση ως συμμεταβολής μεγεθών και ως αντιστοιχίας.

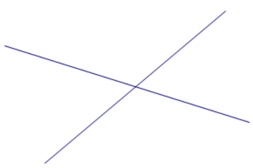
Αλγεβρικές Παραστάσεις - Αλγεβρικές Σχέσεις (Ισότητες – Ανισότητες)

Οι πιθανές δυσκολίες των μαθητών με τις συναρτήσεις σχετίζονται με:

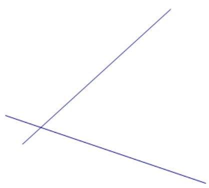
- την αξιοποίηση της γραφικής παράστασης των συναρτήσεων για την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων. Οι μαθητές/τριες συνήθως προτιμούν τις αλγεβρικές διαδικασίες επίλυσης (Huntley et al., 2007).
- τη διαδικασία μοντελοποίησης μιας ρεαλιστικής κατάστασης και την αποτύπωσή της μέσω αλγεβρικής παράστασης.
- την έννοια της μεταβλητής, την έννοια της εξίσωσης με άγνωστο στο 1ο μέλος και με άγνωστο και στα δύο μέλη, την έννοια της ισότητας (=), στη διάκριση μεταξύ εξίσωσης και ανίσωσης (Βερύκιος & Φαρμάκη, 2005) και στην κατανόηση της συνάρτησης ως σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών που συμμεταβάλλονται.

Γεωμετρία του επιπέδου

- Οι μαθητές/τριες δυσκολεύονται με την αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων και αντικειμένων όταν δεν έχουν τυπικό προσανατολισμό, με την κατανόηση της συμπερίληψης σχημάτων σε κλάσεις και την οπτικοποίηση γεωμετρικών στερεών σε δισδιάστατη (2D) μορφή (Fujita και Jones 2007).
- Στοιχεία όπως το σημείο, η ευθεία, η ημιευθεία, το επίπεδο κ.λπ. δεν γίνονται άμεσα αντιληπτά στους μαθητές/τριες, λόγω του θεωρητικού τους χαρακτήρα. Για παράδειγμα μπορούν να αναγνωρίσουν κατακορυφήν γωνίες στην εικόνα (1) αλλά όχι στην εικόνα (2) και δεν αντιλαμβάνονται ότι τα σημεία στην εικόνα (3) ανήκουν σε κυρτή γωνία.



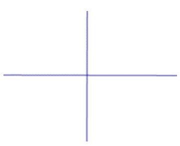
Εικόνα 1



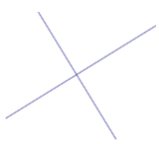
Εικόνα 2

Εικόνα 3

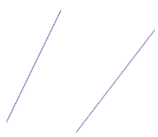
Ο συνηθισμένος τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται τα γεωμετρικά σχήματα ακολουθεί τον οριζόντιο και κατακόρυφο προσανατολισμό εμποδίζοντας τους μαθητές/τριες να διακρίνουν τις ίδιες σχέσεις σε άλλες καταστάσεις. Για παράδειγμα αναγνωρίζουν την καθετότητα στην περίπτωση της εικόνας (4) αλλά με δυσκολία στην περίπτωση της εικόνας (5). Ακόμα και η σχέση της παραλληλίας (ή της μη παραλληλίας) μπορεί να είναι δύσκολα αναγνωρίσιμη όταν οι ευθείες ακολουθούν πλάγιες διευθύνσεις (εικόνες 6.7)



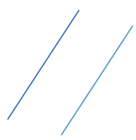
Εικόνα 4



Εικόνα 5



Εικόνα 6



Εικόνα 7

Τριγωνομετρία

- Οι μαθητές/τριες δυσκολεύονται να αντιληφθούν το λόγο δύο τμημάτων ως ένα αριθμό καθώς και να συνδέσουν το λόγο των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου με το μέτρο μιας οξείας γωνίας.
- Η ερμηνεία του ίδιου του λόγου μπορεί να αποτελεί εμπόδιο. Για παράδειγμα, ο λόγος $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{1}{3}$ όπου ΑΒ και ΑΓ πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, ερμηνεύεται από μαθητές/τριες αποκλειστικά ως ΑΒ=1 μονάδα μήκους και ΑΓ=3 μονάδες μήκους.
- Κάποιοι μαθητές/τριες μπορεί να δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν την ορθή γωνία και την υποτείνουσα όταν το ορθογώνιο τρίγωνο δεν έχει τον συνηθισμένο γι' αυτούς προσανατολισμό.

Στατιστική

«Διαχείριση δεδομένων»

Οι πιθανές δυσκολίες των μαθητών με την διαχείριση δεδομένων σχετίζονται με:

- την αδυναμία να διακρίνουν διαφορετικούς τύπους δεδομένων (κατηγορικά, διακριτά ή συνεχή ποσοτικά).
- την αναγνώριση του τι ακριβώς εκφράζουν οι κυκλικοί τομείς σε ένα κυκλικό διάγραμμα.
- την μη επαρκή αιτιολόγηση κατασκευής των κλάσεων σε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων ή/και τι πληροφορία θα χάναμε αν είχαμε πολύ μεγάλο πλήθος κλάσεων ή πολύ μικρό.
- την ανάπτυξη μιας κριτικής στάσης απέναντι σε παραπλανητικές ή εσφαλμένες παρουσιάσεις δεδομένων. Για παράδειγμα την επίδραση της μεταβολής της κλίμακας.
- την αναγνώριση της αναγκαιότητας αντιπροσωπευτικότητας του δείγματος.
- την αναγνώριση της μεταβλητότητας στατιστικών δεικτών μεταξύ δειγμάτων.

Μέτρα θέσης-μεταβλητότητα

Οι πιθανές δυσκολίες των μαθητών με την διαχείριση δεδομένων σχετίζονται με:

- την περιγραφή χαρακτηριστικών ποσοτικών δεδομένων από ιστογράμματα, όπως το εύρος και οι ακραίες-απόμακρες τιμές.
- Την επίδραση των ακραίων τιμών στα μέτρα θέσης.
- την ερμηνεία της μεταβλητότητας.
- τις διαφορές μέσης τιμής και διαμέσου και πότε ενδείκνυται να χρησιμοποιείται κάθε μία.

Πιθανότητες

Οι πιθανές δυσκολίες των μαθητών με την διαχείριση δεδομένων σχετίζονται με:

- την θεώρηση ότι αν η πιθανότητα επιτυχίας σε ένα πείραμα είναι ¼ , τότε σε τέσσερις επαναλήψεις του πειράματος θα έχει μια επιτυχία, σε οχτώ δύο κ.ο.κ μη λαμβάνοντας υπόψη τους την μεταβλητότητα.
- την αντίληψη των μαθητών ότι αν στρίψουμε ένα νόμισμα τέσσερις φορές δεν είναι το ίδιο πιθανό να προκύψει ΚΚΚΚ, ΚΚΓΓ ή ΚΓΚΓ. Πολλοί μαθητές/τριες θεωρούν ότι είναι πιο πιθανό να προκύψει ΚΚΓΓ έναντι του ΚΚΚΚ, γιατί έχει ίσο πλήθος Κ και Γ.
- την κατανόηση της προσέγγισης της πιθανότητας από τη σχετική συχνότητα για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων.

5. Ενδεικτικά παραδείγματα

Στο βιβλίο έχουμε ενσωματώσει πλήθος διερευνήσεων οι οποίες υποδεικνύουν την προτεινόμενη διδακτική διαχείριση, καθώς και πλήθος ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων που παρατίθενται στο συμπληρωματικό υλικό και διευρύνουν τα εργαλεία προσέγγισης των εννοιών από τους μαθητές/τριες.

ΑΛΓΕΒΡΑ, Ενότητα 3.1 και Σελίδα 58

Ο Γιώργος και η Βαλέρια ζήτησαν από τους γονείς τους πίτσα. Αυτοί παρήγγειλαν και ζήτησαν να είναι κομμένη σε τέσσερα κομμάτια για να την μοιραστούν τα παιδιά.

Ξαφνικά, χτυπάει το τηλέφωνο και μαθαίνουν ότι πρόκειται να τους επισκεφθεί η ξαδέρφη τους η Μυρτώ.

Τι προτείνετε να κάνουν ώστε να μοιραστεί δίκαια η πίτσα και στα τρία παιδιά;

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν μία κατάσταση της καθημερινότητας, ως ανοικτό πρόβλημα προς λύση. Ο εκπαιδευτικός τους ζητά να ανακαλέσουν τις γνώσεις που ήδη διαπραγματεύτηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο σχετικά με τους διαιρέτες και τα πολλαπλάσια των αριθμών. Ακολούθως ζητά από τους μαθητές/τριες να βρουν σύνδεση αυτών των εννοιών η οποία οδηγεί σε λύση του συγκεκριμένου προβλήματος. Τέλος τροφοδοτεί τον διάλογο ανάδειξης της αναγκαιότητας χρήσης των κλασμάτων και της ισοδυναμίας τους.

ΑΛΓΕΒΡΑ, Ενότητα 3.2.2 και Σελίδα 67

Διερεύνηση 3

Να βρεθούν δύο ρητοί αριθμοί που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών 2 και 3. Στη συνέχεια, να βρεθούν άλλοι δύο μεταξύ αυτών που βρήκατε. Ακολούθως, να βρεθούν άλλοι δύο μεταξύ αυτών που βρήκατε.
- Να επαναλάβετε τη διαδικασία άλλες δύο φορές.
- Πόσες φορές μπορούμε να επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία; Να κάνετε μια εικασία.

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Όπως έχει αναδειχθεί από σχετικές έρευνες, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες αναγνώρισης της πυκνότητας και της μη διαδοχικότητας των ρητών αριθμών, δηλαδή ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει πάντοτε κάποιος άλλος ρητός. Οι μαθητές/τριες εμπλεκόμενοι ενεργά με την διερεύνηση, θα πειραματιστούν, θα παρατηρήσουν και σε συνεργασία με τους συμμαθητές τους θα ανακαλύψουν ότι όσους ρητούς κι αν βρουν, πάντοτε θα μπορούν ευκολότερα ή δυσκολότερα να βρίσκουν κάποιον ακόμα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί επιπλέον να ρωτήσει *«ποιος είναι ο επόμενος ρητός αριθμός του 2 ;»*. Η προσπάθεια να απαντήσουν στα ερωτήματα θα οδηγήσει διαισθητικά στις έννοιες της πυκνότητας και της μη διαδοχικότητας των ρητών, διαμορφώνοντας αντίστοιχες εικασίες.

ΑΛΓΕΒΡΑ, Ενότητα 4.1 και Σελίδα 94

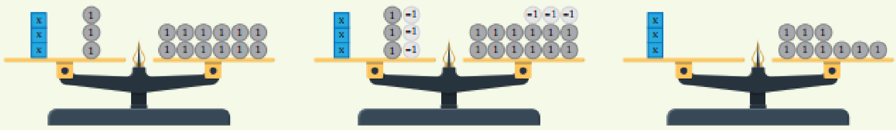
Στην παρακάτω κανονικότητα λείπουν ο 3ος και ο 6ος όρος.

α) Σχεδιάζουμε τους όρους που λείπουν.
β) Γράφουμε σε έναν πίνακα τους όρους της κανονικότητας.
γ) Βρίσκουμε τον κανόνα με τον οποίο προκύπτει ο κάθε όρος από τον προηγούμενο.
δ) Βρίσκουμε τον γενικό τύπο της κανονικότητας.

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Οι μαθητές πειραματίζονται με γεωμετρικές κανονικότητες και έχουν την ευκαιρία να δώσουν διαφορετικές λύσεις στο εν λόγω πρόβλημα. Για παράδειγμα ως κανόνα, για την αριθμητική κανονικότητα, έχουν την δυνατότητα να δώσουν τη περίμετρο του σχήματος σε τετραγωνάκια 4, 8, 12, 16, κλπ. αλλά και το εμβαδόν του εσωτερικού του τετραγώνου: 0, 1, 4, 9, κλπ. Ακόμη, με την κατάλληλη καθοδήγηση του/της εκπαιδευτικού είναι δυνατόν να καταλήξουν στην κανονικότητα που προκύπτει από το άθροισμα των όρων των δύο κανονικοτήτων. Έτσι, οι μαθητές θα συνδέσουν νέες μαθηματικές έννοιες με αυτό που ήδη γνωρίζουν προκειμένου να οικοδομήσουν μια πιο ολοκληρωμένη και συνεκτική κατανόηση των μαθηματικών.

ΑΛΓΕΒΡΑ, Ενότητα 6.3 και Σελίδα 124



Στην παραπάνω εικόνα υπάρχουν η μεταβλητή x, ο αριθμός 1 και ο αριθμός –1. Έχουν τοποθετηθεί σε διάφορες ποσότητες σε τρεις ζυγαριές οι οποίες ισορροπούν.

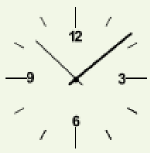
- Να γράψετε τις εξισώσεις που εκφράζει κάθε ζυγαριά.
- Να δικαιολογήσετε την ισορροπία στη (Β) και στη (Γ) ζυγαριά.
- Να μετασχηματίσετε την εξίσωση της τρίτης ζυγαριάς στην πιο απλή μορφή.
- Να καταγράψετε τα βήματα που κάνατε και να τα συζητήσετε στην τάξη.

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Οι μαθητές/τριες μέσα από ένα πρόβλημα ισορροπίας, οδηγούνται σε μια εξίσωση εκφράζοντας με μαθηματικούς όρους την οπτικοποίηση της εξίσωσης. Αρχικά μεταφράζουν λεκτικά τις παρατηρούμενες ισορροπίες αναγνωρίζοντας την ισότητα των βαρών στις δύο φάλαγγες κάθε ζυγαριάς. Εκφράζουν, ενδεχομένως με την βοήθεια του/της εκπαιδευτικού, συμβολικά την εξίσωση για την περίπτωση της τρίτης ζυγαριάς, ακολούθως θα την μετασχηματίσουν σε ισοδύναμη μορφή δικαιολογώντας την ισοδυναμία και τέλος θα δώσουν μία απλούστερη μορφή. Ο στόχος είναι να οδηγηθούν μέσα από το πρόβλημα στην αλγοριθμική περιγραφή στην επίλυσης της εξίσωσης πρώτου βαθμού.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, Ενότητα 1.2 και Σελίδα 142

Σ' ένα ρολόι τοίχου, όπως το διπλανό, ο ωροδείκτης και ο λεπτοδείκτης περιστρέφονται γύρω από το κέντρο του.



Να σχεδιάσετε ένα αντίστοιχο ρολόι στο επίπεδο χαρτί σας και ημιευθείες για τους δείκτες, ώστε να δείχνουν ακριβώς την ώρα 3.

- Να επανασχεδιάσετε την ημιευθεία του λεπτοδείκτη, ώστε να δείχνει την ώρα 3:15'.
- Πόσο έστριψε ο λεπτοδείκτης από τις 3 έως τις 3:15;
- Τι γωνία ορίζουν οι ημιευθείες των δύο δεικτών, όταν το ρολόι δείχνει ακριβώς 3:15 και 3:45;
- Να ανοίξετε την εφαρμογή «Ρολόι» και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.
- Να συζητήσετε με τους συμμαθητές σας τα συμπεράσματά σας από τα πειράματα που κάνατε.

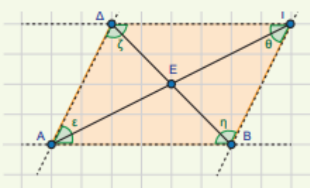
Ρολόι

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Οι μαθητές/τριες σχεδιάζουν, χρησιμοποιώντας τα γεωμετρικά τους όργανα, και παρατηρούν το σχέδιό τους. Μέσα από ένα οικείο αντικείμενο ζητείται να σχεδιάσουν στο χαρτί τις αναφερόμενες γωνίες. Οι κατασκευές αναδύουν τις έννοιες της ορθής γωνίας, της μηδενικής και της ευθείας γωνίας. Επι πλέον βοήθεια δίνεται με το ψηφιακό αντικείμενο τους το οποίο τους δίνει τη δυνατότητα για δυναμικό χειρισμό. Έτσι, συμμετέχουν ενεργά στη διερεύνηση, χρησιμοποιούν μαθηματικά εργαλεία (π.χ. χάρακες, αριθμομηχανές), χειρίζονται αντικείμενα και εργάζονται με συγκεκριμένα υλικά όπως λογισμικά ή γεωμετρικά σχήματα οικοδομώντας μια διαισθητική κατανόηση των αφηρημένων εννοιών.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, Ενότητα 3.2.1 και Σελίδα 180

Σε μιλιμετρέ χαρτί να σχεδιάσετε δύο ζεύγη παράλληλων ευθειών, όπως στο διπλανό σχήμα και να ονομάσετε Α, Β, Γ και Δ τα σημεία τομής τους.



- Με τα γεωμετρικά σας όργανα να συγκρίνετε τις πλευρές και τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.
- Επίσης, να συγκρίνετε τα τμήματα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ που ορίζονται από το σημείο τομής τους Ε.
- Να διατυπώσετε εικασίες για τη σχέση των απέναντι πλευρών, των απέναντι γωνιών και των διαγωνί-ων του.

Να ανοίξετε την εφαρμογή, να σύρετε τις κορυφές ώστε να σχηματίσετε ένα παραλληλόγραμμο και να κάνετε τα πειράματα που προτείνονται.

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να πειραματιστούν, χρησιμοποιώντας τα γεωμετρικά τους όργανα, να κάνουν παρατηρήσεις και να διατυπώσουν εικασίες σχετικά με τις ιδιότητες των πλευρών, των διαγώνιων και των γωνιών του παραλληλογράμμου. Επιπλέον, μπορούν να χρησιμοποιήσουν το ψηφιακό αντικείμενο (που προτείνεται) και να αξιοποιήσουν τα εργαλεία της εφαρμογής για να επαληθεύσουν δυναμικά, πλέον, τις εικασίες τους. Έτσι, οι μαθητές συμμετέχουν σε διερευνήσεις και δραστηριότητες, χρησιμοποιούν μαθηματικά εργαλεία (π.χ. χάρακες, αριθμομηχανές), χειρίζονται αντικείμενα και εργάζονται με συγκεκριμένα υλικά όπως λογισμικά ή γεωμετρικά σχήματα προκειμένου να οικοδομήσουν μια διαισθητική κατανόηση των αφηρημένων εννοιών.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ (Στατιστική, Σελ. 246)

Σε μια έρευνα για τις ώρες που διαβάζουν οι μαθητές σε μια τάξη ενός σχολείου προέκυψαν τα ακόλουθα στοιχεία:

1	1,1	1,4	1,3	1.4	1.5	2	2,5	3	4
2	2,5	3	3	3	4	3	2	3	1,5
2,5	2	3	3	3,5	4	4	4,5	3	3
5	5	5	4	3	2	1	2	3	4
4	4,5	3,5	2	4	4	4,5	3	3,5	2
2	1	2	3	4	3	2	3	4	3
2	1	1,5	1,5	2	3	4	3,3	4	4,1
4	2	3	3	4	4	2	2	4,5	5

α) Να χαρακτηρίσετε το είδος των δεδομένων.
β) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα.
γ) Παρατηρείτε κάποιο πρόβλημα;
Αν ναι, χωριστείτε σε ομάδες και προτείνετε λύσεις διαχείρισης του προβλήματος.

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Οι μαθητές/τριες αρχικά αρχίζουν να φτιάχνουν ένα ραβδόγραμμα, αλλά παρατηρούν ότι με τόσες πολλές παρατηρήσεις δεν φαίνεται να μπορούν να τις χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικά ώστε να αποσπάσουν από αυτές χρήσιμες πληροφορίες. Αν οι μαθητές/τριες δεν μπορούν να προτείνουν λύση, τότε ο/η εκπαιδευτικός θέτει διαδοχικά ερωτήματα και ζητούμενα: *«πιο είναι το πρόβλημα ;», «σκεφτείτε κάποιο τρόπο ώστε να μειώσουμε το πλήθος των δεδομένων χωρίς να διαγράψουμε κανένα από αυτά για παράδειγμα σε οχτώ ομάδες» , «πόσα δεδομένα και ποια σε κάθε ομάδα θα βάζατε ;», «μπορεί τε να αντικαταστήσετε τα δέκα δεδομένα κάθε ομάδας με έναν αριθμό ο οποίος να τους αντιπροσωπεύει ;», «μπορείτε τώρα να κάνετε διάγραμμα στη βάση των προηγούμενων απαντήσεων σας ;»*. Οι απαντήσεις και η διαπραγμάτευση που θα ακολουθήσει θα δημιουργήσουν το πλαίσιο των σκέψεων και ιδεών στις οποίες θα στηριχθεί η οικοδόμηση της έννοιας του ιστογράμματος.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ (Πιθανότητες, Σελ. 277)

Δίνεται ο διπλανός τροχός της τύχης.

α) Να υπολογίστε την πιθανότητα όταν περιστρέψουμε τον δείκτη του τροχού της τύχης να σταματήσει σε αριθμό μεγαλύτερο από το 6.

β) Η Μαρία έστριψε το δείκτη του τροχού της τύχης 50 φορές και 13 από αυτές σταμάτησε σε ένα αριθμό μεγαλύτερο από το 6. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που πήρε η Μαρία, ποια είναι η πιθανότητα να προκύψει σε ένα νέο γύρισμα του δείκτη αριθμός μεγαλύτερος από 6;

γ) Είναι το αποτέλεσμα που βρίσκει η Μαρία δικαιολογημένο;

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης.

Με το πρώτο ερώτημα οι μαθητές/τριες οδηγούνται στην εύρεση του σύνθετου ενδεχομένου {7, 8} από τα ισοπίθανα ενδεχόμενα. Με το δεύτερο ερώτημα βρίσκουν την σχετική συχνότητα ή την πιθανότητα που προκύπτει από τα αποτελέσματα του πειράματος για να απαντήσουν στο ερώτημα. Προκειμένου να απαντήσουν στο τρίτο ερώτημα οι μαθητές/τριες προσδιορίζουν την πιθανότητα και την συγκρίνουν με την προηγούμενη. Έτσι τελικά δημιουργείται το πλαίσιο το οποίο υποστηρίζει τον ορισμό ενός σύνθετου ενδεχομένου παράλληλα με τις έννοιες της πειραματικής πιθανότητας και της θεωρητικής πιθανότητας.

6. Αξιοποίηση της τεχνολογίας στη διδακτική διαχείριση.

Στο συμπληρωματικό υλικό του βιβλίου έχουμε δημιουργήσει ένα μεγάλο πλήθος ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων. Παραθέτουμε επι πλέον πρόσθετο υλικό για την οργάνωση της διδακτικής διαχείρισης και της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών/τριών:

ΑΡΙΘΜΟΙ και ΑΛΓΕΒΡΑ[2]

- Διαιρετότητα

http://www.shodor.org/interactivate/activities/SlopeSlider/ (διαιρέτες-παράγοντες)
https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Arithmetic/Eratosthenes.shtml
(κόσκινο του Ερατοσθένη)
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_202_g_3_t_1.html
(Ανάλυση πρώτων παραγόντων με δεντροδιάγραμμα)

- Θεσιακά συστήματα αρίθμησης (ΑΓ)

http://nrich.maths.org/problems/alien-counting
https://www.cut-the-knot.org/do_you_know/BinaryHistory.shtml

- Πραγματικοί αριθμοί (ΑΓ)

http://nrich.maths.org/articles/history-negative-numbers (ιστορία των αρνητικών αριθμών)
http://nrich.maths.org/problems/weights (άθροισμα θετικών - αρνητικών)
https://www.cut-the-knot.org/do_you_know/SqRtOf2.shtml (διαγώνιος τετραγώνου με πλευρά μονάδα)
https://apod.nasa.gov/htmltest/gifcity/sqrt2.10mil (τα 10 πρώτα εκατομμύρια ψηφία του $\sqrt{2}$)

- Ισότητα – Ανισότητα

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_324_g_3_t_2.html (εξίσωση α΄βαθμού)
https://nrich.maths.org/problems/good-work-if-you-can-get-it (εξίσωση α΄βαθμού)
https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/WProblem2Eq.shtml (συστήματα)
https://nrich.maths.org/problems/which-bigger (ανίσωση)
https://nrich.maths.org/problems/which-cheaper (ανίσωση)

ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΕΣ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_328_g_3_t_2.html?open=activities&from=category_g_3_t_2.html (αριθμητικές-γεωμετρικές κανονικότητες)
http://www.shodor.org/interactivate/activities/SlopeSlider/
http://nrich.maths.org/6539 (ο ρόλος των α, β στην y=αx+β)

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_189_g_3_t_2.html?open=activities&from=category_g_3_t_2.html (πολλαπλασιασμός με πλακίδια)
http://nrich.maths.org/problems/your-number (σκέψου έναν αριθμό)
https://nrich.maths.org/problems/diagonal-sums (δημιουργία παραστάσεων και αναγωγές ομοίων όρων)

---

[2] ΙΕΠ (2011). Νέο σχολείο-Οδηγός εκπαιδευτικού.

https://nrich.maths.org/problems/multiplication-square

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

https://museduc.gr/el/?page=2&sub=124b

https://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=6676&part=index

http://www.shodor.org/interactivate/activities/SurfaceAreaAndVolume/

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_275_g_4_t_4.html?from=category_g_4_t_4.html

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

https://www.fi.uu.nl/toepassingen/00072/toepassing_wisweb.en.html

https://app.dwo.nl/wisweb/?header=less&hash=#s:603082

http://nlvm.usu.edu/en/nav/category_g_3_t_5.html

https://european-union.europa.eu/principles-countries-history/eu-countries/netherlands_el

(Στοιχεία Πληθυσμών Ευρωπαϊκής Ένωσης)

https://new.censusatschool.org.nz/

https://www.censusatschool.org.uk/

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

https://nrich.maths.org/problems/interactive-spinners

https://www.random.org/coins/

https://www.random.org/dice/

https://museduc.gr/el/?page=2&sub=124b

Βιβλιογραφία:

Andrews, P., Ryve, A., Hemmi, K., & Sayers, J. (2014). PISA, TIMSS and Finnish mathematics teaching: An enigma in search of an explanation. *Educational Studies in Mathematics, 87*(1), 7–26.

Bakker, A., & Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1), 37-59.

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, D. A. (2020). *Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II): A framework for statistics and data science education.* American Statistical Association.

Black, P., & Wiliam, D. (2010). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan, 80*(2).

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations*, Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques.* Grenoble: La pensée Sauvage.

Burton, L., & Morgan, C. (2000). Mathematicians writing. Journal for Research in Mathematics Education, 31, 429–453.

Clarke, D. J., & Mesiti, C. (2013). Writing the student into the task: Agency and Voice. In A. Watson, M. Ohtani, J. Ainley, J. Bolite Frant, M. Doorman, C. Kieran, A. Leung, C. Margolinas, P. Sullivan, D. Thompson, & Y. Yang (Eds.). Proceedings of ICMI Study 22: Task Design in Mathematics Education, (pp. 175–184). Oxford: International Commission on Mathematics Instruction

Dorier, J. L., & Maass, K. (2020). Inquiry-based mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 384–388). Springer.

Gaise report (2005). *Board of Directors for Endorsement.* American Statistical Association. USA.

Giannakoulias, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' Thinking about Fundamental Real Numbers Properties. In Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 416-425). Cyprus: ERME, Department of Education, University of Cyprus.

Fujita, T. & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing, Research in Mathematics Education, 9(1&2), 3-20.

González, G., & Eli, J. A. (2017). Prospective and in-service teachers' perspectives about launching a problem. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(2), 159-201.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and Its Applications*, 7.

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 115–139.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Information Age Publishing.

Kosyvas, G., & Glinou, A. (2023). Collaborative learning and problem-solving practices in the instruction of mathematics in secondary education. In G. Kosyvas (Ed.), *The Connect Approach Handbook: A Handbook on the implementation of the Flipped Classroom Approach in Secondary Education (Gymnasium) in the context of Mathematics, Physics and Foreign Language* (pp. 30–35). Athens: Regional Directorate for Primary and Secondary Education of Attica (e-book).

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1998). *Πώς να το λύσω.* Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340.

Tam, M. (2000). Constructivism, instructional design, and technology: Implications for transforming distance learning. *Educational Technology & Society, 3*(2), 50-60.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2018). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (10th ed.). Pearson.

Verikios, P., & Farmaki, V. (2010). From equation to inequality using a function-based approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(4), 515–530.

Vygotsky, L. (1988). *Σκέψη και γλώσσα.* Αθήνα, Εκδ.Γνώση.

Yasnitsky, A. (2018). Vygotsky: An Intellectual Biography. London and New York: Routledge

Βερύκιος Π., Φαρμάκη Β. (2005): «*Μετάβαση από την εξίσωση στην ανίσωση μέσω αναπαραστάσεων της συνάρτησης*». 1ο συνέδριο ΕνΕΔιΜ με θέμα: «Η Διδακτική των Μαθηματικών ως Πεδίο Έρευνας στην Κοινωνία τα Γνώσης», Αθήνα.

Βερύκιος, Π. (2006). «*Συζήτηση με Ολόκληρη την Τάξη: μια σημαντική διάσταση για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών*». *Πρακτικά του 23ου Συνεδρίου της ΕΜΕ, Πάτρα.*

ΙΕΠ (2011). *Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*. ΙΕΠ/ ΕΣΠΑ 2007-13\ Ε.Π. Ε& ΔΒΜ\Α.Π. 1-2-3 «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη».

Κολέζα, Ε. (2003). Νοητικές διεργασίες ανάπτυξης γεωμετρικών εννοιών. *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.*

Κολιάδης, Ε. (1997), Θεωρίες μάθησης και εκπαιδευτική πράξη. Κοινωνικογνωστικές θεωρίες . Αθήνα. Αυτοέκδοση.

Κόμης. Β (2004). *Εισαγωγή στις εκπαιδευτικές εφαρμογές των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών.* Εκδ. Νέες τεχνολογίες.

Κόσυβας, Γ. (2023). Η «παιδαγωγική της ενσυναίσθησης» στο «Διαδικτυακό Σχολείο» της Περιφερειακής Διεύθυνσης Εκπαίδευσης Αττικής. *Preschool and Primary Education, 11*(2), 207–237.

Μπαραλός, Γ. (2001). Η τυπική απόδειξη ισχύει πάντοτε. *Πρακτικά - Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, 18*, 340-352.

Μπαραλός, Γ. (2007). Το λάθος ως στοιχείο σχεδιασμού της διδασκαλίας στα μαθηματικά. Στο *Τα λάθη των μαθητών: Δείκτες Αποτελεσματικότητας ή Κλειδιά για τη Βελτίωση της Ποιότητας της Εκπαίδευσης* (σσ. 345-354).

Πόταρη, Δ., Ζωιτσάκος, Σ., Καμπούκος, Κ., Κόσυβας, Γ., Λουλάκης, Μ., Μεταξάς, Ν., & Τριανταφύλλου, Χ. (2022). *Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Γυμνασίου* (2η έκδοση). Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Τζεκάκη, Μ., Μπαραλός, Γ., Σταγιόπουλος, Π.(2011). *Προσαρμογές αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο: Σχέδια διδασκαλίας για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (Τεύχος Α ΄ και Τεύχος Β΄).

ΠΡΟΤΑΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΔΙΑΒΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ			
ΑΛΓΕΒΡΑ			
Κεφάλαιο 1			
ΕΝΟΤΗΤΑ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	ΕΠΑΝΑΛ.	2, 3, 4, 6, 8, 9
1.1	1, 2, 3, 4, 5	**Κεφάλαιο 2**	
1.2	1, 3, 2, 7, 4, 6	ΕΝΟΤΗΤΑ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ
1.3.1	1, 3, 6, 2, 8, 9	2.1-2.5	1, 2, 5, 6, 7,10,8,12
1.3.3	4, 1, 2, 3, 5, 8	ΕΠΑΝΑΛ.	1, 3, 4, 6, 7, 8
1.3.4	1, 2, 3, 9, 7, 8	**Κεφάλαιο 3**	
1.4	1, 2, 3, 4, 5, 6	ΕΝΟΤΗΤΑ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΕΠΑΝΑΛ.	3, 4, 13, 17, 11,14	3.1-3.3	1, 2, 3, 4, 5, 8
Κεφάλαιο 2		ΕΠΑΝΑΛ.	1, 2, 3, 4, 5, 6
ΕΝΟΤΗΤΑ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	**Κεφάλαιο 4**	
2.1	1, 2, 3, 4, 5	ΕΝΟΤΗΤΑ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ
2.2	1, 2, 5, 3, 4, 10	4.1-4.5	2, 1, 4, 6, 7, 9, 5
2.3	1, 2, 3, 4, 5, 6	ΕΠΑΝΑΛ.	2, 1, 3, 4, 5, 6
2.4	1, 2, 4, 5, 3, 6	**Κεφάλαιο 5**	
2.5	5, 2, 1, 4, 3	ΕΝΟΤΗΤΑ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΕΠΑΝΑΛ.	1, 2, 7, 9, 4, 11	5.1-5.6	1, 2, 3, 5, 7, 8
Κεφάλαιο 3		ΕΠΑΝΑΛ.	1, 3, 4, 2, 6, 7
ΕΝΟΤΗΤΑ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	**Κεφάλαιο 6**	
3.1	2, 4, 1, 5, 6, 8	ΕΝΟΤΗΤΑ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ
3.2	1, 2, 6, 8, 10, 11	6.1-6.4	1, 2, 3, 4, 5, 6
3.3.2	1, 2, 3, 6, 7, 8	6.5-6.7	1, 2, 3, 4
3.3.4	3, 1, 2, 4, 5, 10	ΕΠΑΝΑΛ.	2, 1, 3, 4, 5, 6
3.3.5	1, 2, 3, 4, 5, 6	**Κεφάλαιο 7**	
3.4	3, 1, 2	ΕΝΟΤΗΤΑ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ
3.4.2	1, 2, 3	7.1	2, 4, 5, 1, 3, 6
3.4.3	2, 1, 11, 7, 8, 9	7.2	1, 2, 4, 6, 7, 8
ΕΠΑΝΑΛ.	1, 3, 2, 5, 6, 8	ΕΠΑΝΑΛ.	3, 4, 5, 1, 2, 6
Κεφάλαιο 4		ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	
ΕΝΟΤΗΤΑ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	**Κεφάλαιο 1**	
4.1	1, 2, 3, 4, 5	ΕΝΟΤΗΤΑ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ
4.2	3, 2, 1, 6, 5, 4	1.1	2, 5, 1, 6, 7, 9
ΕΠΑΝΑΛ.	2, 1, 3, 4, 6, 7	1.2	2, 3, 1, 6, 8, 9
Κεφάλαιο 5		1.3	1, 2, 3, 6, 7, 8
ΕΝΟΤΗΤΑ	1.4	1.4	1, 2, 4, 6, 7, 8
5.1	1, 2, 3, 6, 8, 7	**Κεφάλαιο 2**	
5.2	1, 2, 5, 6, 8, 15	ΕΝΟΤΗΤΑ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ
5.3	1, 8, 4, 11, 12, 16	2.1	1, 3, 4, 6, 8, 10
ΕΠΑΝΑΛ.	1, 2, 3, 4, 8, 9	2.2	1, 2, 5, 9, 11, 12,15
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ			
Κεφάλαιο 1			
ΕΝΟΤΗΤΑ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ		
1.1	1, 3, 5, 7, 8, 9		
1.2	8, 2, 3, 5, 6, 4		
1.3	2, 3, 8, 5, 4, 6		
1.4	1, 2, 3, 4, 5, 6		