

Διδακτική διαχείριση και μαθηματική δραστηριότητα

Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

Για μια επιτυχημένη διδακτική διαχείριση του νέου προγράμματος σπουδών (ΠΣ) είναι απαραίτητη η γνώση των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων (ΠΜΑ) κάθε μαθηματικής ενότητας, καθώς και ο σχεδιασμός της διδασκαλίας σύμφωνα με τις θεωρητικές παραδοχές του νέου ΠΣ. Στην κατεύθυνση αυτή, οι ενδεικτικές προτάσεις διδακτικής διαχείρισης που συνοδεύουν το βιβλίο Μαθηματικών και τα Ψηφιακά Μαθησιακά Αντικείμενα (ΨΜΑ) στοχεύουν στη συνοπτική παρουσίαση παραδειγμάτων δημιουργίας ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που προάγει την κριτική σκέψη, την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών, την επίλυση προβλημάτων και τη μαθηματική συζήτηση στην τάξη.

Παρακάτω παρουσιάζονται συνοπτικά τα βασικά σημεία.

1. **Θεωρητικά μοντέλα για τη διαχείριση της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών.**
2. **Καινοτομίες του νέου ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου.**
3. **Αρχές διδακτικής προσέγγισης του εγχειριδίου.**
4. **Μαθηματική δραστηριότητα και διαχείριση έργων.**
5. **Ενδεικτικά παραδείγματα πρακτικής εφαρμογής.**
6. **Συμπερασματικοί στοχασμοί για τη διδασκαλία των Μαθηματικών.**

1. Θεωρητικά μοντέλα για τη διαχείριση της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στηρίζεται σε δύο βασικά διδακτικά μοντέλα που αντικατοπτρίζουν διαφορετικές θεωρητικές προσεγγίσεις μάθησης. Το παραδοσιακό μοντέλο, επηρεασμένο από τις συμπεριφοριστικές θεωρίες, θεωρεί τη μάθηση ως μια διαδικασία μεταφοράς πληροφορίας από τον εκπαιδευτικό¹ στους μαθητές. Στο μοντέλο αυτό η γνώση αντιπροσωπεύει ένα σύνολο δεδομένων, γεγονότων και δεξιοτήτων που προκαλούν μετρήσιμες και παρατηρήσιμες αλλαγές στη συμπεριφορά. Σε αυτό το πλαίσιο, δίνεται έμφαση στην εξάσκηση και την απομνημόνευση, ενώ τα λάθη θεωρούνται ως ένδειξη ανεπαρκούς κατανόησης, που πρέπει να διορθωθούν με επιπλέον προσπάθεια. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι κυρίως να μεταδίδει τη γνώση που κατέχει, ενώ οι μαθητές παραλαμβάνουν τις πληροφορίες με πιο παθητικό τρόπο.

Αντίθετα, το σύγχρονο μοντέλο, βασισμένο στις θεωρίες οικοδόμησης της γνώσης, αντιμετωπίζει τη μάθηση ως μια δυναμική και ενεργητική διαδικασία, όπου οι μαθητές οικοδομούν τη δική τους κατανόηση μέσω συνεργασίας, βιωματικών εμπειριών και διερεύνησης προβλημάτων. Στο μοντέλο αυτό, τα λάθη δεν θεωρούνται ως αποτυχίες, αλλά ως πολύτιμες ευκαιρίες για αναστοχασμό και εννοιολογική αλλαγή (Μπαράλος, 2007).

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού μετασχηματίζεται σε αυτόν του διευκολυντή (facilitator) δημιουργώντας τα κατάλληλα περιβάλλοντα μάθησης που στηρίζονται στην έννοια της Ζώνης Επικείμενης Ανάπτυξης (Vygotsky, 1988, 1997). Η Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (ΖΕΑ) αναφέρεται στο εύρος μεταξύ αυτού που ο μαθητής μπορεί να επιτύχει μόνος του και αυτού που μπορεί να επιτύχει με την κατάλληλη καθοδήγηση. Μέσα σε αυτή τη ζώνη, ο εκπαιδευτικός ή ένας συνομήλικος παρέχει διαμεσολαβητική βοήθεια (scaffolding) που επιτρέπει στον μαθητή να γεφυρώσει το χάσμα και να επεκτείνει τις δυνατότητές του. Η σωστή επικοινωνία, η χρήση της γλώσσας, η ανατροφοδότηση και η νοητική σκαλωσιά είναι ουσιαστικά εργαλεία για την ενίσχυση της μαθησιακής διαδικασίας.

¹ Το γραμματικό αρσενικό γένος «ο εκπαιδευτικός», «ο μαθητής» κ.ά. χρησιμοποιείται στο βιβλίο αυτό με συμπεριληπτικό τρόπο, δηλαδή εννοούμε «ο και η εκπαιδευτικός», «ο μαθητής και η μαθήτρια» κ.ά. Ομοίως σε όλες τις ανάλογες περιπτώσεις.

Οι βασικές αρχές των θεωριών οικοδόμησης της μάθησης συνοψίζονται ως εξής:

- Η γνώση οικοδομείται πάνω στη βάση της προηγούμενης εμπειρίας, μέσω συγκρίσεων και δημιουργίας συνδέσεων.
- Οι μαθητές κατακτούν τη γνώση ενεργά, συμμετέχοντας σε διερευνήσεις και μαθηματικές δραστηριότητες με τη διαμεσολάβηση των εκπαιδευτικών.
- Τα λάθη δεν είναι αποτυχημένες απαντήσεις αλλά δείκτες των δυσκολιών και ευκαιρίες για ανατροφοδότηση.
- Η διαδικασία της μάθησης είναι εξίσου σημαντική με το τελικό προϊόν.
- Η μάθηση διευκολύνεται σε συνεργατικά περιβάλλοντα, όπου η χρήση χειραπτικών υλικών, προσομοιώσεων και νέων τεχνολογιών ενισχύει την κατανόηση.
- Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να λειτουργεί ως διευκολυντής και ερευνητής, δημιουργώντας ευκαιρίες για τους μαθητές να γίνουν ενεργοί συμμετέχοντες στη διαδικασία της μάθησης.

Συνοπτικά, σε σχέση με το παραδοσιακό μοντέλο που μεταδίδει γνώση ως στατικό σύνολο πληροφοριών, το σύγχρονο μοντέλο τονίζει τη σχετικότητα της μάθησης ως μια διαδικασία συνεχούς αναδόμησης και αλληλεπίδρασης. Μέσα από την κατανόηση της Ζώνης Επικείμενης Ανάπτυξης, οι μαθητές αναπτύσσουν ουσιαστικές συνδέσεις μεταξύ της προηγούμενης και της νέας γνώσης, εμπλουτίζοντας τη μαθηματική εμπειρία τους και διευρύνοντας τους ορίζοντές τους μέσω της ενεργητικής συμμετοχής και της συνεργασίας.

Στο πλαίσιο του σύγχρονου διδακτικού μοντέλου, η **Θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων** του Brousseau (1998) προσφέρει ένα δομημένο πλαίσιο για την οργάνωση της μαθησιακής διαδικασίας, το οποίο εστιάζει στην ενεργό συμμετοχή των μαθητών και στη διαμόρφωση ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που υποστηρίζει τη διερεύνηση και τη μαθηματική δραστηριότητα. Η διδακτική διαχείριση χωρίζεται στις ακόλουθες τέσσερις φάσεις:

- **Διερευνητική φάση (δράση μαθητών):** Ο εκπαιδευτικός οργανώνει ένα μαθησιακό περιβάλλον που προάγει την αυτονομία των μαθητών, ενθαρρύνοντάς τους να εξερευνήσουν ένα πρόβλημα ή να μοντελοποιήσουν μια μαθηματική κατάσταση. Σε αυτή τη φάση, οι μαθητές εμπλέκονται σε πειραματισμό και ανακαλύπτουν σχέσεις μέσα από τη δική τους δράση, χωρίς άμεση καθοδήγηση.
- **Φάση διατύπωσης:** Οι μαθητές συγκρίνουν και συζητούν τις παρατηρήσεις τους, προσπαθώντας να επικοινωνήσουν και να αναπτύξουν κοινά νοήματα. Ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει τη διαδικασία αυτή, ενθαρρύνοντας τη γλωσσική διατύπωση των ευρημάτων τους και διασφαλίζοντας την ανταλλαγή επιχειρημάτων μέσα από μαθηματικό διάλογο.
- **Φάση εγκυροποίησης:** Σε αυτή τη φάση, ο εκπαιδευτικός συντονίζει τη συζήτηση και παρεμβαίνει ώστε να ενισχύσει τη σαφήνεια, τη δομή και την ακριβή χρήση των μαθηματικών εννοιών. Οι μαθητές καλούνται να επαληθεύσουν ή να διαψεύσουν υποθέσεις, αναπτύσσοντας την ικανότητα μαθηματικής επιχειρηματολογίας και διαμορφώνοντας μια θεωρία σε εξέλιξη.
- **Φάση θεσμοποίησης:** Ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές να διατυπώσουν τα αποτελέσματά τους χρησιμοποιώντας επίσημη μαθηματική γλώσσα, συνδέοντας τα ευρήματά τους με ορισμούς, θεωρήματα και γενικές αρχές. Αυτή η διαδικασία είναι κρίσιμη για τη μετατροπή της προσωρινής γνώσης των μαθητών σε τυπική μαθηματική γνώση, που εντάσσεται στη δομή του Προγράμματος Σπουδών. Η θεσμοποίηση πρέπει να γίνεται την κατάλληλη στιγμή: πρόωρη θεσμοποίηση μπορεί να εμποδίσει τη μαθησιακή διερεύνηση, ενώ καθυστερημένη θεσμοποίηση μπορεί να ενισχύσει παρανοήσεις.

Για την επιτυχία της παιδαγωγικής και διδακτικής διαχείρισης δίνεται βαρύνουσα σημασία:

- **Στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών**, που πρέπει να συμμετέχουν ουσιαστικά στη μαθηματική δραστηριότητα και όχι απλώς στη διεκπεραίωση των εργασιών.

- **Στον συντονισμό του διαλόγου και της συζήτησης**, ώστε να ενισχύεται η μαθηματική επιχειρηματολογία και η ανάπτυξη κριτικής σκέψης.
- **Στη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και ψηφιακών εργαλείων**, που διευκολύνουν την κατανόηση αφηρημένων εννοιών και ενισχύουν τη σύνδεση μεταξύ των μαθηματικών εννοιών.

Το σύγχρονο διδακτικό μοντέλο, σε συνδυασμό με τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων του Brousseau, διαμορφώνει ένα περιβάλλον, στο οποίο η μάθηση προκύπτει μέσα από τη διερεύνηση, τον διάλογο και την εγκυροποίηση της γνώσης. Ο εκπαιδευτικός δεν μεταδίδει απλώς πληροφορίες, αλλά οργανώνει τη μαθησιακή διαδικασία, καθοδηγώντας τους μαθητές και τις μαθήτριες να οικοδομήσουν τη γνώση μέσα από εμπειρίες και ενεργή συμμετοχή.

2. Οι καινοτομίες του νέου ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου

Τα Μαθηματικά, ως θεμελιώδες επίτευγμα του ανθρώπινου πολιτισμού, κατέχουν κεντρική θέση στα Προγράμματα Σπουδών λόγω της δυναμικής τους να περιγράφουν, να αναλύουν και να ερμηνεύουν τον κόσμο, ενώ παράλληλα καλλιεργούν τη λογική και αναλυτική σκέψη. Μέσα από τη μελέτη δομών και σχέσεων, προάγουν έναν συνεκτικό τρόπο συλλογισμού, ενισχύοντας τη λογική και τη δημιουργικότητα. Στο παρόν ΠΣ, τα Μαθηματικά προσεγγίζονται ως ανθρώπινο δημιούργημα που συμβάλλει ουσιαστικά στην ατομική ανάπτυξη και την κοινωνική πρόοδο.

Το νέο ΠΣ Μαθηματικών του Γυμνασίου έχει ως αφετηρία τα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ), τα οποία εξειδικεύουν τους γενικούς στόχους ορίζοντας όλα όσα χρειάζεται να γνωρίζει ο μαθητής, να κατανοεί και να μπορεί να εφαρμόσει μετά την ολοκλήρωση της μαθησιακής διαδικασίας και οργανώνεται σε τρία θεματικά πεδία: Αριθμοί και Άλγεβρα, Γεωμετρία και Στοχαστικά Μαθηματικά. Θεμέλιο της διαδικασίας της μάθησης είναι η βαθιά γνώση των «Μεγάλων Ιδεών» του μαθηματικού περιεχομένου από τον εκπαιδευτικό, η οποία του επιτρέπει να μετασχηματίζει την επιστημονική γνώση σε σχολική γνώση, προσαρμοσμένη στις ανάγκες των μαθητών. Ωστόσο, οι καινοτομίες του ΠΣ δεν περιορίζονται στο περιεχόμενο (Sakonidis, et al., 2022). Εισάγονται νέες μαθηματικές διεργασίες και κοινωνικο-πολιτισμικές και κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές, οι οποίες συγκεκριμενοποιούν τους στόχους του ΠΣ και καθιστούν δυνατή την αξιολόγησή τους μέσα από την καθημερινή διδακτική πράξη. Στο πλαίσιο αυτό, ο εκπαιδευτικός επιλέγει μαθηματικά έργα και εφαρμόζει κατάλληλες μαθηματικές πρακτικές, που προάγουν αυθεντικές μαθηματικές δραστηριότητες.

Τα τρία θεματικά πεδία του ΠΣ **Αριθμοί-Άλγεβρα, Γεωμετρία και Στοχαστικά Μαθηματικά**, περιλαμβάνουν θεμελιώδεις πτυχές της μαθηματικής σκέψης και εφαρμογής, αναδεικνύοντας τη σημασία της κατανόησης δομών, σχέσεων και της ανάλυσης δεδομένων, ενώ συνδέουν τη μαθηματική γνώση με πραγματικές καταστάσεις (Καραβασιλής & Κόσσυβας, 2016). Κάθε πεδίο προσφέρει ευκαιρίες για την ανάπτυξη δεξιοτήτων, την καλλιέργεια του μαθηματικού συλλογισμού και τη δημιουργία κατάλληλων εργαλείων και πρακτικών που ανταποκρίνονται στις ανάγκες κάθε μαθητικής ομάδας. **Ειδικότερα:**

1ο Θεματικό πεδίο: Αριθμοί και Άλγεβρα: Το θεματικό πεδίο «Αριθμοί και Άλγεβρα» επικεντρώνεται στη μελέτη των αριθμών, των σχέσεών τους, της αλγεβρικής σκέψης και των συναρτήσεων, όπως έχει μελετηθεί σε ερευνητικές εργασίες (Kieran, 2007). Στον τομέα της Άλγεβρας, δίνεται έμφαση στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης μέσα από τη διερεύνηση μεταβλητών, κανονικοτήτων και εξισώσεων, καθώς και στην έννοια της συμμεταβολής (Kafetzopoulos & Psycharis, 2022), η οποία συνδέεται με τη συνάρτηση και τις πολλαπλές αναπαραστάσεις της (πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση. Παράλληλα, στο νέο ΠΣ απομακρύνονται πολύπλοκοι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί, ώστε να δοθεί έμφαση στη μαθηματική σκέψη και στην ανάπτυξη ουσιαστικών εννοιολογικών εργαλείων (Βερύκιος, 2011).

2ο Θεματικό πεδίο: Γεωμετρία και Μέτρηση: Η Γεωμετρία στο Γυμνάσιο ενισχύει τη χωρική αντίληψη (Battista, 2007; Κολέζα, 2003) και τη μετάβαση από εμπειρικές σε πιο αφαιρετικές προσεγγίσεις. Οι μαθητές μαθαίνουν να κατασκευάζουν σχήματα, να υπολογίζουν εμβαδά και περιμέτρους να θέτουν και να ελέγχουν

εικασίες, να ανακαλύπτουν ιδιότητες μέσω λογισμικών και να αναπτύσσουν λογική σκέψη, επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση. Η μελέτη αυτών των εννοιών έχει απασχολήσει ερευνητές, όπως οι Hollebrands (2003) και Κόσσυβας & Τσίτσος (2024), χωρίς όμως η έρευνά τους να συνδέεται άμεσα με την επεξεργασία του Προγράμματος Σπουδών. Αντίστοιχα, η έμφαση στη λογική δομή της απόδειξης απαντάται και στη βιβλιογραφία (Μπαραλός, 2001).

3ο Θεματικό πεδίο: Στοχαστικά Μαθηματικά: Ο βασικός σκοπός της διδασκαλίας της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να αξιολογούν κριτικά πληροφορίες, να εξαγάγουν συμπεράσματα, να κάνουν προβλέψεις και να λαμβάνουν αποφάσεις υπό αβέβαιες συνθήκες. Τα Στοχαστικά Μαθηματικά ξεχωρίζουν από άλλες μαθηματικές περιοχές, καθώς εστιάζουν στη μελέτη προβλημάτων που σχετίζονται με τη μεταβλητότητα και τη διαφορετικότητα των δεδομένων στον κόσμο γύρω μας (Bakogianni, 2019). Το εν λόγω πεδίο εισάγει τους μαθητές στην κριτική αξιολόγηση δεδομένων και την ανάλυση της τυχαιότητας. Στη Στατιστική, οι μαθητές μελετούν συνεχή δεδομένα, κατασκευάζουν χρονοδιαγράμματα και θηκογράμματα, διερευνούν τις ιδιότητες της μέσης τιμής, εξοικειώνονται με μέτρα θέσης και μεταβλητότητας και κρίνουν τη χρήση των στατιστικών διαγραμμάτων. Στις Πιθανότητες, εξετάζουν ευνοϊκές και δυνατές εκβάσεις ενός πειράματος τύχης και τις εφαρμόζουν σε μαθηματικά έργα που απαιτούν τη Βασική Αρχή της Απαρίθμησης, μαθαίνουν τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα και τον απλό προσθετικό νόμο, δίνοντας έμφαση στη στοχαστική διερεύνηση μέσω ψηφιακών μέσων (ΙΕΠ, 2023). Το πεδίο καλλιεργεί δεξιότητες λήψης αποφάσεων και αξιολόγησης πληροφοριών, συνδέοντας τα Μαθηματικά με την καθημερινή ζωή (Bargagliotti et al., 2020).

Μεγάλες Ιδέες του νέου ΠΣ και σύνδεση των εννοιών. Οι «Μεγάλες Ιδέες» λειτουργούν ως θεμελιώδεις άξονες που ενοποιούν διαφορετικά πεδία της μαθηματικής επιστήμης, αποτελούν τον πυρήνα της μαθηματικής σκέψης ενισχύοντας τη συνολική κατανόηση. Περιλαμβάνονται μεταξύ άλλων οι ακόλουθοι θεματικοί πυλώνες (Πόταρη κ.ά., 2022):

- **Μαθηματική Δομή:** Ενοποίηση αριθμητικών και αλγεβρικών εννοιών, προάγοντας τη συνδυαστική μαθηματική σκέψη.
- **Γενίκευση και Απόδειξη:** Εμβάθυνση στη μαθηματική λογική μέσω της κατανόησης γενικών προτύπων και αποδεικτικών διαδικασιών.
- **Μεταβολή:** Μελέτη μετασχηματισμών και συναρτήσεων, που αναδεικνύει τη δυναμική φύση των μαθηματικών.
- **Ισοδυναμία:** Κατανόηση σχέσεων ισοδυναμίας και συμμετρίας, ενισχύοντας τη μαθηματική δομή και οργάνωση.

Αυτές οι ιδέες ενοποιούν διαφορετικές μαθηματικές έννοιες σε ένα συνεκτικό πλαίσιο, βοηθώντας τους μαθητές να αναγνωρίσουν συνδέσεις μεταξύ αναπαραστάσεων, όπως αριθμητικές σχέσεις, γεωμετρικά σχήματα και αλγεβρικές παραστάσεις.

Επιπλέον, ενθαρρύνεται η κατανόηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ μαθηματικών ενοτήτων, όπως η σύνδεση Γεωμετρίας και Άλγεβρας, που προωθεί την εφαρμογή της γνώσης σε διαφορετικά πλαίσια. Η δομή της ύλης είναι μεθοδικά σχεδιασμένη, ώστε να καθοδηγεί τους μαθητές από θεμελιώδεις έννοιες σε πιο σύνθετες εφαρμογές. Με αυτόν τον τρόπο, προσφέρει τα απαραίτητα εφόδια για την ανάπτυξη βαθιάς μαθηματικής σκέψης, δημιουργώντας τις βάσεις για μια ολοκληρωμένη μαθηματική εκπαίδευση.

Μαθηματικές πρακτικές, κοινωνικο-πολιτισμικές και κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές.

Το νέο ΠΣ αποσκοπεί στην ενεργητική εμπλοκή των μαθητών σε κρίσιμες διεργασίες κατανόησης και ανάπτυξης μαθηματικής γνώσης, οι οποίες χωρίζονται σε μαθηματικές και κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές (Πόταρη κ.ά., 2022). Οι **μαθηματικές πρακτικές ή διεργασίες** περιλαμβάνουν δεξιότητες όπως η δημιουργία συνδέσεων, ο συλλογισμός, η μαθηματική επικοινωνία, η οπτικοποίηση, η επιλογή εργαλείων, η επίλυση προβλημάτων, η μοντελοποίηση και η μεταγνωστική ενημερότητα. Αυτές οι δεξιότητες προάγουν τη σύνδεση μαθηματικών

εννοιών με την καθημερινότητα, την κριτική σκέψη και την κατανόηση πολύπλοκων καταστάσεων. Παράλληλα, οι **κοινωνικο-πολιτισμικές και κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές** αποσκοπούν στη χρήση των Μαθηματικών ως εργαλείου ερμηνείας του κόσμου και ανάπτυξης της κριτικής σκέψης, μέσα σε ένα συνεργατικό και υποστηρικτικό περιβάλλον. Δίνεται έμφαση στη μαθηματική ταυτότητα, την αυτοπεποίθηση, την εμπιστοσύνη, τη συνεργασία και την εκτίμηση της αισθητικής και λογικής των Μαθηματικών. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές εμπλέκονται δραστήρια στη μαθησιακή διαδικασία, αναπτύσσοντας θετικά κίνητρα και ουσιαστική μαθηματική κατανόηση που τους εξοπλίζουν με σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες που είναι απαραίτητες για τον πολίτη του 21ου αιώνα.

3. Αρχές διδακτικής προσέγγισης του εγχειριδίου

Καθοριστικά στοιχεία για τη διδακτική διαχείριση είναι:

- Η έμφαση που πρέπει να δίνει ο/η εκπαιδευτικός στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών, στη μαθηματική δραστηριότητα και μάθηση και όχι απλά στη διεκπεραίωση του έργου.
- Η δυνατότητα του/της εκπαιδευτικού να υποστηρίζει και να συντονίζει τον διάλογο και τη συζήτηση μέσα στην τάξη (Clarke & Mesiti, 2013).

Ένα καλά σχεδιασμένο έργο ενισχύει τη διερεύνηση, τον πειραματισμό και τον αναστοχασμό, ενώ η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και ψηφιακών εργαλείων διευκολύνει την κατανόηση και την επικοινωνία ιδεών.

Οι βασικές γνωστικές, παιδαγωγικές και διδακτικές αρχές οι οποίες αποτελούν τη βάση για τον σχεδιασμό και την υλοποίηση της εκπαιδευτικής διαχείρισης, περιλαμβάνουν τα εξής:

Εστίαση στην εννοιολογική κατανόηση: Το συνολικό διδακτικό πακέτο δίνει έμφαση στη βαθιά κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, η οποία έχει νόημα για τους μαθητές. Βαρύνουσα σημασία έχει η κατανόηση του «γιατί» και του «πώς» και όχι η μηχανική αποστήθιση τύπων και αλγοριθμικών διαδικασιών. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να διερευνήσουν έννοιες, να αναπτύξουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και να συνδέσουν τα Μαθηματικά με πραγματικά σενάρια. Για παράδειγμα, η διδασκαλία της αναλογίας μπορεί να συνδεθεί με πρακτικές εφαρμογές, όπως η διαχείριση χρημάτων και οι υπολογισμοί ποσοστών, ενισχύοντας τη μαθηματική σκέψη και προάγοντας την ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν δημιουργικά τις γνώσεις τους σε πραγματικά πλαίσια και καθημερινές καταστάσεις.

Διερευνητική και ανακαλυπτική μάθηση. Η διερευνητική και ανακαλυπτική μάθηση αποτελεί θεμελιώδη άξονα της μαθησιακής διαδικασίας, εστιάζοντας σε πρακτικές που προάγουν την ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα. Στις διερευνήσεις τους χρησιμοποιούν μαθηματικά εργαλεία (π.χ. χάρακες, αριθμομηχανές), χειρίζονται αντικείμενα και μοντελοποιούν τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες με τη βοήθεια ποικιλίας υλικών. Μέσα από διεργασίες όπως ο συλλογισμός, η επιχειρηματολογία, η μοντελοποίηση και η επίλυση προβλημάτων, καθώς και η χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων, οι μαθητές ενθαρρύνονται να εξερευνήσουν και να ανακαλύψουν μαθηματικά μοτίβα και σχέσεις.

Αυτή η προσέγγιση βασίζεται σε μαθητοκεντρικές πρακτικές που περιλαμβάνουν:

- **Ανακάλυψη μέσω ερωτήσεων:** Οι μαθητές θέτουν ερωτήματα, διατυπώνουν εικασίες, πειραματίζονται και επαληθεύουν τα συμπεράσματά τους.
- **Ομαδική συνεργασία:** Η εργασία σε ομάδες ενισχύει την επικοινωνία, την ανταλλαγή ιδεών και τη συνεργατική επίλυση προβλημάτων.
- **Ευέλικτες προσεγγίσεις:** Οι μαθητές επιλέγουν μεθόδους που ταιριάζουν στις δεξιότητες και τις ανάγκες τους, καλλιεργώντας την ανεξαρτησία στη μάθηση.

Μέσα από ανοιχτού τύπου ερωτήσεις και δραστηριότητες, οι μαθητές καλούνται να υποθέτουν, να πειραματίζονται, να ανακαλύπτουν και να δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών εννοιών (Cai & Leikin, 2020; Brown & Walter, 2005). Η προσέγγιση αυτή ενισχύει τη δημιουργικότητα, τον μαθηματικό συλλογισμό

και την κριτική σκέψη, μετατρέποντας τους μαθητές σε ενεργητικούς συντελεστές της μαθησιακής διαδικασίας (Becker & Shimada, 1997; Arsac & Mante, 2007). Ο εκπαιδευτικός, σε αυτό το πλαίσιο, λειτουργεί ως υποστηρικτής και διευκολυντής, καθοδηγώντας τη μαθησιακή πορεία και ενθαρρύνοντας την ανάπτυξη βαθύτερης κατανόησης. Η διερευνητική μάθηση συμβάλλει στη διαμόρφωση ενός δυναμικού μαθησιακού περιβάλλοντος, όπου οι μαθητές αναπτύσσουν αυτοπεποίθηση και ικανότητες που τους προετοιμάζουν για σύνθετες μαθηματικές και πραγματικές προκλήσεις.

Σύνδεση με την πραγματική ζωή: Ένα από τα σημαντικά χαρακτηριστικά του βιβλίου και του υποστηρικτικού υλικού είναι ότι σε αρκετές περιπτώσεις τα Μαθηματικά συνδέονται με την πραγματική ζωή. Πολλά μαθηματικά έργα και δραστηριότητες βασίζονται σε αυθεντικές καταστάσεις και ρεαλιστικά σενάρια, ενισχύοντας τη μαθησιακή διαδικασία μέσω πρακτικών εφαρμογών (Kosyvas, 2016). Το βιβλίο και το υλικό των ΨΜΑ παρέχουν παραδείγματα εφαρμογών που συνδέουν τις μαθηματικές έννοιες με την καθημερινή ζωή, όπως, η μέτρηση φυσικών μεγεθών, η ανάλυση δεδομένων, η προσομοίωση οικονομικών συναλλαγών και η χρήση Μαθηματικών για την κατανόηση κοινωνικών, περιβαλλοντικών ή επιστημονικών δεδομένων. Μέσα από αυτές τις συνδέσεις, οι μαθητές αποκτούν δεξιότητες που είναι χρήσιμες στην καθημερινότητά τους, ενισχύουν τα κίνητρά τους και αναπτύσσουν θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά.

Συμπερίληψη, διαφοροποίηση και εξατομικευμένη μάθηση: Η συμπερίληψη, η διαφοροποιημένη διδασκαλία και η εξατομικευμένη μάθηση αποτελούν θεμελιώδεις αρχές για την προώθηση της ισότιμης πρόσβασης στη μαθηματική εκπαίδευση. Το διδακτικό βιβλίο Μαθηματικών της Β' Γυμνασίου, σε συνδυασμό με το υλικό των Ψηφιακών Μαθησιακών Αντικειμένων (ΨΜΑ), υποστηρίζει αυτές τις αρχές, παρέχοντας στους εκπαιδευτικούς εργαλεία για την προσαρμογή της διδασκαλίας στις διαφορετικές ανάγκες των μαθητών. Η συμπερίληψη εστιάζει στη δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που προάγει την ισότητα, αναγνωρίζει τη διαφορετικότητα και ενισχύει την αυτοεκτίμηση και την ενσυναίσθηση (Κόσυβας, 2023). Απαιτείται πιο εξειδικευμένος και εξατομικευμένος σχεδιασμός και διαχείριση για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, ώστε να διασφαλιστεί η ενεργή συμμετοχή τους και η ουσιαστική τους ενσωμάτωση στη μαθησιακή διαδικασία (Τζεκάκη, Μπαράδος, Σταγιάπουλος, 2011). Οι εκπαιδευτικοί, με κατάλληλες προσαρμογές στη διδασκαλία, καλλιεργούν δεξιότητες όπως η επίλυση προβλημάτων και η κριτική σκέψη, ενθαρρύνοντας την ενεργητική συμμετοχή και τη συνεργασία (Kosyvas & Glinou, 2023). Με αυτόν τον τρόπο, διαμορφώνεται ένα περιβάλλον μάθησης που στηρίζει την προσωπική εξέλιξη κάθε μαθητή και ενισχύει το ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά.

Χρήση τεχνολογίας στη μάθηση: Η τεχνολογία αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της σύγχρονης μαθησιακής διαδικασίας, ενισχύοντας την κατανόηση σύνθετων εννοιών και την αυτονομία των μαθητών. Τα Ψηφιακά Μαθησιακά Αντικείμενα (ΨΜΑ) της Β' Γυμνασίου προσφέρουν ένα ευέλικτο και εξατομικευμένο περιβάλλον μάθησης, αξιοποιώντας διαδικτυακές πλατφόρμες, διαδραστικές οθόνες, εφαρμογές Μαθηματικών, ηλεκτρονικά φύλλα εργασίας και οπτικοποιήσεις των εννοιών. Η χρήση ψηφιακών εργαλείων λογισμικών (π.χ. GeoGebra, Excel) και προγράμματα μοντελοποίησης παρέχουν στους μαθητές τη δυνατότητα να πειραματιστούν, να δημιουργήσουν προσομοιώσεις και να ερμηνεύσουν δεδομένα. Για παράδειγμα, στις δραστηριότητες Πιθανοτήτων με προσομοιώσεις, οι μαθητές χρησιμοποιούν ψηφιακά εργαλεία για να κατανοήσουν τη στοχαστική φύση των πιθανοτήτων, συνδυάζοντας θεωρία και πράξη. Η τεχνολογία επιτρέπει τη διερεύνηση μαθηματικών φαινομένων, όπως γεωμετρικές σχέσεις ή πειράματα πιθανότητας, σε ελεγχόμενες συνθήκες, ενισχύοντας την ανακαλυπτική μάθηση. Παράλληλα, σύγχρονα εργαλεία αξιολόγησης δίνουν τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να παρακολουθούν την πρόοδο των μαθητών σε πραγματικό χρόνο, καθιστώντας τη διδασκαλία πιο δυναμική και προσαρμοσμένη στις ανάγκες της τάξης. Η ενσωμάτωση αυτών των ψηφιακών μέσων μετατρέπει τη μαθησιακή εμπειρία σε μια ενεργητική, διαδραστική και ουσιαστική διαδικασία (Κυνηγός, 2006). Ενισχύει τη δημιουργική και κριτική σκέψη των μαθητών, ενώ παράλληλα αναβαθμίζει τον ρόλο του εκπαιδευτικού, υποστηρίζοντας μια καινοτόμο και αποτελεσματική διδασκαλία.

Συνεργατική μάθηση: Η συνεργατική μάθηση αποτελεί βασικό στοιχείο της μαθησιακής διαδικασίας, καθώς προάγει την κοινωνική αλληλεπίδραση και ενισχύει τη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Οι

μαθητές συχνά εργάζονται σε ζεύγη ή μικρές ομάδες για να λύσουν προβλήματα. Η συζήτηση με ολόκληρη την τάξη είναι βασικό συστατικό ενός σύγχρονου διδακτικού μοντέλου (Βερούκιος, 2006). Σύμφωνα με τη θεωρία του Vygotsky, η γνώση κατασκευάζεται μέσα από την επικοινωνία και τη συνεργασία (Vygotsky, 1988, 1997). Κατάλληλα μαθηματικά έργα και δραστηριότητες καλούν τους μαθητές να ανταλλάξουν ιδέες, να μοιραστούν διαφορετικές στρατηγικές και να τεκμηριώσουν τις λύσεις τους μέσα σε ένα υποστηρικτικό περιβάλλον. Οι μαθητές εργάζονται σε μικρές ομάδες και καταγίνονται με προβλήματα που απαιτούν συνδυασμό δεξιοτήτων και διαφορετικών προσεγγίσεων, διδάσκοντας και μαθαίνοντας ο ένας από τον άλλον. Μέσα από αυτή τη διαδικασία, ενισχύεται η επικοινωνία, η αιτιολόγηση των απαντήσεων και η ανάπτυξη κοινωνικών δεξιοτήτων (Slavin, 1995; Swan, 2006). Οι δραστηριότητες δημιουργούν ένα μαθησιακό περιβάλλον όπου οι μαθητές αισθάνονται ασφαλείς να πειραματιστούν, να εκφράσουν τις απόψεις τους και να αναπτύξουν την ικανότητα να συνεργάζονται για την επίτευξη κοινών στόχων (Arsac & Mante, 2007; Κόσσυβας, 2014). Η ανταλλαγή διαφορετικών προσεγγίσεων όχι μόνο βελτιώνει την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, αλλά και προάγει την αλληλοϋποστήριξη, καθιστώντας τη μαθησιακή διαδικασία μια εμπειρία πλούσια σε ερεθίσματα και δυνατότητες.

Ανάπτυξη της μαθηματικής επικοινωνίας: Η προφορική και γραπτή έκφραση των μαθηματικών ιδεών αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της γνωστικής ανάπτυξης. Οι ενδεικτικές προτάσεις διδακτικής διαχείρισης προσφέρουν ποικιλία δραστηριοτήτων που προάγουν τη μαθηματική επικοινωνία, όπως:

- Συζητήσεις όπου οι μαθητές εξηγούν τις στρατηγικές τους και αιτιολογούν τις απαντήσεις τους.
- Γραπτές εργασίες που περιλαμβάνουν αναλύσεις προβλημάτων και διατύπωση συμπερασμάτων.
- Παρουσιάσεις και ανταλλαγές ιδεών μεταξύ ομάδων.

Η καλλιέργεια αυτής της δεξιότητας βοηθά τους μαθητές να οργανώσουν τη σκέψη τους και να αναπτύξουν την αυτοπεποίθησή τους (Sfard, 2008).

Σκαλωσιές μάθησης: Ο εκπαιδευτικός έχει τον ρόλο του καθοδηγητή, δημιουργώντας διδακτικές καταστάσεις που προάγουν την ενεργή συμμετοχή των μαθητών στη μαθηματική σκέψη. Μέσω της χρήσης νοητικών σκαλωσιών, παρέχει υποστήριξη με υποδείξεις, καθοδηγητικές ερωτήσεις και κατάλληλα εργαλεία, είτε χειραπτικά είτε ψηφιακά, διευκολύνοντας την οικοδόμηση των μαθηματικών εννοιών. Η καθοδήγηση αυτή μειώνεται σταδιακά, ενθαρρύνοντας την αυτονομία και την ανεξάρτητη σκέψη των μαθητών. Η προσαρμογή της διδασκαλίας στις ατομικές ανάγκες κάθε μαθητή αποτελεί βασικό στοιχείο της μαθησιακής διαδικασίας. Οι εκπαιδευτικοί σχεδιάζουν δραστηριότητες και προκλήσεις που ανταποκρίνονται στα διαφορετικά επίπεδα κατανόησης, επιτρέποντας στους μαθητές να προχωρούν με τον δικό τους ρυθμό. Έτσι, η μάθηση γίνεται πιο ουσιαστική, εξατομικευμένη και αποτελεσματική, καθώς οι μαθητές δεν περιορίζονται σε μια παθητική αποδοχή της γνώσης, αλλά συμμετέχουν ενεργά στην κατασκευή της.

Διαμορφωτική αξιολόγηση: Η διαμορφωτική αξιολόγηση αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλίας, που αποσκοπεί στη συνεχή παρακολούθηση και βελτίωση της μαθησιακής διαδικασίας (Black & Wiliam, 2010). Επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς να εντοπίζουν παρανοήσεις, να προσαρμόζουν τις διδακτικές προσεγγίσεις στις αναπτυξιακές και μαθησιακές ανάγκες των μαθητών και να διαμορφώνουν διαφοροποιημένες δραστηριότητες που ενισχύουν την κατανόηση και τη δημιουργική σκέψη. Μέσω διαγνωστικών εργαλείων, ο εκπαιδευτικός εντοπίζει δυσκολίες και σχεδιάζει στρατηγικές υποστήριξης, διασφαλίζοντας την εξελικτική ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να εφαρμόζουν την αυτοαξιολόγηση και την ετεροαξιολόγηση μέσα από συζητήσεις και συνεργατικές δραστηριότητες, να αναστοχάζονται πάνω στην πρόοδό τους, να αναγνωρίζουν τις δυνατότητές τους και να καλλιεργούν την αυτονομία και την υπευθυνότητά τους στη μάθηση. Οι εκπαιδευτικοί, ως παρατηρητές και καθοδηγητές, παρέχουν ανατροφοδότηση που ενισχύει τη βαθύτερη κατανόηση, ενώ τα λάθη αντιμετωπίζονται ως αφετηρίες διερεύνησης και νέων ερωτημάτων (Μπαράλος, 2007). Η διαδικασία αυτή αποφεύγει την καλλιέργεια άγχους επίδοσης, προσφέροντας στα παιδιά ευκαιρίες επιτυχίας και αναγνώρισης. Μέσω της σύνδεσης θεωρίας και πράξης, η διαμορφωτική αξιολόγηση εστιάζει στη διαδικασία και όχι μόνο στο τελικό αποτέλεσμα, ενισχύοντας την εμπλοκή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία και

μετατρέποντας τη διδασκαλία σε μια δυναμική, εξελισσόμενη εμπειρία που προάγει τη μάθηση και τη δημιουργικότητα.

Με αυτούς τους άξονες, η μαθηματική διδασκαλία αποκτά ευελιξία, δημιουργικότητα και σύνδεση με την πραγματική ζωή, ενισχύοντας τη συμμετοχή των μαθητών και καλλιεργώντας μια ουσιαστική και βαθιά κατανόηση των Μαθηματικών. Ο συνδυασμός εστίασης στη γνώση, υποστήριξης της ανεξαρτησίας και χρήσης καινοτόμων εργαλείων προσφέρει στους μαθητές τις απαραίτητες δεξιότητες για να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του σύγχρονου κόσμου.

4. Μαθηματική δραστηριότητα και διαχείριση έργων

Στο νέο ΠΣ το μαθηματικό έργο αναφέρεται στην εργασία που αναθέτει ο εκπαιδευτικός, όπως είναι μια άσκηση, ένα παιχνίδι ή ένα πρόβλημα, ενώ η μαθηματική δραστηριότητα αφορά τις ενέργειες και τις δράσεις των μαθητών κατά την υλοποίησή του (Τζεκάκη, 2011). Αν και το έργο σχεδιάζεται με συγκεκριμένες προθέσεις, η τελική μορφή του διαμορφώνεται μέσα από τη διαπραγμάτευση μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητών (Πόταρη κ.ά., 2022). Τα μαθηματικά έργα αποσκοπούν τόσο στην ανάπτυξη μαθηματικών γνώσεων και διεργασιών, όπως η οπτικοποίηση και η μοντελοποίηση, όσο και στην καλλιέργεια κοινωνικο-πολιτισμικών πρακτικών, συνδέοντας τα Μαθηματικά με τον πολιτισμό και την καθημερινότητα (Τσίτσος & Σταθοπούλου, 2016).

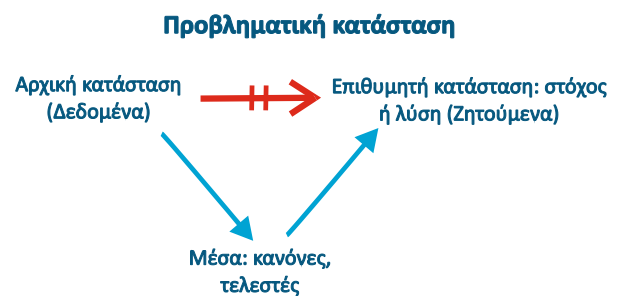
Στο πλαίσιο των μαθηματικών έργων βαρύνουσα σημασία έχουν τα προβλήματα και η λύση τους. Η έννοια του προβλήματος στα Μαθηματικά αναφέρεται σε μια κατάσταση όπου ο μαθητής δεν γνωρίζει εκ των προτέρων τη στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσει για να φτάσει στη λύση. Σύμφωνα με την ετυμολογία της λέξης, πρόβλημα είναι ένα εμπόδιο που προεξέχει και προβάλλεται για λύση. Η υπέρβαση της δυσκολίας οδηγεί στον εμπλουτισμό των γνώσεων και εμπειριών του μαθητή. Σε αντίθεση με μια άσκηση, το πρόβλημα δεν έχει προκαθορισμένη μέθοδο ή αλγόριθμο που οδηγεί με βεβαιότητα στη λύση, απαιτώντας ανάλυση, κριτική σκέψη και δημιουργικότητα.

Η επιλογή και διαχείριση μαθηματικών έργων αποτελεί θεμελιώδη διδακτική πρακτική που ενεργοποιεί τη μαθηματική δραστηριότητα και προάγει τη μάθηση. Τα μαθηματικά έργα, όπως παιχνίδια, ασκήσεις, προσομοιώσεις, προβλήματα ή ερωτήσεις, πρέπει να αντλούν ενδιαφέρον από την καθημερινή ζωή, να επιδέχονται πολλαπλές μεθόδους λύσης και να προωθούν την τεκμηρίωση και τη λογική σκέψη. Η σύνδεση με τις εμπειρίες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών ενισχύει τη συμμετοχή τους και προσφέρει ευκαιρίες αυθεντικής μάθησης.

Ο εκπαιδευτικός, σχεδιάζοντας και προσαρμόζοντας τα μαθηματικά έργα, οφείλει να λαμβάνει υπόψη τις ανάγκες και τις δυνατότητες των μαθητών, διατηρώντας παράλληλα τη μαθηματική πρόκληση. Ένα καλά σχεδιασμένο έργο ενισχύει τη διερεύνηση, τον πειραματισμό, τη μοντελοποίηση και τον αναστοχασμό, ενώ η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και ψηφιακών εργαλείων διευκολύνει την κατανόηση και την επικοινωνία ιδεών (ΙΕΠ, 2023).

Η μαθηματική δραστηριότητα που προκύπτει καλλιεργεί δεξιότητες αναζήτησης ιδιοτήτων και σχέσεων, δημιουργίας συνδέσεων και εμβάθυνσης σε μεγάλες μαθηματικές ιδέες, όπως η απόδειξη, η ισοδυναμία και οι μετασχηματισμοί. Με αυτόν τον τρόπο, προάγεται η αυθεντική μαθηματική σκέψη, ενισχύοντας τη βαθιά κατανόηση και τη μαθηματική αυτοπεποίθηση των μαθητών.

Η διδακτική διαχείριση ενός μαθηματικού έργου (π. χ. προβλήματος) επικεντρώνεται στην ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα και στη δημιουργία ενός πλαισίου διαπραγμάτευσης μέσω διαλόγου. Στη συνέχεια περιγράφονται τα διακριτά στάδια του τριμερούς μοντέλου ανάπτυξης της διαχείρισης (Πόταρη κ.ά., 2022):



α) Κατανόηση του έργου (π. χ. μαθηματικού προβλήματος): Το πρώτο στάδιο δίνει έμφαση στην ερμηνεία και ανάλυση του μαθηματικού έργου. Οι μαθητές διαβάζουν προσεκτικά, εντοπίζουν τα δεδομένα, κατανοούν τα ζητούμενα και απαντούν σε ερωτήσεις όπως: *Τι ζητά το πρόβλημα; Ποια δεδομένα έχουμε; Τι δεν γνωρίζουμε;* Η χρήση διαγραμμάτων και οπτικοποιήσεων βοηθά στη διαμόρφωση μιας σαφούς εικόνας του προβλήματος. Οι μαθητές διερευνούν το πρόβλημα, κάνουν ατομικές δοκιμές και επαληθεύσεις, αρχίζουν τη διερευνητική δράση και σχηματίζουν μια πρώτη παράσταση του προβλήματος. Ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί τους μαθητές στη σύνδεση του έργου με προηγούμενες γνώσεις, προτείνοντας κατάλληλους πόρους, όπως χειραπτικά ή ψηφιακά εργαλεία.

β) Αυτόνομη εργασία (τα ηνία ανήκουν στους μαθητές): Στο δεύτερο στάδιο οι μαθητές εργάζονται ατομικά ή σε μικρές ομάδες, συμμετέχουν ενεργητικά σε μαθηματικές δραστηριότητες στις οποίες προεξάρχουν η δράση και διατύπωση (Brousseau, 1998). Οι μαθητές αναλαμβάνουν την ευθύνη για τη διερεύνηση και την ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης. Δοκιμάζουν διάφορες μεθόδους, όπως η εφαρμογή τύπων, η διάσπαση του προβλήματος ή η χρήση πινάκων και διαγραμμάτων, ενισχύοντας τη δημιουργική και κριτική τους σκέψη (Polya, 1998; Schoenfeld, 1985). Η συνεργασία διευκολύνει την ανταλλαγή ιδεών και την καλλιέργεια συλλογικού συλλογισμού. Κύριο μέλημά του εκπαιδευτικού είναι η δημιουργία κλίματος καλοπροαίρετης συζήτησης στις ομάδες μεταξύ των μαθητών, η ενθάρρυνσή τους για γόνιμη ανταλλαγή σκέψεων πάνω στο πρόβλημα, η παρότρυνσή τους για κοινή διερεύνηση και συναποδοχή νοημάτων (Cobb & Bauersfeld, 1995). Επίσης, ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει έμφαση στον συλλογισμό των μαθητών και στη νοερή επιχειρηματολογία με ερωτήσεις όπως: *«Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον συμμαθητή σας; Γιατί;», «Τι θα γινόταν αν...; Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;», «Η απάντηση που δώσατε έχει νόημα; Είστε σίγουροι ότι η απάντηση που δίνετε είναι σωστή; Πώς το ξέρετε;», «Υπάρχει άλλη απάντηση;», «Υπάρχει άλλος τρόπος να βρούμε τη λύση; Πού διαφέρουν οι διαφορετικές στρατηγικές που ακολουθήσατε;»* κ.λπ. Όταν παρέχει οδηγίες ο εκπαιδευτικός ενδείκνυται να εστιάζει κυρίως στη διαδικασία και όχι στο τελικό προϊόν της μαθηματικής διερεύνησης. Για παράδειγμα, μπορεί να απευθύνει στους μαθητές ερωτήσεις/υποδείξεις όπως: *«Ποια είναι τα στοιχεία-κλειδιά του προβλήματος;», «Τι αλλάζει και τι παραμένει σταθερό; Διατηρήστε όλες τις μεταβλητές πλην μιας σταθερές και αρχίστε να πειραματίζεστε με αυτή. Ποιος ο ρόλος της; Ακολουθήστε τη ίδια διαδικασία για κάθε μεταβλητή»* κ.λπ. (Πόταρη κ.ά., 2022).

γ) Ανοιχτή μαθηματική συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης: Στο τρίτο στάδιο, οι μαθητές παρουσιάζουν τα αποτελέσματά της δραστηριότητάς τους, συγκρίνουν τις εκδοχές τους, υπερασπίζονται και αιτιολογούν τις λύσεις τους, αμφισβητούν τα επιχειρήματα των συμμαθητών τους και αναστοχάζονται για την αποτελεσματικότητα των προσεγγίσεών τους (Κόσσυβας, 2008). Μέσα από ερωτήματα όπως: *«Ήταν η στρατηγική μου αποτελεσματική;»* ή *«Θα μπορούσα να λύσω το πρόβλημα διαφορετικά;», «Τι έμαθα από αυτή τη διαδικασία;»,* ενισχύεται η δημόσια μαθηματική «διαμάχη» και η πειστική τεκμηρίωση. Ο εκπαιδευτικός είναι συντονιστής της συζήτησης, ζητά από τους μαθητές να αποφασίσουν *«Ποιες ιδέες είναι σωστές και ποιες είναι λανθασμένες;», «Ποια στρατηγική ήταν πιο σύντομη;»* βοηθώντας τους να κάνουν συνδέσεις και επεκτάσεις των μαθηματικών ιδεών, ενώ παράλληλα προβαίνει στην εγκυροποίηση ή/και τη θεσμοθέτηση της γνώσης που αποκτήθηκε (Brousseau, 1998). Η φάση αυτή προάγει τη μάθηση μέσω αδιάλειπτου αναστοχαστικού διαλόγου. Στο τέλος ο εκπαιδευτικός συνοψίζει τις στρατηγικές, τα επιχειρήματα, τα συμπεράσματα από τις λύσεις που εκτέθηκαν, κάνει σύνθεση της δραστηριότητας της τάξης.

Το τριμερές μοντέλο αποτελεί μια αποτελεσματική προσέγγιση για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών, ενδείκνυται για τη λύση μαθηματικών προβλημάτων στην αίθουσα διδασκαλίας και προσαρμόζεται άριστα τόσο σε ατομικό όσο και σε ομαδικό επίπεδο. Ωστόσο, οι μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν δυσκολίες λόγω ανεπαρκών δεξιοτήτων επικοινωνίας, συνεργασίας και διαχείρισης των συγκρούσεων, προκαλώντας περιθωριοποίηση κάποιων μαθητών. Από την πλευρά τους, οι εκπαιδευτικοί καλούνται να περιορίσουν την παραδοσιακή άμεση

διδασκαλία και να ενισχύσουν μαθητοκεντρικές μεθόδους μάθησης, παράδοση που απαιτεί διαρκή παρακολούθηση και αξιολόγηση για τη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Μέσα από διαδοχικά στάδια, ενισχύεται η ενεργητική συμμετοχή, η δημιουργικότητα και η κριτική σκέψη, διαμορφώνοντας ένα μαθησιακό περιβάλλον που ανταποκρίνεται στις σύγχρονες ανάγκες, προάγοντας παράλληλα την ανάπτυξη αυτόνομων, ενεργών και υπεύθυνων πολιτών σε συνθήκες ισότιμης επικοινωνίας και συνεργασίας.

Η διδακτική προσέγγιση του βιβλίου και του ψηφιακού υλικού για την πρόσκτηση της νέας γνώσης βασίζεται σε τρεις αλληλένδετες γνωστικές διεργασίες: τη **διερεύνηση**, την **οικοδόμηση** και την **εδραίωση** της γνώσης. Αυτές αποτελούν τη βάση για μια μαθησιακή διαδικασία που ενισχύει την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών και διασφαλίζει μια στέρεη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Η διερεύνηση της νέας γνώσης: Το πρώτο συστατικό της μάθησης, η γνωστική διεργασία της διερεύνησης της νέας γνώσης, αποτελεί βασικό άξονα του ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου (ΙΕΠ, 2023) και εστιάζει στη σύνδεση της νέας μαθηματικής γνώσης με τις πρότερες μαθησιακές εμπειρίες των μαθητών. Η διερεύνηση μπορεί να είναι ελεύθερη ή να περιέχει έναν βαθμό καθοδήγησης. Μια διδασκαλία που υποστηρίζει τη διερεύνηση βασίζεται στην παρουσίαση πλούσιων μαθηματικών έργων, προσπελάσιμων από όλους τους μαθητές, με έμφαση στη διαδικασία επίλυσης και την ανάπτυξη συνδέσεων. Τα έργα ενθαρρύνουν τη χρήση ποικίλων μεθόδων και στρατηγικών, ενώ το συνεργατικό περιβάλλον της τάξης προάγει την ανταλλαγή ιδεών, την ανάπτυξη επιχειρημάτων και την κριτική ανάλυση. Ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί ερωτήσεις που καλλιεργούν τον συλλογισμό και αναδεικνύουν παρανοήσεις ως ευκαιρίες μάθησης, ενώ υποστηρίζει τους μαθητές να αναλαμβάνουν ευθύνες στη διαδικασία μάθησης, διατυπώνοντας ερωτήσεις, σχεδιάζοντας στρατηγικές και αποτιμώντας τις ιδέες τους με κριτικό τρόπο. Οι διερευνητικές συχνά ξεκινούν από ένα αρχικό πρόβλημα, το οποίο λειτουργεί ως αφόρμηση για τη μαθησιακή διαδικασία. Αυτό το πρόβλημα προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών, ενεργοποιώντας την περιέργεια και τη σκέψη τους, και θέτει τις βάσεις για μια ενεργητική και ουσιαστική εμπλοκή στη μάθηση. Αυτές οι διερευνητικές δραστηριότητες, είτε έγχαρτες είτε ψηφιακές, προσαρμόζονται στις ανάγκες και τις δυνατότητες της τάξης, διευκολύνοντας τη συμμετοχή όλων των μαθητών. Οι μαθητές καθοδηγούνται να ανακαλύψουν έννοιες, να διαμορφώσουν στρατηγικές και να συνδέσουν τη θεωρία με την πράξη, δημιουργώντας ένα περιβάλλον που ενισχύει τη μαθηματική δραστηριότητα και τον αναστοχασμό. Η διερεύνηση θέτει τη βάση για την ανάπτυξη της μαθηματικής συζήτησης και προετοιμάζει την ομαλή μετάβαση στη θεωρία. Με έμφαση στη δημιουργική σκέψη, τον πειραματισμό και τη διατύπωση εικασιών, συμβάλλει στην καλλιέργεια μιας βαθιάς και βιωματικής κατανόησης των Μαθηματικών, καθιστώντας τη μάθηση μια πλούσια και ουσιαστική εμπειρία.

Οικοδόμηση της νέας γνώσης: Κατά τη διεργασία της οικοδόμησης, οι μαθηματικές δράσεις των μαθητών που αναπτύχθηκαν κατά τη διερεύνηση προεκτείνονται και εμπλουτίζονται με την πραγμάτευση θεωρητικών γνώσεων, μεθόδων, παραδειγμάτων και εφαρμογών από τον εκπαιδευτικό. Οι μαθητές εισάγονται σταδιακά σε νέες μαθηματικές έννοιες, όπως εικασίες, ορισμοί, κανόνες, τύποι και συμπεράσματα, μέσα από κατάλληλες εξηγήσεις και δραστηριότητες φθίνουσας καθοδήγησης. Η διαδικασία αυτή δεν παρέχει έτοιμες γνώσεις, αλλά οι θεωρητικές έννοιες παρουσιάζονται αφού πρώτα έχουν ερευνηθεί, επιτρέποντας στους μαθητές να κατανοήσουν την προέλευσή τους.

Η οικοδόμηση των μαθηματικών εννοιών υποστηρίζεται από δραστηριότητες που ενισχύουν τις διεργασίες μάθησης, δίνοντας έμφαση στην κατανόηση και τη συστηματική σκέψη. Παράλληλα, η αυτοαξιολόγηση και ο αναστοχασμός ενθαρρύνονται, παρέχοντας στους μαθητές την ευκαιρία να επανεξετάσουν τη μαθησιακή τους πορεία, να αναγνωρίσουν τυχόν κενά και να εμβαθύνουν στις μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται. Αυτή η γνωστική διεργασία προάγει την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών και τους προετοιμάζει για την εφαρμογή των νέων γνώσεων σε σύνθετα προβλήματα.

Εδραίωση της νέας γνώσης: Η διεργασία εδραίωσης επικεντρώνεται στην εμπέδωση των μαθηματικών γνώσεων μέσω λυμένων εφαρμογών, άλυτων ασκήσεων και προβλημάτων που ενθαρρύνουν την αυτενέργεια των μαθητών. Οι λυμένες εφαρμογές που παρέχονται στο βιβλίο προσφέρουν πρότυπα επιχειρηματολογίας και ειδικής μεθοδολογίας, διευκολύνοντας την κατανόηση της επίλυσης ασκήσεων διαφορετικών κατηγοριών. Μέσα από αυτές, οι μαθητές εξοικειώνονται με τη μαθηματική σκέψη, αναπτύσσουν εμπειρίες και ικανότητες και προάγουν την αυτοδιόρθωση και την αυτοαξιολόγησή τους.

Οι άλυτες ασκήσεις και τα προβλήματα συνοδεύουν κάθε διδακτική ενότητα, παρέχοντας στους μαθητές την ευκαιρία να εξασκηθούν, να αναπτύξουν αυτενέργεια και να δοκιμάσουν τις γνώσεις τους σε διαφορετικά επίπεδα δυσκολίας. Η ποικιλία και η πλούσια θεματολογία τους εξυπηρετούν τη διαφοροποίηση της μαθησιακής διαδικασίας, καθώς ανταποκρίνονται σε όλα τα επίπεδα ικανοτήτων. Η ταξινόμηση των ασκήσεων σε ενότητες με αυξανόμενο βαθμό δυσκολίας επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς να επιλέγουν εκείνες που ταιριάζουν στις ανάγκες της τάξης τους. Επιπλέον, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να επιβεβαιώνουν την ορθότητα των αποτελεσμάτων τους μέσω των συνοδευτικών υποδείξεων και απαντήσεων. Τα προβλήματα μπορούν να λυθούν είτε στην τάξη είτε ως κατ' οίκον εργασίες, παρέχοντας ευελιξία στη διδακτική διαδικασία και ενισχύοντας την αυτονομία των μαθητών. Με αυτόν τον τρόπο, η γνωστική διεργασία της εδραίωσης διαμορφώνει μια σταθερή βάση γνώσεων και δεξιοτήτων, συμβάλλοντας στην ολοκληρωμένη κατανόηση και εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών.

Το σχολικό βιβλίο αυτό υλοποιεί τα παραπάνω, παρέχοντας στους εκπαιδευτικούς υποστήριξη για το σχεδιασμό και τη διδακτική διαχείριση των ΠΜΑ. *Ειδικότερα :*

- Εισαγωγικές διερευνήσεις που αποτελούν γέφυρες ανάμεσα σε αυτά που ξέρουν και σε αυτά που πρόκειται να μάθουν (προκαταβολικοί οργανωτές) οι μαθητές.
- Θεωρία με παραδείγματα βασισμένα στις εμπειρίες των μαθητών.
- Εφαρμογές που λειτουργούν ως παραδείγματα για τους μαθητές.
- Πλήθος ψηφιακών δραστηριοτήτων σε κάθε ενότητα οι οποίες δίνουν την δυνατότητα διερευνήσεων και πολλαπλών αναπαραστάσεων.
- Συμπληρωματικό υλικό με πλήθος ιστορικών σημειωμάτων και εργασιών επέκτασης.
- Ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης.
- Ερωτήσεις κατανόησης.
- Συνθετικές εργασίες.
- Αξιολόγηση (Ασκήσεις και προβλήματα).
- Ανακεφαλαίωση.
- Επαναληπτικά έργα.

5. Ενδεικτικά παραδείγματα πρακτικής εφαρμογής

Η έρευνα αναδεικνύει ότι πολλοί μαθητές του Γυμνασίου αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μάθηση των Μαθηματικών (Βερύκιος, 2003, Λεμονίδης, 1996), γεγονός που συχνά οδηγεί σε άνισες επιδόσεις και σχολική αποτυχία (Δραμαλίδης κ.ά., 2009; OECD, 2023). Σε αυτό το πλαίσιο, οι εκπαιδευτικοί καλούνται να διαμορφώσουν ένα μαθησιακό περιβάλλον που να χαρακτηρίζεται από ασφάλεια, συμπερίληψη και ισότητα, ενθαρρύνοντας την ενεργητική συμμετοχή όλων των μαθητών. Κάθε μαθητής, ανεξαρτήτως προέλευσης ή ταυτότητας, δικαιούται ίσες ευκαιρίες για την αξιοποίηση του δυναμικού του και την επίτευξη των καλύτερων δυνατών ακαδημαϊκών επιδόσεων (Σακονίδης, 2007; Louie, 2017).

Για να επιτευχθούν αυτοί οι στόχοι, η διδακτική διαχείριση των μαθηματικών έργων διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο. Στο βιβλίο έχουμε ενσωματώσει πλήθος διερευνήσεων οι οποίες υποδεικνύουν την προτεινόμενη διδακτική διαχείριση, καθώς και πλήθος ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων που παρατίθενται στο συμπληρωματικό υλικό και διευρύνουν τα εργαλεία προσέγγισης των εννοιών από τους μαθητές/τριες.



Διερεύνηση 1: Γινόμενο τετραγωνικών ριζών

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Ο εκπαιδευτικός γράφει στον πίνακα: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$.

Εκπαιδευτικός: Πόσο νομίζετε ότι κάνει αυτό το γινόμενο;

Μυρτώ: Νομίζω ότι κάνει 6.

Πέτρος: Αποκλείεται, δεν μπορεί να είναι ακέραιος αριθμός.

- α) Πώς νομίζετε ότι οδηγήθηκε ο Πέτρος στο συμπέρασμά του;
- β) Πώς νομίζετε ότι οδηγήθηκε η Μυρτώ στο συμπέρασμά της;
- γ) Συμφωνείτε με τον Πέτρο ή με τη Μυρτώ και γιατί;



Διερεύνηση 2: Ιδιότητες γινομένου και πηλίκου τετραγωνικών ριζών.

Να εργαστείτε είτε ατομικά είτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha \cdot \beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
4	9				
16	9				
4	25				
0,25	4				
25	16				

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα του πίνακα να διατυπώσετε μία εικασία:

- α) Για το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών.
- β) Για το πηλίκιο των τετραγωνικών ριζών.



Διδακτική διαχείριση:

- **Πρώτη διερεύνηση**

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού: Παρουσιάζει το πρόβλημα, δίνει διευκρινίσεις, όχι καθοδήγηση, αν χρειάζεται. Καλεί τους μαθητές να αιτιολογήσουν με ποιο τρόπο σκέφτηκε η Μυρτώ και ο Πέτρος, θέτοντας ερωτήσεις όπως:

«Πώς νομίζετε ότι έφτασε η Μυρτώ στο 6;», «Υπολόγισε κάτι συγκεκριμένο;». «Τι νομίζετε ότι έκανε τον Πέτρο να πιστεύει ότι το αποτέλεσμα δεν μπορεί να είναι ακέραιος;»

Παρακινεί τους μαθητές για διερεύνηση, παροτρύνοντάς τους να επαληθεύσουν ή να απορρίψουν τις απαντήσεις χρησιμοποιώντας διάφορες προσεγγίσεις (η αριθμομηχανή είναι μία από αυτές).

Ο ρόλος των μαθητών: Οι μαθητές κάνουν υπολογισμούς με τη βοήθεια αριθμομηχανής ή με το χέρι. Συγκρίνουν τα αποτελέσματα, εκφράζουν απόψεις και οδηγούνται στη διατύπωση της εικασίας: $\sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$

- **Δεύτερη διερεύνηση**

Ο ρόλος των μαθητών/τριών: Οι μαθητές εργάζονται ομαδικά ή ατομικά για να συμπληρώσουν κάθε κελί του πίνακα. Συζητούν τα αποτελέσματα και προσπαθούν να εντοπίσουν σχέσεις. Προτείνουν «κανόνες» με βάση τις παρατηρήσεις τους. Με τη συμπλήρωση του πίνακα, δηλαδή με την χρήση περισσότερων παραδειγμάτων, ενισχύουν την εικασία στην οποία κατέληξαν στην 1η διερεύνηση.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού: Ο δάσκαλος υπενθυμίζει τη χρήση αριθμομηχανής για ακρίβεια στα δεκαδικά και θέτει ερωτήσεις, αν δεν έχουν καταλήξει οι μαθητές στην εικασία, όπως: «Τι παρατηρείτε για τη σχέση μεταξύ της 3ης και 4ης στήλης;», «Έχει σημασία αν οι αριθμοί α και β είναι δεκαδικοί ή μικρότεροι από 1;» Συνοψίζει τα ευρήματα της τάξης (δεν τα λέει ο ίδιος, απλώς τα επαναδιατυπώνει): «Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου; Γιατί;»

Συζήτηση με ολόκληρη την τάξη για θεσμοποίηση

Μετά τη διατύπωση της εικασίας: $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$ ο δάσκαλος ρωτάει:

«Είναι αρκετά τα παραδείγματα ώστε η εικασία να γίνει κανόνας; ιδιότητα;»

Στο σημείο αυτό γίνεται συζήτηση με ολόκληρη την τάξη για να αναδειχθεί η ανάγκη της απόδειξης. Μετά την απόδειξη, η εικασία γίνεται κανόνας (ιδιότητα) και χρησιμοποιείται στη λύση εφαρμογών, ασκήσεων και προβλημάτων.

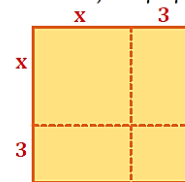
ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ, $(\alpha+\beta)^2$, Σελ.57.



Διερεύνηση 2

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

- Να γράψετε την παράσταση $(x+3)^2$ σε μορφή γινομένου, να την αναπτύξετε και να κάνετε τις αναγωγές όμοιων όρων.
- Να βρείτε το εμβαδόν του διπλανού τετραγώνου με δύο διαφορετικούς τρόπους.
- Να αναπτύξετε και να κάνετε αναγωγή όμοιων όρων στην παράσταση $(x+\alpha)^2$.
- Να χρησιμοποιήσετε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να βρείτε σύντομα τα αναπτύγματα: $(x+4)^2$ και $(2x+3)^2$
- Να υπολογίσετε χωρίς αριθμομηχανή τη δύναμη 61^2 .



Διδακτική διαχείριση:

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού και των μαθητών στη διερεύνηση.

Ο δάσκαλος αρχικά, αν χρειαστεί, δίνει διευκρινίσεις και προτρέπει τους μαθητές να συνεργαστούν, να ανταλλάξουν ιδέες προκειμένου να απαντήσουν στα ερωτήματα της εργασίας. Δίνει επαρκή χρόνο για να εργαστούν. Παρακολουθεί την εργασία κάθε ομάδας και αποφασίζει ποιες απαντήσεις και με ποια σειρά θα συζητηθούν στην τάξη. Αρχίζει με τις απαντήσεις που δεν είναι σωστές και η τάξη αποφασίζει πού βρίσκεται το λάθος, μετά ακολουθούν οι σχεδόν σωστές και τέλος οι σωστές. Αν η τάξη δυσκολεύεται να αρχίσει, ίσως χρειαστεί να κάνει ερωτήσεις για να ενεργοποιήσει τους μαθητές όπως:

Ερώτημα α: Πώς μπορεί να γραφεί η δύναμη $(x+3)^2$ ως γινόμενο; Χρησιμοποιήστε τις προηγούμενες γνώσεις σας για να βρείτε το αποτέλεσμα.

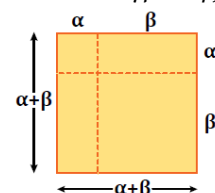
Ερώτημα β: Ποια είναι η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου; Πώς μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν του τετραγώνου όταν ξέρουμε την πλευρά του; Από πόσα άλλα σχήματα αποτελείται το μεγάλο τετράγωνο;

Από τα ερωτήματα α και β οι μαθητές πιθανότατα θα καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι: $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

Ερώτημα γ: Μπορεί να εργαστείτε στην παράσταση $(x+\alpha)^2$ όπως στα προηγούμενα ερωτήματα; Μπορείτε να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο όπως στο ερώτημα β με πλευρά $x+\alpha$ και να βρείτε το ανάπτυγμα της δύναμης $(x+\alpha)^2$ με δύο τρόπους;

Ενδεχομένως κάποιος/οι μαθητής/ες να κατασκευάσουν το τετράγωνο του σχήματος:

Μετά από τη διερεύνησή τους είναι πολύ πιθανό να καταλήξουν στην ταυτότητα $(x+\alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$ αλγεβρικά και γεωμετρικά. Αν δεν το καταφέρει



κανέννας, ο εκπαιδευτικός με κατάλληλες ερωτήσεις τους καθοδηγεί. Αν κάποια ομάδα έχει προχωρήσει μπορεί να ανακοινώσει στην τάξη τι έχει κάνει. Ο δάσκαλος δεν παίρνει θέση, αλλά ρωτάει: «*Συμφωνείτε ή όχι με την εργασία των συμμαθητών σας;*» Γενικά οτιδήποτε μπορεί να λεχθεί ή να γίνει από τους μαθητές δεν το κάνει ο εκπαιδευτικός. Ο ρόλος είναι να συντονίζει τη συζήτηση στην τάξη, να επεμβαίνει μόνο αν η διαπραγματέυση έχει φτάσει σε αδιέξοδο και με κατάλληλες ερωτήσεις να την επαναφέρει στον στόχο. Επαναδιατυπώνει τα συμπεράσματα που έχει καταλήξει η τάξη και θεσμοθετεί τη νέα γνώση.

Ερώτημα δ: Το ερώτημα αυτό αποτελεί εφαρμογή της ταυτότητας που ανακάλυψαν.

Ερώτημα ε: Το ερώτημα αυτό αποτελεί ένα πρόβλημα, διότι δεν φαίνεται να μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα η ταυτότητα. Αν κανέννας μαθητής δεν καταλάβει ότι μπορεί να γραφεί: $61^2 = (60+1)^2$, ο δάσκαλος με κατάλληλες ερωτήσεις μπορεί να τους καθοδηγήσει ρωτώντας: «*Πώς θα μπορούσε το 61^2 να γραφεί, ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η ταυτότητα;*» Είναι πιθανόν να προταθούν διάφορα αθροίσματα για το 61. Π.χ. $61 = 30+31$ ή $50+11$. Εδώ συζητά η τάξη έναν τρόπο γραφής, που είναι ο πιο απλός (και γιατί). Όλα τα αθροίσματα «κάνουν» αλλά θα διαπιστώσουν ότι το άθροισμα $60+1$ είναι πιο βολικό.

Γενικά: Ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί (χωρίς να δίνει απαντήσεις) και υποστηρίζει τους μαθητές. Θέτει ερωτήματα που ενθαρρύνουν την ανακάλυψη, παρέχει παραδείγματα όταν χρειάζεται. Ενθαρρύνει τους μαθητές να συζητήσουν σε ομάδες και να εξηγήσουν ο ένας στον άλλον τις ιδέες τους. Οι μαθητές συμμετέχουν ενεργά στη διερεύνηση και καταλήγουν σε συμπεράσματα μέσα από συνεργασία και πειραματισμό. Περιγράφουν με δικά τους λόγια τι σημαίνει η ταυτότητα και πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Έτσι δεν απομνημονεύουν την ταυτότητα, αλλά τη βιώνουν ως αποτέλεσμα διερεύνησης.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ, $ax+bx < y$, Σελ.143.



Διερεύνηση 2: Το πρόβλημα του Ταξί Ι

Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη.

Η εταιρεία ταξί «ΒΟΛΤΑ» χρεώνει 3,60 € «σημαία» και 0,90 € για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής. Οι φίλοι Γιώργος και Κώστας βρίσκονται στο Σύνταγμα και παίρνουν ταξί της ίδιας εταιρείας ξεχωριστά ο καθένας για το σπίτι του.

α) Ο Γιώργος για τη διαδρομή που κάνει πληρώνει 7,20 €. Πόσα χιλιόμετρα απέχει το σπίτι του Γιώργου από το Σύνταγμα;

β) Ο Κώστας, φθάνοντας στο σπίτι του δίνει χαρτονόμισμα 10 € στον ταξιτζή και παίρνει και ρέστα. Πόσα χιλιόμετρα απέχει το σπίτι του Κώστα από το Σύνταγμα;

Διδακτική διαχείριση:

Προκειμένου να αρθούν οι δυσκολίες των μαθητών στη διάκριση μεταξύ εξίσωσης και ανίσωσης προτείνεται η ανωτέρω διερεύνηση, με το φυσικό πλαίσιο της οποίας είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές (το ταξί). Προσδοκούμε ότι θα ανακαλύψουν τη διαφορά μεταξύ εξίσωσης και ανίσωσης και των αντίστοιχων συμβόλων “=” και “<”. Η διερεύνηση πρέπει να στηριχθεί στη σύγκριση καταστάσεων και στην ενεργό συμμετοχή των μαθητών, διευκολύνοντάς τους να ανακαλύψουν μόνοι τους τις διαφορές.

Ο ρόλος των μαθητών

Οι μαθητές εργάζονται ανά δύο για να λύσουν το πρόβλημα του ταξί που δόθηκε. Με το ερώτημα (α) οι μαθητές επαναφέρουν τις ιδέες τους για την εξίσωση, που γνωρίζουν ήδη για να απαντήσουν. Ωστόσο στο ερώτημα (β) διαπιστώνουν ότι δεν αρκεί η έννοια της εξίσωσης και οδηγούνται σε μια γνωστική σύγκρουση, που προκύπτει μέσα από την λέξη «ρέστα», η οποία είναι καθοριστική. Ουσιαστικά αποτελεί μια «γέφυρα» μετάβασης από την εξίσωση στην ανίσωση. Συζητούν σε ζευγάρια τις πιθανές λύσεις, ανταλλάσσοντας επιχειρήματα για το αν πρέπει να χρησιμοποιηθεί ισότητα ή κάτι άλλο (γνωρίζουν ήδη τα σύμβολα < και >). Διαπιστώνουν ότι υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ της προηγούμενης (εξίσωση) και της παρούσας

κατάστασης (ανίσωση). Πειραματίζονται και δοκιμάζουν διάφορες τιμές για να δουν αν ταιριάζουν στις συνθήκες του προβλήματος. Βήμα-βήμα τελικά θα καταλήξουν στο μοντέλο $0,9x + 3,60 < 10$.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού

Ο εκπαιδευτικός με διάφορες ερωτήσεις προσπαθεί να διευκολύνει τους μαθητές να ανακαλύψουν τις διαφορές μεταξύ εξίσωσης και ανίσωσης, όπως πχ: «Τι παρατηρείτε; Ποια είναι η διαφορά στον τρόπο που εκφράζουμε τις λύσεις;», «Τι περιγράφει η εξίσωση; Τι περιγράφει η ανίσωση; Τι είδους λύσεις έχει κάθε μία;», «Ποια είναι η διαφορά στη γραφική αναπαράσταση της εξίσωσης και της ανίσωσης;»

Καθοδηγεί τη συζήτηση για ερμηνεία του προβλήματος με ερωτήσεις όπως: «Τι σημαίνει ότι το σπίτι του Κώστα είναι «λιγότερο από 7,11 χιλιόμετρα;», «Πώς διαφέρει αυτό από την εξίσωση του Γιώργου, που δίνει μοναδική απόσταση;», «Πώς μπορούν να αναπαρασταθούν στον άξονα οι λύσεις εξίσωσης και ανίσωσης;»

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ, 1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων, Σελ.161.

Διερεύνηση 1: Κατασκευή και σύγκριση τριγώνων

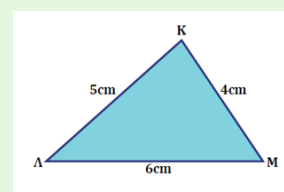
Να συνεργαστείτε ανά δύο και να συζητήσετε τα αποτελέσματά σας στην τάξη

α) Να σχεδιάσετε με κανόνα και διαβήτη τρίγωνο με πλευρές 4 cm, 5 cm και 6 cm.

β) Με διαφανές χαρτί να αποτυπώσετε το τρίγωνο που σχεδιάσατε και να ελέγξετε αν ταυτίζεται με το τρίγωνο που σχεδίασε ο συμμαθητής σας.

γ) Από τον πειραματισμό σας τι συμπέρασμα βγάζετε;

Να συζητήσετε τα συμπεράσματά σας στην τάξη.



Διδακτική διαχείριση:

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού

Ο εκπαιδευτικός ρωτάει: «Τι σημαίνει δύο τρίγωνα να είναι ίσα;» και αφήνει τους μαθητές να εκφράσουν τις απόψεις τους. Ζητά από τους μαθητές να συνεργαστούν σε ζευγάρια για να σχεδιάσουν ένα τρίγωνο με πλευρές 4 cm, 5 cm και 6 cm.

Ο ρόλος των μαθητών

Οι μαθητές σχεδιάζουν με κανόνα και διαβήτη, το τρίγωνο και το αποτυπώνουν σε χαρτί. Χρησιμοποιώντας διαφανές χαρτί, κάθε ομάδα αντιγράφει το τρίγωνο που σχεδίασε. Στη συνέχεια, συγκρίνει το τρίγωνό της με το τρίγωνο που σχεδίασε η άλλη ομάδα, τοποθετώντας τη διαφάνεια πάνω στο χαρτί της άλλης ομάδας.

Ακολούθως ο εκπαιδευτικός ρωτάει:

«Είναι τα τρίγωνα που κατασκευάσατε ίσα;»

«Ποια ήταν η μόνη πληροφορία που είχατε για την κατασκευή του τριγώνου;»

Συζήτηση στην Τάξη

Κάθε ομάδα παρουσιάζει τα ευρήματά της. Αναζητούνται κοινά συμπεράσματα, όπως ότι όλα τα τρίγωνα που κατασκευάστηκαν είναι ίσα, αφού χρησιμοποιήθηκαν ίσες πλευρές. Ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί τους μαθητές να καταλήξουν στο συμπέρασμα-κριτήριο:

«Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες τις τρεις πλευρές, τότε είναι ίσα»

Γενίκευση και Εφαρμογή

Ο εκπαιδευτικός ρωτάει: «Μπορείτε να φτιάξετε διαφορετικό τρίγωνο με πλευρές 6 cm, 4 cm και 5 cm; Γιατί όχι;» «Τι συμβαίνει αν αλλάξει μια πλευρά; Θα είναι ίσα τα τρίγωνα;» Ζητά από τους μαθητές να κατασκευάσουν άλλα τρίγωνα με δοσμένες πλευρές και να επαληθεύσουν το κριτήριο.

Γενικά, ο εκπαιδευτικός θέτει ερωτήσεις για να κινητοποιήσει τη σκέψη των μαθητών (π.χ. «Τι θα συμβεί αν οι πλευρές είναι ίσες αλλά διαφορετικά τοποθετημένες;»), ελέγχει τις κατασκευές των μαθητών, ενισχύει τη συνεργασία, συνοψίζει και βοηθά τους μαθητές να διατυπώσουν το πρώτο κριτήριο ισότητας. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές ανακαλύπτουν τη μαθηματική έννοια μέσα από πρακτική διερεύνηση και κατασκευή, γεγονός που ενισχύει την κατανόησή τους.

Διερεύνηση: Κύκλοι (& 10.2, σελ.: 238-239).

Στο διπλανό σχήμα υπάρχουν 80 κύκλοι τριών μεγεθών. Οι μικροί έχουν διάμετρο 1 cm, οι μεσαίοι 2 cm και οι μεγάλοι 3 cm.

α) Να διαλέξετε σε 15 δευτερόλεπτα 5 κύκλους που νομίζετε ότι αντιπροσωπεύουν τα μεγέθη των 80 κύκλων.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή των διαμέτρων των κύκλων που διαλέξατε.

γ) Να αριθμήσετε όλους τους κύκλους τοποθετώντας σε καθέναν αριθμούς από το 1 έως το 80.

δ) Να γράψετε σε όμοια χαρτάκια τους αριθμούς από το 1 έως το 80, να διπλώσετε τα χαρτάκια και να τα βάλετε σε ένα κουτί.

ε) Να ανακατέψετε καλά τα χαρτάκια με τους αριθμούς στο κουτί, να τραβήξετε στην τύχη 5 χαρτάκια και να σημειώσετε τους αριθμούς.

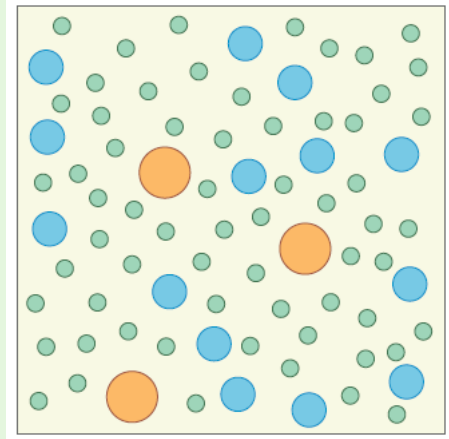
στ) Να βρείτε τη μέση τιμή των διαμέτρων των κύκλων που αντιστοιχούν στους αριθμούς οι οποίοι αναγράφονται στα χαρτάκια που τραβήξατε.

ζ) Να βρείτε τη μέση τιμή των διαμέτρων των κύκλων του σχήματος.

η) Να συγκρίνετε τη μέση τιμή των διαμέτρων των 5 κύκλων που βρήκατε στα ερωτήματα (β) και (στ) μεταξύ τους και με τη μέση τιμή της διαμέτρου όλων των κύκλων που βρήκατε στο (ζ) ερώτημα.

Ποια τιμή από τις μέσες τιμές των 5 κύκλων είναι πιο κοντά στη μέση τιμή όλων των κύκλων ;

Τι συμπεραίνετε ;



Διδακτική διαχείριση:

Οι μαθητές μέσα από ένα πρόβλημα με οικεία σχήματα που δημιουργεί κίνητρο εμπλοκής εμπλέκονται στην αναζήτηση των στοιχείων που ζητούνται. Με τα ερωτήματα (α), (ε), (ζ) και (η) συγκρίνουν, αναστοχάζονται και αντιλαμβάνονται την αναγκαιότητα χρήσης τυχαίου δείγματος, τα χαρακτηριστικά του οποίου είναι πιο κοντά στα χαρακτηριστικά του πληθυσμού που στη συγκεκριμένη περίπτωση αποτελείται από όλους τους κύκλους του σχήματος. Για να ενισχύσει τα συμπεράσματα των μαθητών, ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να ρωτήσει «τι θα κάναμε αν είχαμε, 800, 8000, 8.000.000 κύκλους ;».



Διερεύνηση: Ποιο είναι το ύψος μας;

Σχόλιο

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα ύψη των μαθητών ενός τμήματος της Γ' Τάξης Γυμνασίου σε ένα σχολείο.

1,74	1,8	1,64	1,74	1,84	1,8	1,7	1,66	1,78	1,71
1,59	1,62	1,81	1,63	1,6	1,58	1,69	1,75	1,84	1,79
1,74	1,80	1,64	1,68	1,74	1,84	1,60	1,78	1,80	1,74

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή και να κάνετε το θηκόγραμμα.
- β) Να πάρετε δύο τυχαία δείγματα 10 υψών που αντιστοιχούν σε μαθητές αυτού του τμήματος. Να βρείτε τη μέση τιμή, και να κάνετε τα θηκογράμματα.
- γ) Να πάρετε δύο τυχαία δείγματα 20 υψών που αντιστοιχούν σε μαθητές αυτού του τμήματος. Να βρείτε τη μέση τιμή, και να κάνετε τα θηκογράμματα.
- δ) Τι παρατηρείτε για την μεταβλητότητα της μέσης και της διάμεσης τιμής των δειγμάτων, σε σύγκριση με την μέση τιμή και τη διάμεσο των μαθητών της Τρίτης τάξης; Να εξηγήσετε.



Διδακτική διαχείριση:

Οι μαθητές/τριες μέσα από ένα πρόβλημα με οικείο πλαίσιο που δημιουργεί κίνητρο εμπλοκής εμπλέκονται στην κατασκευή θηκογραμμάτων και στην αναζήτηση μέτρων θέσης. Κατασκευάζουν για τρία διαφορετικά δείγματα 10, 20 και 30 υψών θηκογράμματα και βρίσκουν σε κάθε περίπτωση τη μέση και τη διάμεση τιμή. Στη συνέχεια παρατηρούν και αναγνωρίζουν τη μεταβλητότητα καθώς και τις μέσες τιμές των τριών δειγμάτων στις τρεις περιπτώσεις.

Το παράδοξο του Monty Hall

Ο Monty Hall ήταν ένα διάσημος τηλεπαρουσιαστής ο οποίος παρουσίαζε για χρόνια στην Αμερική ένα παιχνίδι με το όνομα «Ας κάνουμε μια συμφωνία» (Let's make a deal). Το παιχνίδι έγινε διάσημο και εμφανίστηκε στην τηλεόραση σε πάρα πολλές χώρες από το 1960 και μετά. Στην Ελλάδα παρουσιάστηκε με το όνομα «Το μεγάλο παζάρι».



Το παιχνίδι έχει ως εξής: Υπάρχουν τρεις κλειστές πόρτες. Πίσω από μία πόρτα υπάρχει ένα αυτοκίνητο και πίσω από τις άλλες δύο πόρτες υπάρχει μια κατσίκα.



Ο συμμετέχων επιλέγει μία πόρτα χωρίς να την ανοίξει και δεν ξέρει τι υπάρχει πίσω από την πόρτα που έχει επιλέξει. Ο οικοδεσπότης του παιχνιδιού ξέρει τι υπάρχει πίσω από τις πόρτες και ανοίγει μία από τις άλλες δύο πόρτες που δεν επέλεξε ο συμμετέχων, η οποία περιέχει μια κατσίκα. Στη συνέχεια δίνει την ευκαιρία στον συμμετέχοντα να διατηρήσει την πόρτα που έχει επιλέξει ή να αλλάξει και να επιλέξει την άλλη κλειστή πόρτα.

Ποια είναι η πιο συμφέρουσα στρατηγική για τον συμμετέχοντα:

Να διατηρήσει την πόρτα που επέλεξε, να αλλάξει επιλέγοντας την άλλη κλειστή πόρτα ή είναι το ίδιο ό,τι και αν επιλέξει;

Διδακτική διαχείριση:

Οι μαθητές ανοίγουν τον ψηφιακό πόρο και με την βοήθεια του εκπαιδευτικού εμπλέκονται στην υποδεικνυόμενη προσομοίωση του παιχνιδιού. Παίζουν 20 ή και περισσότερες φορές το παιχνίδι και καταγράφουν τα αποτελέσματα στον πίνακα:



α/α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Κερδίζω	Χάνω
Χωρίς αλλαγή																						
Με αλλαγή																						

Μετράνε τα αποτελέσματα και στη βάση των σχετικών συχνοτήτων που χρησιμεύουν ως πειραματικές πιθανότητες αποφασίζουν αν συμφέρει να αλλάζουν την αρχική τους απόφαση ή συμφέρει να τη διατηρήσουν. Μαθαίνουν έτσι πως μια προσομοίωση μπορεί να τους βοηθήσει να πάρουν απόφαση.

6. Συμπερασματικοί στοχασμοί για τη διδασκαλία των Μαθηματικών

Η διδασκαλία των Μαθηματικών αποτελεί μία από τις πιο απαιτητικές και συναρπαστικές προκλήσεις για τους εκπαιδευτικούς, καθώς δεν περιορίζεται στη μετάδοση γνώσεων, αλλά επικεντρώνεται στη δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που καλλιεργεί τη μαθηματική σκέψη, τη δημιουργικότητα και την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών. Στο πλαίσιο αυτό, ο εκπαιδευτικός σχεδιάζει μαθηματικά έργα και δραστηριότητες που προάγουν τη διερεύνηση, τη συνεργασία και την εδραίωση των μαθηματικών εννοιών. Οι προτάσεις διδακτικής διαχείρισης που συνοδεύουν το βιβλίο Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου και τα Ψηφιακά Μαθησιακά Αντικείμενα (ΨΜΑ) παρέχουν πολύτιμα εργαλεία για την υποστήριξη αυτής της διαδικασίας, προσαρμόζοντας τις ιδέες και τις μεθόδους στις ανάγκες κάθε τάξης.

Ένας ασφαλής και συμπεριληπτικός χώρος μάθησης αποτελεί θεμέλιο για την πρόοδο των μαθητών. Οι εκπαιδευτικοί καλλιεργούν μια κουλτούρα διαλόγου, όπου κάθε άποψη και απορία γίνεται σεβαστή, ενώ ενισχύουν την ενεργή συμμετοχή όλων, αναγνωρίζοντας τη σημασία της κοινωνικής και πολιτισμικής πολυμορφίας. Μέσα από πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία, αξιοποιούν τις πολιτισμικές αξίες και εμπειρίες των μαθητών, εφαρμόζοντας διαφοροποιημένες και πολυτροπικές διδακτικές πρακτικές που ανταποκρίνονται στις μοναδικές τους ανάγκες. Παράλληλα, προάγουν αυθεντικές μαθηματικές δραστηριότητες που ενισχύουν τη σκέψη, τη συλλογική κατανόηση και τη μαθηματική αυτοπεποίθηση. Θέτοντας υψηλές προσδοκίες για όλους, εξασφαλίζουν δίκαιη πρόσβαση στη μάθηση, δημιουργώντας ένα περιβάλλον που ενδυναμώνει τη διαρκή μαθησιακή ανάπτυξη.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών απαιτεί στρατηγικές που ενισχύουν τη βαθιά κατανόηση, την κριτική σκέψη και τη συνεργασία. Η διαχείριση λαθών βοηθά στη βελτίωση του συλλογισμού και την αποσαφήνιση παρανοήσεων, ενώ η εννοιολογική διδασκαλία συνδέει τις μαθηματικές έννοιες με τη συμβολική γλώσσα (Μπαραλός, 2007; Πόταρη κ.ά., 2022). Μέσα από μαθηματικές συζητήσεις, συνεργατικές προσεγγίσεις και τη χρήση σύγχρονων εργαλείων, η διδασκαλία γίνεται ελκυστική και δημιουργική, ενώ οι διαφοροποιημένες δραστηριότητες και οι ανοικτές ερωτήσεις ενθαρρύνουν την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας, καλλιεργώντας την αυτονομία και τη θετική στάση των μαθητών.

Στο συμπληρωματικό υλικό του βιβλίου Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου, έχουμε αναπτύξει και παραθέτουμε πλήθος ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων (ΨΜΑ), τα οποία αποσκοπούν στην ενίσχυση της διδακτικής διαχείρισης και στην ενεργοποίηση της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών, διευκολύνοντας τη μαθησιακή διαδικασία.

Βιβλιογραφία

- Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Villeurbanne: IREM de Lyon, CRDP.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843–908). Information Age Publishing.
- Bakogianni, D. (2019). *Studying a community of secondary mathematics teachers who negotiate new resources for the teaching of statistics* (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Σχολή Θετικών Επιστημών. Τμήμα Μαθηματικών. Τομέας Διδακτικής των Μαθηματικών).
- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, D. A. (2020). *Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II): A framework for statistics and data science education*. American Statistical Association
- Becker, J., & Shimada, S. (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Boaler, J. (2022). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative mathematics, inspiring messages and innovative teaching*. John Wiley & Sons.
- Black, P., & Wiliam, D. (2010). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan*, 80(2).
- Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. Grenoble: La pensée Sauvage.
- Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing*. Psychology Press.
- Cai, J., & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, 105, 287–301.
- Calvin, C. (2007). *Ο ταξιδευτής των Μαθηματικών*. Αθήνα: Κέδρος.
- Cobb, P., & Bauersfeld, H. (Eds.). (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Clarke, D. J., & Mesiti, C. (2013). Writing the student into the task: Agency and Voice. In A. Watson, M. Ohtani, J. Ainley, J. Bolite Frant, M. Doorman, C. Kieran, A. Leung, C. Margolinas, P. Sullivan, D. Thompson, & Y. Yang (Eds.). *Proceedings of ICMI Study 22: Task Design in Mathematics Education*, (pp. 175–184). Oxford: International Commission on Mathematics Instruction
- Hollebrands, K. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 55–72.
- Kafetzopoulos, G. I., & Psycharis, G. (2022). Conceptualization of function as a covariational relationship between two quantities through modeling tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, 67, 100993.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Information Age Publishing.
- Kosyvas, G. (2016). Students' involvement in a workplace inquiry activity: Solution of the solar panel problem. In G. Adams (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 36(1), 47–52.
- Kosyvas, G., & Glinou, A. (2023). Collaborative learning and problem-solving practices in the instruction of mathematics in secondary education. In G. Kosyvas (Ed.), *The Connect Approach Handbook: A Handbook on the implementation of the Flipped Classroom Approach in Secondary Education (Gymnasium) in the context of Mathematics, Physics and Foreign Language* (pp. 30–35). Athens: Regional Directorate for Primary and Secondary Education of Attica (e-book).
- Louie, N. L. (2017). The culture of exclusion in mathematics education and its persistence in equity-oriented teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(5), 488–519.
- OECD (2023). *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*, PISA, OECD Publishing, Paris.

- Sakonidis, C., Potari, D., & Zachariades, T. (2022). Meeting the challenges of re-designing two mathematics curricula reforms in uncertain times. *Research in Mathematics Education*, 24(2), 150–169.
- Slavin, R. E. (1995). *Cooperative learning: Theory, research, and practice*. Boston: Allyn and Bacon Publishers.
- Swan, M. (2006). *Collaborative learning in mathematics: A challenge to our beliefs and practices*. NRDC.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Polya, G. (1998). *Πώς να το λύσω*. Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.
- Vygotsky, L. (1988). *Σκέψη και γλώσσα*. Αθήνα: Γνώση.
- Vygotsky, L. (1997). *Νους στην κοινωνία, η ανάπτυξη των ανώτερων ψυχολογικών διαδικασιών*. Αθήνα: Gutenberg.
- Καραβασιλίας, Γ., & Κόσσυβας, Γ. (2016). Όψεις κριτικής αποτίμησης του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου: το εγχειρίδιο υποστηρίζει δραστηριότητες υψηλής γνωστικής βαρύτητας; *Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών-Επιστημονικών Θεμάτων*, 10, 68-84.
- Βερούκιος, Π. (2003). «Κατανόηση εννοιών της άλγεβρας από μαθητές του Γυμνασίου». Εισήγηση στο Συνέδριο που διοργάνωσε το Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών και το Πανεπιστήμιο Κύ-πρου από 12-14/4/2003 με θέμα «Τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο».
- Βερούκιος, Π. (2006). «Συζήτηση με Ολόκληρη την Τάξη: μια σημαντική διάσταση για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών». *Πρακτικά του 23ου Συνεδρίου της ΕΜΕ, Πάτρα*.
- Βερούκιος Π. (2010). «Συναρτησιακή προσέγγιση βασικών μαθηματικών εννοιών στο Γυμνάσιο». Διδακτορική διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ.
- Βερούκιος, Π. (2011). *Συναρτησιακή προσέγγιση βασικών εννοιών της Σχολικής Άλγεβρας σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλήματος*. Στο: *Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση*. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών (σσ. 9-50). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.
- Δραμαλίδης, Α., Μάρκος, Α., & Σακονίδης, Χ. (2009). Μαθηματικές επιδόσεις μαθητών Γ΄ Γυμνασίου: διερεύνηση κοινωνικο-εκπαιδευτικών παραγόντων. Στο Γ. Ηλιόπουλος, Σ. Κουνιάς, & Γ. Παπαϊωάννου (Επιμ.), *Πρακτικά 22ου Πανελληνίου Συνεδρίου Στατιστικής* (σελ. 75-82).
- ΙΕΠ. (2023). *Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά Γυμνασίου*. Αθήνα: ΙΕΠ.
- Κολέζα, Ε. (2003). Νοητικές διεργασίες ανάπτυξης γεωμετρικών εννοιών. *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*.
- Κυνηγός, Χ. (2006). *Το μάθημα της Διερεύνησης*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Κόσσυβας, Γ. (2008). Εικασίες και μαθηματική συζήτηση στην τάξη. *Πρακτικά του 25ου Συνεδρίου της ΕΜΕ* (σσ. 434-448). Βόλος: ΕΜΕ.
- Κόσσυβας, Γ. (2014). Εμπλοκή των μαθητών σε ένα πρόβλημα εικονιστικής κανονικότητας για την εισαγωγή στην άλγεβρα. *Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών-Επιστημονικών Θεμάτων*, 3, 31-53.
- Κόσσυβας, Γ. (2023). Η «παιδαγωγική της ενσυναίσθησης» στο «Διαδικτυακό Σχολείο» της Περιφερειακής Διεύθυνσης Εκπαίδευσης Αττικής. *Preschool and Primary Education*, 11(2), 207–237.
- Κόσσυβας, Γ., & Τσίτσος, Β. (2024). Διερευνήσεις μετασχηματισμών μεταφοράς σε περιβάλλον δυναμικής Γεωμετρίας στη Β΄ Γυμνασίου. Στο *Πρακτικά 39ου συνεδρίου της ΕΜΕ* (σσ. 312–321). Αθήνα: ΕΜΕ.
- Λεμονίδης, Χ. (1996). Δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθητών κατά το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. *Ευκλείδης Γ΄, Τόμος 13, Τεύχος 45*.
- Μπαράλός, Γ. (2001). Η τυπική απόδειξη ισχύει πάντοτε. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, 18, 340-352.
- Μπαράλός, Γ. (2007). Το λάθος ως στοιχείο σχεδιασμού της διδασκαλίας στα μαθηματικά. Στο *Τα λάθη των μαθητών: Δείκτες Αποτελεσματικότητας ή Κλειδιά για τη Βελτίωση της Ποιότητας της Εκπαίδευσης* (σσ. 345-354).

- Τζεκάκη, Μ., Μπαράλος, Γ., Σταγιόπουλος, Π. (2011). *Προσαρμογές αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο: Σχέδια διδασκαλίας για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (Τεύχος Α' και Τεύχος Β').
- Πόταρη, Δ., Ζωιτσάκος, Σ., Καμπούκος, Κ., Κόσυβας, Γ., Λουλάκης, Μ., Μεταξάς, Ν., & Τριανταφύλλου, Χ. (2022). *Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Γυμνασίου* (2η έκδοση). Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.
- Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματική Δραστηριότητα και Μαθηματικά Έργα. Κεντρική Ομιλία. Στο Καλδρυμίδου, Μ., & Βαμβακούση, Ξ. (Επιμ.), *Πρακτικά από το 4ο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σσ. 51-66). Ιωάννινα: ΕΝΕΔΙΜ - Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
- Τσίτσος, Β., & Σταθοπούλου, Χ. (2016). Διδακτικές μετατοπίσεις με εργαλείο τη μαθηματική μοντελοποίηση. Στο Μ. Σκουμιός & Χ. Σκουμπουρδή (Επιμ.), *Πρακτικά 2ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή: Το εκπαιδευτικό υλικό στα Μαθηματικά και το εκπαιδευτικό υλικό στις Φυσικές Επιστήμες: Μοναχικές πορείες ή αλληλεπιδράσεις;* (σσ. 421-430).
- Σακονίδης, Χ. (2007). *Κλειδιά και αντικλειδιά: Μαθαίνοντας και διδάσκοντας Μαθηματικά*. ΥΠΕΠΘ: Πανεπιστήμιο Αθηνών.