Διδακτική διαχείριση και μαθηματική δραστηριότητα

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Απαραίτητα στοιχεία για μια επιτυχημένη διδακτική διαχείριση του νέου Προγράμματος Σπουδών (ΠΣ) είναι, η γνώση από τον εκπαιδευτικό[1] των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων (ΠΜΑ) κάθε μαθηματικής ενότητας καθώς και ο κατάλληλος σχεδιασμός της διδασκαλίας σύμφωνα με τις θεωρητικές παραδοχές του νέου ΠΣ.
Τα ΠΜΑ του ΠΣ στο βιβλίο αυτό αναγράφονται στο εισαγωγικό μέρος κάθε ενότητας. Στη συνέχεια παραθέτουμε συνοπτικά τα παρακάτω:

1. **Κυρίαρχα διδακτικά μοντέλα.**
2. **Θεωρητικές παραδοχές του νέου ΠΣ και οι συνέπειές του στη διδακτική διαχείριση καθώς και στη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών.**
3. **Διδακτική διαχείριση και μαθηματική δραστηριότητα μαθητών/τριών.**
4. **Ενδεικτικά παραδείγματα.**
5. **Αξιοποίηση της τεχνολογίας στη διδακτική διαχείριση.**

1. Τα κυρίαρχα διδακτικά μοντέλα

Τις τελευταίες δεκαετίες στην εκπαίδευση κυριαρχούν τα ακόλουθα διδακτικά μοντέλα:

Α. Το **«παραδοσιακό»** διδακτικό μοντέλο με εμφανείς τις επιδράσεις των συμπεριφοριστικών θεωριών μάθησης οι οποίες εστιάζουν στην παρατηρήσιμη συμπεριφορά των μαθητών και θεωρούν ότι η μάθηση επιτυγχάνεται με τη σύνδεση ερεθισμάτων και αντιδράσεων. Στις θεωρίες αυτές η μάθηση ορίζεται «*ως η μόνιμη (μακροπρόθεσμη) αλλαγή της συμπεριφοράς που προκύπτει ως αποτέλεσμα άσκησης ή εμπειρίας*» (Κολιάδης, 1996, σ. 200), ενώ η αλλαγή της συμπεριφοράς πρέπει να μπορεί να παρατηρηθεί και να μετρηθεί. Για τις θεωρίες αυτές, ο εγκέφαλος των μαθητών και των μαθητριών είναι ένα μαύρο κουτί, όπου οι νοητικές διεργασίες που λαμβάνουν χώρα δεν αποτελούν αντικείμενο έρευνας, αφού δεν είναι παρατηρήσιμες (Κόμης, 2004).
Στο **παραδοσιακό** διδακτικό μοντέλο η γνώση θεωρείται ένα σύνολο πληροφοριών, γεγονότων, καταστάσεων, δεξιοτήτων, στάσεων που πρέπει να μεταδοθούν από τον δάσκαλο στον μαθητή χωρίς να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην κριτική σκέψη και τη δημιουργικότητα.
Ως προς το περιεχόμενο η γνώση θεωρείται στατική με αντικειμενικά χαρακτηριστικά οργανωμένη σε μαθήματα και θεματικές ενότητες, χωρίς να δίνεται η δυνατότητα συμμετοχής του μαθητή στη διαμόρφωσή της.
Τα λάθη θεωρούνται ανεπιθύμητα και ένδειξη ανεπαρκούς κατανόησης. Ως θεραπεία προκρίνεται η ενασχόληση με περισσότερες ασκήσεις και μεγαλύτερη προσπάθεια απομνημόνευσης (Μπαραλός, 2007).
Ο ρόλος των εκπαιδευτικών στο πλαίσιο αυτό είναι να μεταδίδουν τη γνώση που κατέχουν στους μαθητές που δεν την κατέχουν δίνοντας το κατάλληλο ερέθισμα ώστε να επιτύχουν την επιθυμητή συμπεριφορά.
Οι εσωτερικές νοητικές διεργασίες δεν ενδιαφέρουν αφού δεν μπορούν να παρατηρηθούν. Για παράδειγμα, η απάντηση ενός μαθητή ότι: $(α+β)^2= α^2+β^2$ εκλαμβάνεται ως έλλειψη κατανόησης η οποία «διορθώνεται» με περισσότερες εξηγήσεις και ασκήσεις για εξάσκηση. Η ερμηνεία του λάθους ότι μπορεί να αποτελεί παρανόηση μιας προηγούμενης ιδιότητας όπως της $(αβ)^2= α^2β^2$ δεν είναι βασικό εργαλείο αυτού του μοντέλου.

[1] Το γραμματικό αρσενικό γένος «ο εκπαιδευτικός», «ο μαθητής» κ.ά. χρησιμοποιείται στο βιβλίο αυτό με συμπεριληπτικό τρόπο, δηλαδή εννοούμε «ο και η εκπαιδευτικός», «ο μαθητής και η μαθήτρια» κ.ά. Ομοίως σε όλες τις ανάλογες περιπτώσεις.

Το «παραδοσιακό» μοντέλο κυριάρχησε τις προηγούμενες δεκαετίες στο εκπαιδευτικό μας σύστημα. Τα τελευταία χρόνια αν και βρίσκεται σε υποχώρηση, εξακολουθεί να έχει ισχυρή παρουσία στη διδασκαλία.

Ο εκπαιδευτικός παραμένει η κύρια πηγή γνώσης και αυθεντίας, ενώ ο ρόλος του μαθητή είναι να ακούει και να εφαρμόζει την παρεχόμενη γνώση. Η αξιολόγηση του μαθητή αφορά κυρίως στην ικανότητά του να αναπαράγει τις πληροφορίες που του έχουν δοθεί.

Β. Το **«σύγχρονο»** διδακτικό μοντέλο το οποίο υποστηρίζεται από τις θεωρίες οικοδόμησης της γνώσης οι οποίες υποστηρίζουν ότι η γνώση δεν μεταδίδεται παθητικά από τους εκπαιδευτικούς στους μαθητές αλλά αντίθετα αντιμετωπίζεται ως μια δυναμική και εξελισσόμενη διαδικασία η οποία οικοδομείται μέσα από τη συνεργασία τη διερεύνηση και την ενεργή συμμετοχή των μαθητών. Η μάθηση προκύπτει μέσω βιωματικών εμπειριών διερεύνησης προβλημάτων, επίλυσης πραγματικών ζητημάτων καθώς και αλληλεπίδρασης με το κοινωνικό περιβάλλον.

Η μάθηση είναι προϊόν της εννοιολογικής αλλαγής που επέρχεται στους μαθητές λόγω της γνωστικής σύγκρουσης στην οποία υποβάλλονται όταν οι γνώσεις τους αποδεικνύονται ανεπαρκείς να επιλύσουν ένα πρόβλημα. Τα λάθη αντανακλούν την προσπάθειά τους να επιλύσουν προβλήματα με βάση τις γνώσεις τους μέχρι τη στιγμή της εμπλοκής τους με τις νέες γνωστικές προκλήσεις. Είναι αποκαλυπτικά των αντιλήψεων του μαθητή και αντιμετωπίζονται ως ευκαιρία για μάθηση.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού αλλάζει. Δρα ως εμψυχωτής και συντονιστής στη διαδικασία της μάθησης παρέχοντας στους μαθητές την κατάλληλη καθοδήγηση στην προσπάθειά τους για την οικοδόμηση της νέας γνώσης και όχι ως μεταδότης της γνώσης που κατέχει στους μαθητές. Η διδασκαλία δεν επικεντρώνεται στην παροχή πληροφοριών στους μαθητές, αλλά στην παροχή ευκαιριών που θα διευκολύνουν τους μαθητές να οικοδομήσουν τη δική τους γνώση. Επομένως, στόχος της διδασκαλίας είναι να σχεδιάσει ο εκπαιδευτικός τα κατάλληλα περιβάλλοντα.

Βασική λειτουργία του εκπαιδευτικού είναι να βοηθά τους μαθητές να γίνουν ενεργοί συμμετέχοντες στη μάθησή τους και να οικοδομούν ουσιαστικές συνδέσεις μεταξύ της προηγούμενης γνώσης, της νέας γνώσης και των διαδικασιών που εμπλέκονται στη μάθηση (Tam, 2000).

Η γνώση αναπτύσσεται σε αλληλεπίδραση με το περιβάλλον (Vygotsky, 1988) και για την κατασκευή της από τους μαθητές, διαμεσολαβεί ο εκπαιδευτικός ή ένας συνομήλικος μαθητής, βοηθώντας να γεφυρωθεί ο χώρος ανάμεσα σε αυτό που ο μαθητής μπορεί να επιτύχει χωρίς βοήθεια και σε αυτό που μπορεί να πετύχει με τη βοήθειά τους (Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (Vygotsky in Yasnitsky (2018)).

Η επικοινωνία και η γλώσσα, η κατάλληλη καθοδήγηση, η ανατροφοδότηση και η νοητική σκαλωσιά (scaffolding) αναδεικνύονται ως ιδιαίτερα αποτελεσματικές. Ευνοείται η δημιουργία συνεργατικών περιβαλλόντων στα οποία η γνώση οικοδομείται μέσω της υλοποίησης δραστηριοτήτων στο πλαίσιο της ομάδας τους, διερευνήσεων, συζητήσεων, εικασιών, επαληθεύσεων ή διαψεύσεων και ατομικών αναστοχασμών.

Οι βασικές αρχές των θεωριών οικοδόμησης της μάθησης είναι:

- Η γνώση οικοδομείται στη βάση της προηγούμενης γνώσης κάνοντας συγκρίσεις και δημιουργώντας συνδέσεις.
- Οι μαθητές κατακτούν τη γνώση συμμετέχοντας ενεργά σε διερευνήσεις και μαθηματικές δραστηριότητες με τη διαμεσολάβηση των εκπαιδευτικών.
- Δεν υπάρχουν σωστές ή λάθος απαντήσεις. Τα λάθη των μαθητών αποκαλύπτουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν για να αποκτήσουν νέα γνώση.
- Η διαδικασία είναι εξίσου σημαντική με το προϊόν.

- Η μάθηση διευκολύνεται σε συνεργατικά περιβάλλοντα.
- Χειραπτικά υλικά, προσομοιώσεις, νέες τεχνολογίες συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση.
- Οι εκπαιδευτικοί δρουν ως διευκολυντές και ερευνητές.

Το «σύγχρονο» μοντέλο διδασκαλίας εμπεριέχει επιλογές του «παραδοσιακού» μοντέλου οι οποίες αποκτούν ένα πιο συγκεκριμένο περιεχόμενο μέσα σε ένα ευρύτερο φάσμα διδακτικών ενεργειών.

2. Θεωρητικές παραδοχές του νέου ΠΣ και οι συνέπειές του στη διδακτική διαχείριση και στη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών.

Τα νέα ΠΣ προκρίνουν τις θεωρίες οικοδόμησης της γνώσης σύμφωνα με τις οποίες η γνώση κατασκευάζεται από τους μαθητές, οπότε ο προσανατολισμός των νέων βιβλίων είναι μαθητοκεντρικός.

Στο πλαίσιο αυτό η παραδοσιακή διδασκαλία υποχωρεί δίνοντας προτεραιότητα στο διερευνητικό μοντέλο της μάθησης, δηλαδή σε μορφές μάθησης και διδασκαλίας που στηρίζονται κυρίως στην ενεργό συμμετοχή των μαθητών και στην εμπλοκή τους με νέες διδακτικές καταστάσεις υπό την καθοδήγηση των εκπαιδευτικών. Βασική διάσταση του ρόλου του εκπαιδευτικού είναι να επιλέγει κατάλληλα μαθηματικά έργα και να εφαρμόζει μαθηματικές πρακτικές, που προάγουν αυθεντικές μαθηματικές δραστηριότητες.

Η διδακτική διαχείριση της διδασκαλίας και η μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών στο νέο ΠΣ ως συνέπεια της θεωρητικής παραδοχής ότι οι μαθητές κατασκευάζουν ενεργά τη δική τους κατανόηση και γνώση μέσω εμπειριών και αλληλεπιδράσεων αρθρώνεται στους ακόλουθους άξονες:
Ενεργητική μάθηση, Συνεργατική μάθηση, Μάθηση μέσα από διερευνήσεις και προβλήματα, Σκαλωσιές μάθησης, Οικοδόμηση γνώσης στηριγμένης σε υπάρχουσες γνώσεις, Αξιολόγηση ως μέρος της μάθησης, Χρήση της τεχνολογίας, Εννοιολογική κατανόηση, Μεγάλες ιδέες των μαθηματικών.

1. Ενεργητική μάθηση.

- Ο εκπαιδευτικός ενεργεί ως διευκολυντής και οι μαθητές ενθαρρύνονται να εξερευνήσουν μαθηματικές έννοιες, να κάνουν ερωτήσεις και να ανακαλύψουν μόνοι τους ή/και σε συνεργασία με συμμαθητές τους βιώσιμες απαντήσεις (Παπασταυρίδης κ.α., 2015)
- Οι μαθητές συμμετέχουν σε διερευνήσεις και δραστηριότητες, χρησιμοποιούν μαθηματικά εργαλεία (π.χ. χάρακες, αριθμομηχανές), χειρίζονται αντικείμενα και μοντελοποιούν τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες με τη βοήθεια λογισμικών και χειραπτικών υλικών.

2. Συνεργατική μάθηση.

- Οι μαθητές συχνά εργάζονται σε ζεύγη ή μικρές ομάδες για να λύσουν προβλήματα. Η συνεργασία τους επιτρέπει να μοιράζονται διαφορετικές στρατηγικές, να εξηγούν τη σκέψη τους και να μαθαίνουν ο ένας από τις απόψεις του άλλου.
- Οι μαθητές εξηγούν τους συλλογισμούς τους, αιτιολογούν τις απαντήσεις τους και συμμετέχοντας σε συζητήσεις βοηθιούνται στην εμβάθυνση της κατανόησής τους και στη βελτίωση της μαθηματικής τους σκέψης.

3. Μάθηση μέσα από διερευνήσεις και προβλήματα.

- Ο εκπαιδευτικός ενεργεί ως σχεδιαστής και πάροχος κατάλληλων καταστάσεων μάθησης, όπως διερευνήσεις και προβλήματα που έχουν νόημα για τους μαθητές.
- Οι μαθητές εμπλέκονται στις σχεδιασμένες από τον εκπαιδευτικό καταστάσεις μάθησης οι οποίες απαιτούν εξερεύνηση και διερεύνηση. Δημιουργούν υποθέσεις, δοκιμάζουν τις ιδέες τους και μαθαίνουν μέσω δοκιμής και λάθους.

4. Σκαλωσιές μάθησης.

- Οι καθηγητές παρέχουν σκαλωσιές μάθησης, προσφέροντας υποδείξεις, κάνοντας καθοδηγητικές ερωτήσεις ή/και εισάγοντας εργαλεία (χειραπτικά ή/και ψηφιακά) που βοηθούν τους μαθητές να κατασκευάσουν μαθηματικά νοήματα.
- Η δουλειά του εκπαιδευτικού είναι να δημιουργεί διδακτικές καταστάσεις και να βοηθά τους μαθητές να βρίσκουν απαντήσεις στα ερωτήματα που δημιουργούνται. Η βοήθεια μειώνεται σταδιακά καθώς οι μαθητές αποκτούν κατανόηση και γίνονται αυτόνομοι.
- Η διδασκαλία προσαρμόζεται στις ατομικές ανάγκες των μαθητών παρέχοντας διαφορετικές εργασίες ή προκλήσεις, ανάλογα με το επίπεδο κατανόησης του κάθε μαθητή.

5. Συμπερίληψη, διαφοροποίηση και εξατομικευμένη μάθηση.

Η συμπερίληψη, η διαφοροποιημένη διδασκαλία και η εξατομικευμένη μάθηση αποτελούν θεμελιώδεις αρχές για την προώθηση της ισότιμης πρόσβασης στη μαθηματική εκπαίδευση. Η διαφοροποίηση ενθαρρύνει την παροχή ευέλικτων μαθησιακών εμπειριών, προσαρμοσμένων στις πολιτισμικές, γνωστικές και προσωπικές ιδιαιτερότητες των μαθητών. Ειδικότερος σχεδιασμός και διαχείριση χρειάζεται για μαθητές με μαθησιακά προβλήματα προκειμένου να επωφεληθούν από τη συμμετοχή τους στη μαθησιακή διαδικασία (Τζεκάκη, Μπαραλός, Σταγιόπουλος, 2011).

6. Οικοδόμηση γνώσης στηριγμένης σε υπάρχουσες γνώσεις.

- Οι μαθητές ενθαρρύνονται να συνδέσουν νέες μαθηματικές έννοιες με αυτό που ήδη γνωρίζουν προκειμένου να οικοδομήσουν μια πιο ολοκληρωμένη και συνεκτική κατανόηση των μαθηματικών.
- Οι μαθητές παρακινούνται να αναστοχαστούν πώς λειτούργησαν, τι έμαθαν και πώς μπορούν να εφαρμόσουν όσα έμαθαν σε νέες καταστάσεις.

7. Αξιολόγηση ως μέρος της μάθησης.

- Οι εκπαιδευτικοί δρουν ως ερευνητές. Παρατηρούν τους μαθητές, κάνουν διερευνητικές ερωτήσεις και παρέχουν ανατροφοδότηση που βοηθά στην καθοδήγηση της περαιτέρω μάθησης.
- Τα λάθη θεωρούνται ως ευκαιρίες μάθησης και όχι ως αποτυχίες. Οδηγούν σε νέες ερωτήσεις και απορίες, δίνοντας τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να αντιληφθούν έννοιες που τα παιδιά δεν έχουν κατανοήσει και να αποκτήσουν μια βαθύτερη γνώση των παρανοήσεων τους (Ζαχαριάδης κ.ά., 2022).
- Η διαμορφωτική αξιολόγηση αποτελεί συστατικό στοιχείο της διδασκαλίας, που αποσκοπεί στη συνεχή παρακολούθηση και βελτίωση της μαθησιακής διαδικασίας (Black & Wiliam, 2010). Επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς να εντοπίζουν παρανοήσεις, να προσαρμόζουν τις διδακτικές προσεγγίσεις στις αναπτυξιακές και μαθησιακές ανάγκες των μαθητών και να διαμορφώνουν διαφοροποιημένες δραστηριότητες που ενισχύουν την κατανόηση και τη δημιουργική σκέψη. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να εφαρμόζουν την αυτοαξιολόγηση και την ετεροαξιολόγηση μέσα από συζητήσεις και συνεργατικές δραστηριότητες, να αναστοχάζονται πάνω στην πρόοδό τους, να αναγνωρίζουν τις δυνατότητές τους και να καλλιεργούν την αυτονομία και την υπευθυνότητά τους στη μάθηση.

8. Χρήση της τεχνολογίας.

- Χρησιμοποιούνται διαδραστικά εργαλεία, λογισμικά και προσομοιώσεις για την εξερεύνηση μαθηματικών εννοιών με ελκυστικό και λειτουργικό τρόπο.
- Οι μαθητές χρησιμοποιούν με τη βοήθεια και υπό την επίβλεψη του εκπαιδευτικού το διαδίκτυο για να ερευνήσουν μαθηματικά προβλήματα, να εξερευνήσουν διαφορετικές μεθόδους ή να βρουν πραγματικές εφαρμογές των μαθηματικών που μαθαίνουν.

9. Εννοιολογική κατανόηση.

- Δίνεται έμφαση στην κατανόηση του «γιατί» και του «πώς» και όχι απλώς στην απομνημόνευση τύπων ή αλγορίθμων.
- Οι μαθητές αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων.
- Οι μαθητές ενθαρρύνονται να αναγνωρίσουν συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας έννοιας καθώς και μεταξύ μαθηματικών εννοιών.

10. Μεγάλες ιδέες των μαθηματικών.

Ανάδειξη των μεγάλων ιδεών στα μαθηματικά, δηλαδή των κεντρικών ιδεών στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών οι οποίες συνδέουν διαφορετικές μαθηματικές έννοιες ή οπτικές σε ένα συνεκτικό σύνολο (NCTM, 2000). Ειδικότερα στο Λύκειο αναδεικνύεται η έννοια της απόδειξης και διαχωρίζεται από την επαλήθευση και την δικαιολόγηση (Μπαραλός, 2001).

Στο νέο ΠΣ ως μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών αναγνωρίζονται: η *Μαθηματική δομή*, η *Απόδειξη*, η *Γενίκευση*, η *Μεταβολή*, η *Ισοδυναμία*, οι *Μετασχηματισμοί* και η *Προσέγγιση-σύγκλιση*.

3. Διδακτική διαχείριση και μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών/τριών

Καθοριστικά στοιχεία για τη διδακτική διαχείριση είναι:

- Η έμφαση που πρέπει να δίνει ο εκπαιδευτικός στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών, στη μαθηματική δραστηριότητα και μάθηση και όχι απλά στη διεκπεραίωση του έργου.
- Η δυνατότητα του εκπαιδευτικού να υποστηρίζει και να συντονίζει τον διάλογο και τη συζήτηση μέσα στην τάξη (Clarke & Mesiti, 2013).

Ένα καλά σχεδιασμένο έργο ενισχύει τη διερεύνηση, τον πειραματισμό και τον αναστοχασμό, ενώ η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και ψηφιακών εργαλείων διευκολύνει την κατανόηση και την επικοινωνία ιδεών.

Η διδακτική διαχείριση σύμφωνα με την θεωρία των διδακτικών καταστάσεων (Brousseau, 1998) η οποία εκπορεύεται από τις θεωρίες κατασκευής της γνώσης, είναι ένα εργαλείο για την εξέλιξη της μαθησιακής διαδικασίας στην τάξη η οποία μπορεί να αναλυθεί στις ακόλουθες τέσσερις φάσεις:

Διερευνητική φάση (Δράση μαθητών)

Ο εκπαιδευτικός οργανώνει ένα διδακτικό περιβάλλον με σκοπό να εμπλέξει τους μαθητές του και στη συνέχεια να απομακρυνθεί. Ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη αυτού του περιβάλλοντος θα πρέπει να περιλαμβάνει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Οι μαθητές να είναι πρόθυμοι να το υιοθετήσουν σαν δικό τους *και*
- Οι μαθητές να έχουν τα μέσα να κατασκευάσουν μόνοι τους τη λύση ή το τελικό προϊόν.

Σε αυτή την κατάσταση η γνώση εμφανίζεται μέσα από, μια διερεύνηση, την επίλυση ενός προβλήματος ή μια διαδικασία μοντελοποίησης.

Φάση διατύπωσης

Ο εκπαιδευτικός έχει φροντίσει να αναπτυχθεί ένα διδακτικό περιβάλλον που βασίζεται σε προηγούμενες κοινές εμπειρίες, ενθαρρύνει και συντονίζει ανταλλαγές απόψεων.

Οι μαθητές ανταλλάσσουν και συγκρίνουν τις παρατηρήσεις τους. Στην προσπάθειά τους αυτή να επικοινωνήσουν οδηγούνται στο να δημιουργήσουν κοινά νοήματα καθώς και να διαμορφώσουν μια γλώσσα επικοινωνίας.

Η γνώση εμφανίζεται ως αποτέλεσα μιας προσωπικής εμπειρίας, η οποία όταν κοινοποιηθεί αποπροσωποποιείται και στη συνέχεια ενσωματώνεται στην εμπειρία της κοινότητας των μαθητών.

Φάση επικύρωσης

Ο εκπαιδευτικός ενεργεί ως συντονιστής. Παρεμβαίνει με σκοπό την ανάπτυξη παραγωγικού διαλόγου, παρακινεί για περισσότερη ακρίβεια και μεθοδικότητα στη χρήση των εννοιών και εφιστά την προσοχή των μαθητών σε πιθανές αντιφάσεις.

Οι μαθητές εμπλέκονται σε μαθηματικά έργα προσπαθώντας να επαληθεύσουν μια υπόθεση ή να εξηγήσουν κάποιο φαινόμενο.

Η γνώση έχει τα δυναμικά χαρακτηριστικά μιας θεωρίας εν τη γενέσει της.

Η φάση αυτή έχει διαλεκτικό χαρακτήρα και *«η κάθε υπόθεση πρέπει να αιτιολογείται επαρκώς ώστε είτε να γίνει αποδεκτή είτε να απορριφθεί»* (Brousseau, 1997).

Φάση θεσμοποίησης

Ο εκπαιδευτικός ως εκπρόσωπος των επίσημων μαθηματικών βοηθά τους μαθητές στη διατύπωση των αποτελεσμάτων της φάσης της επικύρωσης σύμφωνα με ορολογίες, ορισμούς, θεωρήματα και κανόνες, όπως παρουσιάζονται από τον θεσμό των αναλυτικών προγραμμάτων, των σχολικών βιβλίων και της επίσημης παιδείας.

Για τους μαθητές το διδακτικό περιβάλλον είναι ένα ευκρινές πλαίσιο κανόνων. Παρέχονται στους μαθητές εφαρμογές, ασκήσεις εμπέδωσης και έργα επέκτασης. Χρειάζεται προσοχή γιατί η πρόωρη θεσμοποίηση μπορεί να διακόψει την κατασκευή νοήματος και η όψιμη να ενισχύσει ανακριβείς ερμηνείες. Και στις δύο περιπτώσεις δημιουργούνται εμπόδια προσπέλασης της γνώσης.

Ο σχεδιασμός του βιβλίου σε σχέση με τη διδακτική διαχείριση έχει ως αφετηρία τη διερευνητική φάση (Δράση μαθητών/τριών) και ακολουθούν οι φάσεις της διατύπωσης, της επικύρωσης και τέλος της θεσμοποίησης.

Η διδακτική διαχείριση ενός μαθηματικού έργου (διερεύνηση, ερώτημα, πρόβλημα) επικεντρώνεται στην ενεργητική εμπλοκή των μαθητών, στη μαθηματική δραστηριότητα και στη δημιουργία ενός πλαισίου διαπραγμάτευσης μέσω διαλόγου. Η μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών προκύπτει από μια διδασκαλία που υποστηρίζει τη διερεύνηση στο σύγχρονο διδακτικό μοντέλο και έχει τις ακόλουθες διαστάσεις:

Α. Εμπλέκει τους μαθητές στις διερευνήσεις του βιβλίου ή σε άλλες που θεωρούνται κατάλληλες για κάθε διδακτική ενότητα, έτσι ώστε οι μαθητές να συμμετέχουν ενεργά σε διαδικασίες σκέψης που ενθαρρύνουν και ευνοούν την ανάπτυξη συνδέσεων.

Τα έργα για τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών που δίνονται προτείνεται να:

- είναι κατανοητά από όλους τους μαθητές.
- είναι ενδιαφέροντα για τους μαθητές.
- περιλαμβάνουν ρεαλιστικές νοητικές και χρονικές προσδοκίες.
- αναπτύσσουν την κατανόηση και την εκμάθηση διαδικασιών.
- αντιμετωπίζονται με ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών.
- δίνουν έμφαση στις διαδικασίες και στην εννοιολογική κατανόηση. Όχι, στην απάντηση.

Β. Ευνοεί τη δημιουργία συνεργατικού περιβάλλοντος και υποστηρίζει την ανταλλαγή επιχειρημάτων και ιδεών προκειμένου να οικοδομηθούν συγκεκριμένα μαθηματικά νοήματα.

Το περιβάλλον της τάξης προτείνεται να:

- υποστηρίζει την ανταλλαγή ιδεών και προσεγγίσεων
- αξιοποιεί διαφορετικές ιδέες
- προωθεί την ανταλλαγή απόψεων και τον κριτικό διάλογο
- ενθαρρύνει την υποστήριξη μαθητών από συμμαθητές τους

Γ. Απευθύνει ερωτήσεις που κινητοποιούν τους μαθητές και προωθούν την ανάπτυξη συλλογισμών και επικοινωνίας των μαθηματικών ιδεών τους.

Οι ερωτήσεις προτείνεται να:

- θέτουν μαθηματικές προκλήσεις στους μαθητές
- ενθαρρύνουν την αποτίμηση και ανάλυση μεθόδων και στρατηγικών
- αξιοποιούν τις παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών προκειμένου να μπορέσουν οι μαθητές να μπορέσουν να αντικαταστήσουν τα ενδεχόμενα ανεπαρκή και ακατάλληλα γνωστικά τους σχήματα.
- προωθούν την εξερεύνηση και την ανακάλυψη των νέων ιδεών.

Η εφαρμογή ενός μαθηματικού έργου στη σχολική τάξη μπορεί να διακριθεί στα ακόλουθα στάδια:

Στάδιο 1ο: Στο πρώτο στάδιο της εισαγωγής του μαθηματικού έργου στην τάξη, ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν το πλαίσιο του έργου και να το συνδέσουν με τις προηγούμενες μαθηματικές τους γνώσεις. Παράλληλα, ενθαρρύνει τους μαθητές στην επιλογή και χρήση κατάλληλων πόρων (π.χ. χειραπτικών, ψηφιακών, οπτικών αναπαραστάσεων) (González & Eli, 2017).

Στάδιο 2ο: Οι μαθητές εργάζονται ατομικά ή σε ομάδες και ο εκπαιδευτικός αλληλοεπιδρά μαζί τους. Είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να έχει προβλέψει κατά τον σχεδιασμό του μαθηματικού έργου πιθανές στρατηγικές των μαθητών και πιθανές παρανοήσεις και να έχει σκεφτεί τρόπους και μεθόδους για να τις αναγνωρίσει και να τις διαχειριστεί. Μπορεί να υποστηρίξει τον διάλογο και τη συζήτηση στις ομάδες βοηθώντας τους μαθητές να αποσαφηνίσουν τις ιδέες τους με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα με διευκρινιστικές ερωτήσεις ή ζητώντας από έναν μαθητή να αναδιατυπώσει τις ιδέες ενός άλλου μαθητή της ομάδας του. Επίσης, ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει έμφαση στη συλλογιστική σκέψη των παιδιών και στη νοερή επιχειρηματολογία με ερωτήσεις όπως: *«Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον συμμαθητή σας; Γιατί;», «Τι θα γινόταν αν…; Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;» «Η απάντηση που δώσατε έχει νόημα; Είστε σίγουροι ότι η απάντηση που δίνετε είναι σωστή; Πώς το ξέρετε;», «Υπάρχει άλλη απάντηση;», «Υπάρχει άλλος τρόπος να βρούμε τη λύση; Πού διαφέρουν οι διαφορετικές στρατηγικές που ακολουθήσατε;»* κ.λπ. Όταν παρέχει οδηγίες ο εκπαιδευτικός ενδείκνυται να εστιάζει κυρίως στη διαδικασία και όχι στο τελικό προϊόν της μαθηματικής διερεύνησης. Για παράδειγμα, μπορεί να απευθύνει στους μαθητές ερωτήσεις/υποδείξεις όπως: *«Ποια είναι τα στοιχεία - κλειδιά τους προβλήματος;», «Τι αλλάζει και τι παραμένει σταθερό; Διατηρήστε όλες τις μεταβλητές πλην μιας σταθερές και αρχίστε να πειραματίζεστε με αυτή. Ποιος ο ρόλος της; Ακολουθήστε την ιδία διαδικασία για κάθε μεταβλητή»* κ.λπ. (Van de Walle et al., 2014).

Στάδιο 3ο: Οι μαθητές παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της δραστηριότητάς τους και τις στρατηγικές που ανέπτυξαν και έτσι ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να υποστηρίξει τους μαθητές να προχωρήσουν σε συνδέσεις και επεκτάσεις των μαθηματικών ιδεών που προσεγγίστηκαν (Stein et al., 2008), ενώ παράλληλα επικυρώνει και αξιολογεί τη μαθηματική γνώση των μαθητών (Burton & Morgan, 2000).

Το βιβλίο αυτό υλοποιεί τα παραπάνω, παρέχοντας στους εκπαιδευτικούς υποστήριξη για τον σχεδιασμό και τη διδακτική διαχείριση των ΠΜΑ. *Ειδικότερα :*

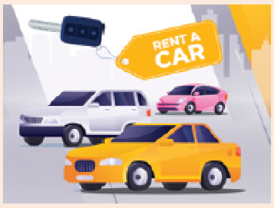
- Εισαγωγικές διερευνήσεις που αποτελούν γέφυρες ανάμεσα σε αυτά που ξέρουν και σε αυτά που πρόκειται να μάθουν (προκαταβολικοί οργανωτές) οι μαθητές.
- Θεωρία με παραδείγματα βασισμένα στις εμπειρίες των μαθητών.
- Εφαρμογές που λειτουργούν ως παραδείγματα για τους μαθητές.
- Πλήθος ψηφιακών δραστηριοτήτων σε κάθε ενότητα οι οποίες δίνουν την δυνατότητα διερευνήσεων και πολλαπλών αναπαραστάσεων.
- Συμπληρωματικό υλικό με πλήθος ιστορικών σημειωμάτων και εργασιών επέκτασης.
- Ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης.
- Ερωτήσεις κατανόησης.
- Συνθετικές εργασίες.
- Αξιολόγηση (Ασκήσεις και προβλήματα).
- Ανακεφαλαίωση.
- Επαναληπτικά έργα.

4. Ενδεικτικά παραδείγματα διδακτικής διαχείρισης.

Στο βιβλίο έχουμε δημιουργήσει πλήθος διερευνήσεων οι οποίες υποδεικνύουν την προτεινόμενη διδακτική διαχείριση, καθώς και πλήθος ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων που παρατίθενται στο συμπληρωματικό υλικό και διευρύνουν τα εργαλεία προσέγγισης των εννοιών από τους μαθητές.

Εξισώσεις, & 3.1., Σελ.64

Διερεύνηση



Μια εταιρεία ενοικίασης αυτοκινήτων ακολουθεί το εξής μοντέλο Α χρέωσης:
Πάγια μηνιαία χρέωση 50€ και 0,3€ για κάθε χιλιόμετρο κίνησης.

α. Να διατυπώσετε συμβολικά το μοντέλο Α της μηνιαίας χρέωσης της εταιρείας.

β. Η εταιρεία επεξεργάζεται διάφορα σχέδια για το πρόγραμμα αυτό με χρεώσεις οι οποίες θα ξεκινάνε από 0,2€ για κάθε χιλιόμετρο. Πώς διαμορφώνεται ένα τέτοιο μοντέλο Β χρέωσης;

γ. Ένα εναλλακτικό σχέδιο χρέωσης που συζητάει η εταιρεία είναι η μείωση της πάγιας μηνιαίας χρέωσης στο μοντέλο Β κατά 0,2€ για κάθε χιλιόμετρο που διανύεται. Πώς διαμορφώνεται το εναλλακτικό σχέδιο χρέωσης;

δ. Αν ένας πελάτης διαθέτει 250€, πόσα χιλιόμετρα θα μπορούσε να διανύσει σε έναν μήνα με ένα αυτοκίνητο που έχει ενοικιάσει από την εταιρεία με το εναλλακτικό μοντέλο χρέωσης;

ε. Πόσο πρέπει να χρεώνει η εταιρεία ανά χιλιόμετρο, ώστε ένας πελάτης που διαθέτει 250€ να μπορεί να διανύει 2000 χιλιόμετρα τον μήνα σύμφωνα με το εναλλακτικό μοντέλο χρέωσης;

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης:

Οι μαθητές πειραματίζονται σε μια οικεία κατάσταση της καθημερινότητας, προκειμένου να μοντελοποιήσουν εναλλακτικά σχέδια χρέωσης μια διαδρομής με ένα ταξί. Συγκρίνουν τα διαφορετικά μοντέλα και ερμηνεύουν τα αποτελέσματα του μαθηματικού πλαισίου στο επίπεδο των διαδρομών. Ανακαλύπτουν τη χρησιμότητα της αντίστροφης διαδικασίας (συνάρτησης) στο μαθηματικό μοντέλο για να βρούνε με δεδομένο διαθέσιμο ποσόν χρημάτων το μήκος της διαδρομής που μπορούν να ταξιδέψουν με ένα ταξί που έχει συγκεκριμένη χρέωση.

Σύνολα, & 2.2. , Σελ.57

Διερεύνηση

Στην πόλη μας εκδίδονται δύο εφημερίδες, η Πρωινή και η Μεσημεριανή. Ρωτήσαμε 10 ανθρώπους ποια εφημερίδα διαβάζουν και πήραμε τις εξής απαντήσεις: Οι A_1, A_2, A_5, A_6, A_7 διαβάζουν την Πρωινή και οι A_1, A_4, A_8, A_9, A_{10} τη Μεσημεριανή.

α. Πώς μπορούμε να παρουσιάσουμε τις παραπάνω πληροφορίες σε ένα διάγραμμα Venn;

β. Ποιοι διαβάζουν:
i. και τις δύο εφημερίδες; **ii.** τουλάχιστον μία από τις δύο εφημερίδες; **iii.** την Πρωινή αλλά όχι τη Μεσημεριανή;

γ. Ποιοι δεν διαβάζουν καμία από τις δύο εφημερίδες;

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης:

Οι μαθητές μέσα από μια οικεία κατάσταση της καθημερινότητας, πειραματίζονται στον μετασχηματισμό των λεκτικών πληροφοριών σε παρουσίασή τους με διαγράμματα Venn. Από τα διαγράμματα βρίσκουν απαντήσεις στα τρία ερωτήματα του (β) ερωτήματος και τις μετατρέπουν σε λεκτικές εκφορές. Διαμορφώνουν διαισθητική αντίληψη της έννοιας της τομής της ένωσης και συμπληρωματικών συνόλων.

Εξισώσεις 2ου βαθμού, & 3.3., Σελ.70

Διερεύνηση 1

Ο **Διόφαντος** (3ος αιώνας μ.Χ.) ήταν ο πρωτοπόρος των εξισώσεων καθώς επινόησε και έλυσε πολύπλοκα αλγεβρικά προβλήματα χρησιμοποιώντας ενδιαφέρουσες και πρωτότυπες μεθόδους. Στο βιβλίο του *Αριθμητικά* περιέχονται εξισώσεις 1ου βαθμού και μερικές 2ου βαθμού και τα προβλήματα που πρότεινε βοήθησαν στην εδραίωση της θεωρίας της εξίσωσης που αναπτύχθηκε αιώνες αργότερα.

Ένα από τα προβλήματα που παρουσίασε στο βιβλίο του είναι το εξής:
«Αν προσθέσω τον αριθμό των ελεφάντων που πίνουν νερό σε ένα ποτάμι στον αριθμό των χαυλιοδόντων τους και των ποδιών τους, θα πάρω το τετράγωνο του πλήθους των ελεφάντων. Πόσοι ελέφαντες υπάρχουν;»

Να προσπαθήσετε να απαντήσετε στο ερώτημα και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης:

Μέσα από ένα πρόβλημα που ανατρέχει περίπου 2300 χρόνια πριν και αποτελεί ένα ερέθισμα ενασχόλησης, οι μαθητές βλέπουν τη διαχρονικότητα των μαθηματικών ιδεών. Τα μαθηματικά που κάνουμε σήμερα έρχονται από το χτες και βελτιώνονται συνεχώς για να λύσουν πραγματικά προβλήματα. Οι μαθητές θα κάνουν τον κύκλο της μοντελοποίησης μετατρέποντας την φυσική κατάσταση σε μαθηματικό πρόβλημα που οδηγεί σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση. Στη συνέχεια θα επιλύσουν το μαθηματικό πρόβλημα, θα ελέγξουν τη λύση τους και θα απαντήσουν στο ερώτημα του Διόφαντου. Στο σημείο αυτό αξίζει ο διδάσκων να ανατρέξει και σε άλλα σχετικά ψηφιακά βοηθήματα και ψηφιακές αναφορές που υπάρχουν στο συμπληρωματικό υλικό και έχουμε ενσωματώσει στο βιβλίο, όπως:

- Σελ. 71: Ιστορικά σημειώματα (Εργασίες 1 και 2).
- Σελ. 74: Η γεωμετρική μέθοδος Al-Khwarizmi.

Συναρτήσεις, & 5.1., Σελ.90

Διερεύνηση. *Τιμές πώλησης βιβλίων*

Ένας βιβλιοπώλης προκειμένου να πουλήσει 5 βιβλία, τα οποία για συντομία ονομάζουμε Α, Β, Γ, Δ και Ε, αφού λάβει υπόψη του διάφορες παραμέτρους (Τιμή αγοράς, περιθώριο κέρδους, πολιτικές εκπτώσεων, ανταγωνισμός, έξοδα κ.τ.λ.) γράφει μια τιμή πάνω σε κάθε βιβλίο. Δηλαδή, καθορίζει μια τιμή πώλησης για κάθε βιβλίο.
Μπορεί, για λόγους πολιτικής, να αποφασίσει να πουλήσει δύο (ή και περισσότερα) βιβλία στην ίδια τιμή, αλλά δεν μπορεί για λόγους αξιοπιστίας να αποφασίσει να πουλήσει το ίδιο βιβλίο σε δύο (ή περισσότερες) διαφορετικές τιμές.

α. Πόσες τιμές μπορεί να έχει κάθε βιβλίο;
β. Σε κάθε τιμή πόσα βιβλία μπορεί να αντιστοιχούν;
γ. Να κάνετε αντιστοιχίσεις των βιβλίων σε τιμές πώλησης σύμφωνα με τους παραπάνω περιορισμούς.
δ. Τι παρατηρείτε για τον τρόπο σύνδεσης των βιβλίων με τις τιμές πώλησης;

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης:

Μέσα από ένα πρόβλημα της καθημερινότητας, οι μαθητές προσπαθώντας να απαντήσουν στα ερωτήματα του προβλήματος, οικοδομούν διαισθητικά βήμα-βήμα τις προϋποθέσεις χαρακτηρισμού μιας αντιστοίχισης ως συνάρτησης. Στη συνέχεια αποστασιοποιούνται προοδευτικά από το συγκεκριμένο πλαίσιο και με την υποστήριξη του εκπαιδευτικού μεταφράζουν τις παρατηρήσεις τους σε συμβολικό επίπεδο χτίζοντας τον ορισμό της συνάρτησης.

Συναρτήσεις, Κεφάλαιο 5.

Ο Γερμανός μαθηματικός August Ferdinand Möbius στα μέσα του 19ου αιώνα βρήκε έναν τρόπο να υπολογίζει το γινόμενο δυο θετικών αριθμών μέσω της γραφικής παράστασης της παραβολής $y = x^2$ για να βρει το γινόμενο α x β ένωσε τα σημεία της παραβολής με τετμημένες -α και β. Το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον κατακόρυφο άξονα είναι το ζητούμενο γινόμενο.
α) Ελέγξτε με έναν συμμαθητή σας τον ισχυρισμό για ένα ζευγάρι θετικών α και β.
β) Μπορείτε δουλεύοντας με έναν συμμαθητή σας να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας και του κατακόρυφου άξονα; Πώς τεκμηριώνεται ο ισχυρισμός του Mobius;
γ) Αν θεωρούσαμε άλλη παραβολή (π.χ. την $y = 2x^2$) τι θα ίσχυε; Μπορείτε να κάνετε έναν αντίστοιχο ισχυρισμό για την νέα παραβολή που θεωρήσατε;

Πρόταση διδακτικής διαχείρισης:

Μέσα από ένα πρόβλημα που ανατρέχει σχεδόν δύο αιώνες πριν και αποτελεί ένα ερέθισμα ενασχόλησης, οι μαθητές βλέπουν τη διαχρονικότητα των μαθηματικών ιδεών. Συνδέουν τη γραφική παράσταση της $y = x^2$, με την εύρεση δύο σημείων της, την ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία και βρίσκουν το σημείο τομής της με τον άξονα y'y. Ανακαλύπτουν ότι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας με τον άξονα y'y δίνει απάντηση στο ερώτημα του ισχυρισμού. Έτσι αντιλαμβάνονται πως ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού μπορεί να αντιμετωπισθεί με την οπτική της τομής μιας συνάρτησης με τον άξονα των τεταγμένων διευρύνοντας την οπτική τους. Ανακαλύπτουν στη συνέχεια ότι η διαδικασία αυτή είναι κατάλληλη και για την περίπτωση εύρεσης του γινομένου 2αβ, θεωρώντας τη συνάρτηση $y = 2x^2$. Η σημασία αυτού του προβλήματος πρέπει να αναδειχθεί και να αξιολογηθεί μέσα στο συγκεκριμένο ιστορικό πλαίσιο όπου δεν υπήρχαν υπολογιστές.

5. Αξιοποίηση της τεχνολογίας στη διδακτική διαχείριση (πρόσθετο εκπαιδευτικό υλικό).

Στο βιβλίο έχουμε δημιουργήσει μεγάλο αριθμό ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων. Παρακάτω παραθέτουμε πρόσθετο υλικό για την οργάνωση της διδακτικής διαχείρισης και της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών:

- *Γεωμετρική απεικόνιση άρρητων αριθμών*
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1870

- *Λύση ανισώσεων απολύτων τιμών με τη χρήση της αριθμογραμμής*
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1885

- *Γραφική επίλυση ανισώσεων με απόλυτη τιμή*
  http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5280

- *Η κλίση της ευθείας ψ=αχ*
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2222?locale=el

- *Σύγκριση των ψ=αχ και ψ=αχ + β*
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2128?locale=el

- *Μικροπείραμα για την συνάρτηση* $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5477

- *Τομή με τους άξονες , f(x)=(α-x)(β-x).*
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1873

- *Εντοπισμός των συντεταγμένων των σημείων τομής δυο συναρτήσεων, καθώς και των τετμημένων των σημείων μιας καμπύλης που βρίσκεται πάνω/κάτω από μια άλλη*
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1875

- *Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου*
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1752

- *Βασικές σχέσεις τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας*
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2115

- *Αποδείξεις βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων*
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5190

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ Αντιστοίχιση παραγράφων με τα ΠΜΑ	
Παράγραφος	**ΠΜΑ**
Κεφάλαιο 1: ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	
1.1.	Να διακρίνουν τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους και να ταξινομούν συγκεκριμένους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών
1.2.	Να διερευνούν την έννοια της «πυκνότητας» και της «διαδοχικότητας» στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών
1.3.	• Να συμβολίζουν με διαστήματα τα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών που προσδιορίζονται από ανισοτικές σχέσεις. • Να διερευνούν τις ιδιότητες που συνδέουν τη διάταξη με τις πράξεις και να αποδεικνύουν ανισοτικές σχέσεις.
1.4.	Να αποδεικνύουν και να χρησιμοποιούν τις ταυτότητες: $(α + β)^3$, $(α-β)^3$, $α^3 + β^3$ και $α^3-β^3$
1.5.	• Να ορίζουν αλγεβρικά την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού. • Να συνδέουν την απόλυτη τιμή με την απόσταση του αριθμού από το μηδέν. • Να ερμηνεύουν γεωμετρικά την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο πραγματικών αριθμών. • Να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής. • Να επιλύουν αλγεβρικά και γεωμετρικά απλές εξισώσεις, ανισώσεις και προβλήματα χρησιμοποιώντας ιδιότητες της απόλυτης τιμής.
1.6.	• Να ορίζουν τη ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού ως τη μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^ν=α$. • Να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες (γινόμενο και πηλίκο ριζών). • Να ορίζουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη και να διερευνούν τις ιδιότητές τους. • Να χρησιμοποιούν τον ορισμό και τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών παραστάσεων. • Να χρησιμοποιούν τις ταυτότητες σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον μετασχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων.
Κεφάλαιο 2: ΣΥΝΟΛΑ	
2.1.	• Να αναγνωρίζουν αν μια ιδιότητα ορίζει ένα σύνολο. • Να αναπαριστούν τα σύνολα με διάφορους τρόπους (αναγραφή και περιγραφή στοιχείων, διάγραμμα Venn). • Να εξετάζουν αν ένα αντικείμενο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και να δηλώνουν αυτή τη σχέση συμβολικά.
2.2.	Να αναγνωρίζουν και να δηλώνουν σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων και λεκτικά με κατάλληλη χρήση των συνδέσμων «ή» και «και».
Κεφάλαιο 3: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	
3.1.	Να επιλύουν απλές παραμετρικές εξισώσεις 1ου βαθμού και ρεαλιστικά προβλήματα που ανάγονται σε εξισώσεις αυτής της μορφής.
3.2.	Να επιλύουν απλές εξισώσεις της μορφής $x^ν=α$.
3.4	• Να επιλύουν αλγεβρικά εξισώσεις 2ου βαθμού. • Να επιλύουν απλές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού. • Να χρησιμοποιούν εξισώσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.

	• Να κατασκευάζουν δικά τους προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις δευτέρου βαθμού.
Κεφάλαιο 4: ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ	
4.1.	• Να παραγοντοποιούν ένα τριώνυμο δευτέρου βαθμού.
4.2.	• Να προσδιορίζουν αλγεβρικά το πρόσημο ενός τριωνύμου δευτέρου βαθμού.
4.3.	• Να επιλύουν ανισώσεις 2ου βαθμού αλγεβρικά. • Να χρησιμοποιούν ανισώσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και στην επίλυση προβλημάτων. • Να κατασκευάζουν δικά τους προβλήματα που επιλύονται με ανισώσεις 2ου βαθμού.
Κεφάλαιο 5: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	
5.1.	• Να αναγνωρίζουν συναρτήσεις μέσα από καταστάσεις συμμεταβολής της καθημερινής ζωής και να τις διακρίνουν από άλλες σχέσεις συμμεταβολής. • Να χρησιμοποιούν τον ορισμό της συνάρτησης για να εξετάσουν αν μία σχέση ή αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι. • Να συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση).
5.2.	Να ερμηνεύουν μία δεδομένη γραφική παράσταση συνάρτησης για να επιλύσουν ένα πρόβλημα.
5.3.	• Να ερμηνεύουν τον ρόλο των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx + β$ • Να αντλούν από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $f(x) = αx + β$ πληροφορίες για τη συνάρτηση, όπως η κλίση της και η εξίσωσή της. • Να χρησιμοποιούν πολυωνυμικές συναρτήσεις 1ου βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.
5.4.	• Να αναγνωρίζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$. • Να αναγνωρίζουν τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης: $f(x) = αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ με τον άξονα x΄x ως ρίζες της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$. • Να ερμηνεύουν γραφικά το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$. • Να επιλύουν ανισώσεις δευτέρου βαθμού γραφικά. • Να χρησιμοποιούν πολυωνυμικές συναρτήσεις 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.
Κεφάλαιο 6: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ	
6.1.	Εισαγωγή - Επανάληψη
6.2	Να ορίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας μεταξύ 0ο και 360ο με τη βοήθεια συστήματος συντεταγμένων.
6.3.	Γωνίες που διαφέρουν κατά 90^o, 180^o και 270^o
6.4.	• Να αποδεικνύουν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες. • Να υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας μεταξύ 0^o και 360^o όταν ένας από αυτούς είναι γνωστός.

Βιβλιογραφία

Andrews, P., Ryve, A., Hemmi, K., & Sayers, J. (2014). PISA, TIMSS and Finnish mathematics teaching: An enigma in search of an explanation. *Educational Studies in Mathematics, 87*(1), 7–26.

Bakker, A., & Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1), 37-59.

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, D. A. (2020). *Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II): A framework for statistics and data science education.* American Statistical Association.

Black, P., & Wiliam, D. (2010). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan, 80*(2).

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations*, Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques.* Grenoble: La pensée Sauvage.

Burton, L., & Morgan, C. (2000). Mathematicians writing. Journal for Research in Mathematics Education, 31, 429–453.

Clarke, D. J., & Mesiti, C. (2013). Writing the student into the task: Agency and Voice. In A. Watson, M. Ohtani, J. Ainley, J. Bolite Frant, M. Doorman, C. Kieran, A. Leung, C. Margolinas, P. Sullivan, D. Thompson, & Y. Yang (Eds.). Proceedings of ICMI Study 22: Task Design in Mathematics Education, (pp. 175–184). Oxford: International Commission on Mathematics Instruction

Dorier, J. L., & Maass, K. (2020). Inquiry-based mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 384–388). Springer.

Gaise report (2005). *Board of Directors for Endorsement.* American Statistical Association. USA.

Giannakoulias, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' Thinking about Fundamental Real Numbers Properties. In Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 416-425). Cyprus: ERME, Department of Education, University of Cyprus.

Fujita, T. & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing, Research in Mathematics Education, 9(1&2), 3-20.

González, G., & Eli, J. A. (2017). Prospective and in-service teachers' perspectives about launching a problem. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(2), 159-201.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and Its Applications*, 7.

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 115–139.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Information Age Publishing.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1998). *Πώς να το λύσω.* Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340.

Tam, M. (2000). Constructivism, instructional design, and technology: Implications for transforming distance learning. *Educational Technology & Society, 3*(2), 50-60.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2018). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (10th ed.). Pearson.

Vygotsky, L. (1988). *Σκέψη και γλώσσα.* Αθήνα, Εκδ. Γνώση.

Yasnitsky, A. (2018). Vygotsky: An Intellectual Biography. London and New York: Routledge

Ζαχαριάδης, Θ., Βλάχου Α., Διαμαντίδης Δ., Καραβασίλης Γ., Κορρές Κ., Μαστορίδης Ε., Μπαλωμένου Α., Μπαραλός Γ., Περυσινάκη Ε., Σιώπη Κ., Σκουρκέας Α., Σπάθης Μ., Φουσκάκης Δ. (2022*). Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Λυκείου. 2η Έκδοση,* Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Παπασταυρίδης, Σ. , Ζαχαριάδης, Θ., Κολέζα Ε., Μπαραλός Γ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., Σκούρας Α., Δημητρόπουλος Β., Κεϊσογλου Σ., Μηλιώνης Χ., Ορφανάκης Σ., Πανταζή Α., Τσικοπούλου Σ. (2015). Νέο πρόγραμμα Σπουδών, *Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Λυκείου*. *Έκδοση* Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Κολέζα, Ε. (2003). Νοητικές διεργασίες ανάπτυξης γεωμετρικών εννοιών. *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.*

Κολιάδης, Ε. (1997), Θεωρίες μάθησης και εκπαιδευτική πράξη. Κοινωνικογνωστικές θεωρίες . Αθήνα. Αυτοέκδοση.

Κόμης. Β (2004). *Εισαγωγή στις εκπαιδευτικές εφαρμογές των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών.* Εκδ. Νέες τεχνολογίες.

Μπαραλός, Γ. (2001). Η τυπική απόδειξη ισχύει πάντοτε. *Πρακτικά - Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, 18*, 340-352.

Μπαραλός, Γ. (2007). Το λάθος ως στοιχείο σχεδιασμού της διδασκαλίας στα μαθηματικά. Στο *Τα λάθη των μαθητών: Δείκτες Αποτελεσματικότητας ή Κλειδιά για τη Βελτίωση της Ποιότητας της Εκπαίδευσης* (σσ. 345-354).

Τζεκάκη, Μ., Μπαραλός, Γ., Σταγιόπουλος, Π.(2011). *Προσαρμογές αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο: Σχέδια διδασκαλίας για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (Τεύχος Α ΄ και Τεύχος Β΄).