Διδακτική διαχείριση και μαθηματική δραστηριότητα από τους μαθητές[1]

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Απαραίτητα στοιχεία για μια επιτυχημένη διδακτική διαχείριση του νέου προγράμματος σπουδών (ΠΣ) είναι η γνώση από τον/την εκπαιδευτικό των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων (ΠΜΑ) κάθε μαθηματικής ενότητας καθώς και ο κατάλληλος σχεδιασμός της διδασκαλίας σύμφωνα με τις θεωρητικές παραδοχές του νέου ΠΣ.

Τα ΠΜΑ του ΠΣ στο βιβλίο αυτό αναγράφονται στο εισαγωγικό μέρος κάθε ενότητας. Στη συνέχεια παραθέτουμε συνοπτικά τα παρακάτω:

1. **Κυρίαρχα διδακτικά μοντέλα.**
2. **Θεωρητικές παραδοχές του νέου ΠΣ και οι συνέπειές του στη διδακτική διαχείριση καθώς και στη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών.**
3. **Διδακτική διαχείριση και μαθηματική δραστηριότητα μαθητών.**
4. **Ενδεικτικές πηγές δυσκολιών των μαθητών.**
5. **Ενδεικτικά παραδείγματα.**
6. **Αξιοποίηση της τεχνολογίας στη διδακτική διαχείριση.**

1. Τα κυρίαρχα διδακτικά μοντέλα

Τις τελευταίες δεκαετίες στην εκπαίδευση κυριαρχούν τα ακόλουθα διδακτικά μοντέλα:

Α. Το **«παραδοσιακό»** διδακτικό μοντέλο, με εμφανείς τις επιδράσεις των συμπεριφοριστικών θεωριών μάθησης, οι οποίες εστιάζουν στην παρατηρήσιμη συμπεριφορά των μαθητών και θεωρούν ότι η μάθηση επιτυγχάνεται με τη σύνδεση ερεθισμάτων και αντιδράσεων. Στις θεωρίες αυτές η μάθηση ορίζεται «*ως η μόνιμη (μακροπρόθεσμη) αλλαγή της συμπεριφοράς που προκύπτει ως αποτέλεσμα άσκησης ή εμπειρίας*» (Κολιάδης, 1996, σ. 200), ενώ η αλλαγή της συμπεριφοράς πρέπει να μπορεί να παρατηρηθεί και να μετρηθεί. Για τις θεωρίες αυτές, ο εγκέφαλος των μαθητών είναι ένα μαύρο κουτί, όπου οι νοητικές διεργασίες που λαμβάνουν χώρα δεν αποτελούν αντικείμενο έρευνας, αφού δεν είναι παρατηρήσιμες (Κόμης, 2004).

Στο **παραδοσιακό** διδακτικό μοντέλο η γνώση θεωρείται ένα σύνολο πληροφοριών, γεγονότων, καταστάσεων, δεξιοτήτων, στάσεων που πρέπει να μεταδοθούν από τον δάσκαλο στον μαθητή χωρίς να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην κριτική σκέψη και τη δημιουργικότητα.

Ως προς το περιεχόμενο, η γνώση θεωρείται στατική, με αντικειμενικά χαρακτηριστικά, οργανωμένη σε μαθήματα και θεματικές ενότητες, χωρίς να δίνεται η δυνατότητα συμμετοχής του μαθητή στη διαμόρφωσή της. Τα λάθη θεωρούνται ανεπιθύμητα και ένδειξη ανεπαρκούς κατανόησης. Ως θεραπεία προκρίνεται η ενασχόληση με περισσότερες ασκήσεις και μεγαλύτερη προσπάθεια απομνημόνευσης (Μπαραλός, 2007).

Ο ρόλος των εκπαιδευτικών σε αυτό το πλαίσιο είναι να μεταδίδουν τη γνώση που κατέχουν στους μαθητές που δεν την κατέχουν δίνοντας το κατάλληλο ερέθισμα ώστε να επιτύχουν την επιθυμητή συμπεριφορά. Οι εσωτερικές νοητικές διεργασίες δεν ενδιαφέρουν αφού δεν μπορούν να παρατηρηθούν.

Για παράδειγμα, η απάντηση ενός μαθητή ότι $(α+β)^2= α^2+β^2$ εκλαμβάνεται ως έλλειψη κατανόησης, η οποία «διορθώνεται» με περισσότερες εξηγήσεις και ασκήσεις για εξάσκηση. Η ερμηνεία του λάθους ότι μπορεί να αποτελεί παρανόηση μιας προηγούμενης ιδιότητας όπως της $(αβ)^2= α^2β^2$ δεν είναι βασικό εργαλείο αυτού του μοντέλου.

Το «παραδοσιακό» μοντέλο κυριάρχησε τις προηγούμενες δεκαετίες στο εκπαιδευτικό μας σύστημα. Τα τελευταία χρόνια, αν και βρίσκεται σε υποχώρηση, εξακολουθεί να έχει ισχυρή παρουσία στη διδασκαλία.

[1] Το γραμματικό αρσενικό γένος «ο εκπαιδευτικός», «ο μαθητής» κ.ά. χρησιμοποιείται στο βιβλίο αυτό με συμπεριληπτικό τρόπο, δηλαδή εννοούμε «ο και η εκπαιδευτικός», «ο μαθητής και η μαθήτρια» κ.ά. Ομοίως, σε ανάλογες περιπτώσεις.

Ο εκπαιδευτικός παραμένει η κύρια πηγή γνώσης και αυθεντίας, ενώ ο ρόλος του μαθητή είναι να ακούει και να εφαρμόζει την παρεχόμενη γνώση. Η αξιολόγηση του μαθητή αφορά κυρίως στην ικανότητά του να αναπαράγει τις πληροφορίες που του έχουν δοθεί.

Β. Το **«σύγχρονο»** διδακτικό μοντέλο βασίζεται στις θεωρίες οικοδόμησης της γνώσης οι οποίες υποστηρίζουν ότι η γνώση δεν μεταδίδεται παθητικά από τους εκπαιδευτικούς στους μαθητές, αλλά αντίθετα αντιμετωπίζεται ως μια δυναμική και εξελισσόμενη διαδικασία, η οποία οικοδομείται μέσα από τη συνεργασία, τη διερεύνηση και την ενεργή συμμετοχή των μαθητών. Η μάθηση προκύπτει μέσω βιωματικών εμπειριών διερεύνησης προβλημάτων, επίλυσης πραγματικών ζητημάτων καθώς και αλληλεπίδρασης με το κοινωνικό περιβάλλον.

Η μάθηση είναι προϊόν της εννοιολογικής αλλαγής που επέρχεται λόγω της γνωστικής σύγκρουσης στην οποία υποβάλλονται οι μαθητές όταν οι γνώσεις τους αποδεικνύονται ανεπαρκείς να επιλύσουν ένα πρόβλημα. Τα λάθη αντανακλούν την προσπάθειά τους να επιλύσουν προβλήματα με βάση τις γνώσεις τους μέχρι τη στιγμή της εμπλοκής τους με τις νέες γνωστικές προκλήσεις. Είναι αποκαλυπτικά των αντιλήψεων του μαθητή και αντιμετωπίζονται ως ευκαιρία για μάθηση.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού αλλάζει. Λειτουργεί ως εμψυχωτής και συντονιστής στη διαδικασία της μάθησης, παρέχοντας στους μαθητές την κατάλληλη καθοδήγηση στην προσπάθειά τους για την οικοδόμηση της νέας γνώσης αντί να μεταδίδει απλώς τη γνώση που ήδη κατέχει. Η διδασκαλία δεν επικεντρώνεται στην παροχή πληροφοριών στους μαθητές, αλλά στην παροχή ευκαιριών που θα τους διευκολύνουν να οικοδομήσουν τη δική τους γνώση. Επομένως, στόχος της διδασκαλίας είναι να σχεδιάσει ο εκπαιδευτικός τα κατάλληλα περιβάλλοντα.

Βασική λειτουργία του εκπαιδευτικού είναι να βοηθά τους μαθητές να γίνουν ενεργοί συμμετέχοντες στη μάθησή τους και να οικοδομούν ουσιαστικές συνδέσεις μεταξύ της προηγούμενης γνώσης, της νέας γνώσης και των διαδικασιών που εμπλέκονται στη μάθηση (Tam, 2000).

Η γνώση αναπτύσσεται σε αλληλεπίδραση με το περιβάλλον (Vygotsky, 1988) και ο εκπαιδευτικός ή ένας συνομήλικος μαθητής διαμεσολαβεί για την απόκτησή της βοηθώντας να γεφυρωθεί ο χώρος ανάμεσα σε αυτό που ο μαθητής μπορεί να επιτύχει χωρίς βοήθεια και σε αυτό που μπορεί να πετύχει με τη βοήθειά τους (Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (Vygotsky in Yasnitsky (2018)).

Η επικοινωνία και η γλώσσα, η κατάλληλη καθοδήγηση, η ανατροφοδότηση και η νοητική σκαλωσιά (scaffolding) αναδεικνύονται ως ιδιαίτερα αποτελεσματικές.

Ευνοείται η δημιουργία συνεργατικού περιβάλλοντος στο οποίο η γνώση οικοδομείται μέσα από ομαδικές δραστηριότητες, διερευνήσεις, συζητήσεις, εικασίες, επαληθεύσεις ή διαψεύσεις και ατομικούς αναστοχασμούς.

Οι βασικές αρχές των θεωριών οικοδόμησης της μάθησης είναι:

- Η γνώση οικοδομείται στη βάση της προηγούμενης γνώσης, κάνοντας συγκρίσεις και δημιουργώντας συνδέσεις.
- Οι μαθητές κατακτούν τη γνώση συμμετέχοντας ενεργά σε διερευνήσεις και μαθηματικές δραστηριότητες με τη διαμεσολάβηση των εκπαιδευτικών.
- Δεν υπάρχουν σωστές ή λάθος απαντήσεις. Τα λάθη των μαθητών αποκαλύπτουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν για να αποκτήσουν νέα γνώση.
- Η διαδικασία είναι εξίσου σημαντική με το προϊόν.
- Η μάθηση διευκολύνεται σε συνεργατικό περιβάλλον.
- Χειραπτικά υλικά, προσομοιώσεις, νέες τεχνολογίες συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση.
- Οι εκπαιδευτικοί δρουν ως ερευνητές και «διευκολυντές» (fasciliators).

Το «σύγχρονο» μοντέλο διδασκαλίας εμπεριέχει επιλογές του «παραδοσιακού» μοντέλου οι οποίες αποκτούν ένα πιο συγκεκριμένο περιεχόμενο μέσα σε ένα ευρύτερο φάσμα διδακτικών ενεργειών.

2. Οι θεωρητικές παραδοχές του νέου ΠΣ και οι συνέπειές του στη διδακτική διαχείριση και στη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών.

Τα νέα ΠΣ προκρίνουν τις θεωρίες οικοδόμησης της γνώσης σύμφωνα με τις οποίες η γνώση κατασκευάζεται από τους μαθητές, οπότε ο προσανατολισμός των νέων βιβλίων είναι μαθητοκεντρικός.

Στο πλαίσιο αυτό, η παραδοσιακή διδασκαλία υποχωρεί δίνοντας προτεραιότητα στο διερευνητικό μοντέλο της μάθησης, δηλαδή σε μορφές μάθησης και διδασκαλίας που στηρίζονται κυρίως στην ενεργό συμμετοχή των μαθητών και στην εμπλοκή τους σε νέες διδακτικές καταστάσεις υπό την καθοδήγηση των εκπαιδευτικών. Βασική διάσταση του ρόλου του/της εκπαιδευτικού είναι να επιλέγει κατάλληλα μαθηματικά έργα και να εφαρμόζει μαθηματικές πρακτικές που προάγουν αυθεντικές μαθηματικές δραστηριότητες.

Η διδακτική διαχείριση της διδασκαλίας και η μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών στο νέο ΠΣ, ως συνέπεια της θεωρητικής παραδοχής ότι οι μαθητές κατασκευάζουν ενεργά τη δική τους κατανόηση και γνώση μέσω εμπειριών και αλληλεπιδράσεων, διαρθρώνεται στους ακόλουθους άξονες:
Ενεργητική μάθηση, Συνεργατική μάθηση, Μάθηση μέσα από διερευνήσεις και προβλήματα, Σκαλωσιές μάθησης, Οικοδόμηση γνώσης στηριγμένης σε υπάρχουσες γνώσεις, Αξιολόγηση ως μέρος της μάθησης, Χρήση της τεχνολογίας, Εννοιολογική κατανόηση, Μεγάλες ιδέες των μαθηματικών.

1. Ενεργητική μάθηση

- Ο/Η εκπαιδευτικός ενεργεί ως διευκολυντής και οι μαθητές ενθαρρύνονται να εξερευνήσουν μαθηματικές έννοιες, να κάνουν ερωτήσεις και να ανακαλύψουν μόνοι τους ή/και σε συνεργασία με συμμαθητές τους βιώσιμες απαντήσεις (Παπασταυρίδης κ.ά., 2015).
- Οι μαθητές συμμετέχουν σε διερευνήσεις και δραστηριότητες, χρησιμοποιούν μαθηματικά εργαλεία (π.χ. χάρακες, αριθμομηχανές), χειρίζονται αντικείμενα και μοντελοποιούν τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες με τη βοήθεια λογισμικών και χειραπτικών υλικών.

2. Συνεργατική μάθηση

- Οι μαθητές συχνά εργάζονται σε ζεύγη ή μικρές ομάδες για να λύσουν προβλήματα. Η συνεργασία τούς επιτρέπει να μοιράζονται διαφορετικές στρατηγικές, να εξηγούν τη σκέψη τους και να μαθαίνουν ο ένας από τις απόψεις του άλλου.
- Οι μαθητές εξηγούν τους συλλογισμούς τους, αιτιολογούν τις απαντήσεις τους και συμμετέχοντας σε συζητήσεις υποστηρίζονται στην εμβάθυνση της κατανόησής τους και στη βελτίωση της μαθηματικής τους σκέψης.

3. Μάθηση μέσα από διερευνήσεις και προβλήματα

- Ο εκπαιδευτικός ενεργεί ως σχεδιαστής και πάροχος κατάλληλων καταστάσεων μάθησης, όπως διερευνήσεις και προβλήματα που έχουν νόημα για τους μαθητές.
- Οι μαθητές εμπλέκονται στις σχεδιασμένες από τον εκπαιδευτικό καταστάσεις μάθησης, οι οποίες απαιτούν εξερεύνηση και διερεύνηση. Δημιουργούν υποθέσεις, δοκιμάζουν τις ιδέες τους και μαθαίνουν μέσω δοκιμής και λάθους.

4. Σκαλωσιές μάθησης

- Οι καθηγητές παρέχουν σκαλωσιές μάθησης, προσφέροντας υποδείξεις, κάνοντας καθοδηγητικές ερωτήσεις ή/και εισάγοντας εργαλεία (χειραπτικά ή/και ψηφιακά) που βοηθούν τους μαθητές να κατασκευάσουν μαθηματικά νοήματα.
- Η δουλειά του εκπαιδευτικού είναι να δημιουργεί διδακτικές καταστάσεις και να βοηθά τους μαθητές να βρίσκουν απαντήσεις στα ερωτήματα που δημιουργούνται. Η βοήθεια μειώνεται σταδιακά καθώς οι μαθητές αποκτούν κατανόηση και γίνονται αυτόνομοι.
- Η διδασκαλία προσαρμόζεται στις ατομικές ανάγκες των μαθητών παρέχοντας διαφορετικές εργασίες ή προκλήσεις, ανάλογα με το επίπεδο κατανόησης του κάθε μαθητή.

5. Συμπερίληψη, διαφοροποίηση και εξατομικευμένη μάθηση

Η συμπερίληψη, η διαφοροποιημένη διδασκαλία και η εξατομικευμένη μάθηση αποτελούν θεμελιώδεις αρχές για την προώθηση της ισότιμης πρόσβασης στη μαθηματική εκπαίδευση. Η διαφοροποίηση ενθαρρύνει την παροχή ευέλικτων μαθησιακών εμπειριών, προσαρμοσμένων στις πολιτισμικές, γνωστικές και προσωπικές ιδιαιτερότητες των μαθητών. Ειδικότερος σχεδιασμός και διαχείριση χρειάζεται για μαθητές με μαθησιακά προβλήματα, προκειμένου να ωφεληθούν από τη συμμετοχή τους στη μαθησιακή διαδικασία (Τζεκάκη, Μπαραλός, Σταγιόπουλος, 2011).

6. Οικοδόμηση γνώσης στηριγμένης σε υπάρχουσες γνώσεις

- Οι μαθητές ενθαρρύνονται να συνδέσουν νέες μαθηματικές έννοιες με αυτό που ήδη γνωρίζουν προκειμένου να οικοδομήσουν μια πιο ολοκληρωμένη και συνεκτική κατανόηση των μαθηματικών.
- Οι μαθητές παρακινούνται να αναστοχαστούν πώς λειτούργησαν, τι έμαθαν και πώς μπορούν να εφαρμόσουν όσα έμαθαν σε νέες καταστάσεις.

7. Αξιολόγηση ως μέρος της μάθησης

- Οι εκπαιδευτικοί δρουν ως ερευνητές. Παρατηρούν τους μαθητές, κάνουν διερευνητικές ερωτήσεις και παρέχουν ανατροφοδότηση που βοηθά στην καθοδήγηση της περαιτέρω μάθησης.
- Τα λάθη θεωρούνται ως ευκαιρίες μάθησης και όχι ως αποτυχίες. Οδηγούν σε νέες ερωτήσεις και απορίες, δίνοντας τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να αντιληφθούν έννοιες τις οποίες οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει και να αποκτήσουν μια βαθύτερη γνώση των παρανοήσεών τους (Ζαχαριάδης κ.ά., 2022).
- Η διαμορφωτική αξιολόγηση αποτελεί συστατικό στοιχείο της διδασκαλίας, που αποσκοπεί στη συνεχή παρακολούθηση και βελτίωση της μαθησιακής διαδικασίας (Black & Wiliam, 2010). Επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς να εντοπίζουν παρανοήσεις, να προσαρμόζουν τις διδακτικές προσεγγίσεις στις αναπτυξιακές και μαθησιακές ανάγκες των μαθητών και να διαμορφώνουν διαφοροποιημένες δραστηριότητες που ενισχύουν την κατανόηση και τη δημιουργική σκέψη. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να εφαρμόζουν την αυτοαξιολόγηση και την ετεροαξιολόγηση μέσα από συζητήσεις και συνεργατικές δραστηριότητες, να αναστοχάζονται πάνω στην πρόοδό τους, να αναγνωρίζουν τις δυνατότητές τους και να καλλιεργούν την αυτονομία και την υπευθυνότητα στη μάθηση.

8. Χρήση της τεχνολογίας

- Χρησιμοποιούνται διαδραστικά εργαλεία, λογισμικά και προσομοιώσεις για την εξερεύνηση μαθηματικών εννοιών με ελκυστικό και λειτουργικό τρόπο.
- Οι μαθητές χρησιμοποιούν με τη βοήθεια και υπό την επίβλεψη του εκπαιδευτικού το διαδίκτυο για να ερευνήσουν μαθηματικά προβλήματα, να εξερευνήσουν διαφορετικές μεθόδους ή να βρουν πραγματικές εφαρμογές των μαθηματικών που μαθαίνουν.

9. Εννοιολογική κατανόηση

- Δίνεται έμφαση στην κατανόηση του «γιατί» και του «πώς» και όχι απλώς στην απομνημόνευση τύπων ή αλγορίθμων.
- Οι μαθητές αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων.
- Οι μαθητές ενθαρρύνονται να αναγνωρίσουν συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας έννοιας καθώς και μεταξύ μαθηματικών εννοιών.

10. Μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών

Ανάδειξη των μεγάλων ιδεών στα Μαθηματικά, δηλαδή των κεντρικών ιδεών στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών οι οποίες συνδέουν διαφορετικές μαθηματικές έννοιες ή οπτικές σε ένα συνεκτικό σύνολο (NCTM, 2000). Ειδικότερα στο Λύκειο, αναδεικνύεται η έννοια της απόδειξης και διαχωρίζεται από την επαλήθευση και τη δικαιολόγηση (Μπαραλός, 2001).

Στο νέο ΠΣ ως μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών αναγνωρίζονται: η *Μαθηματική δομή*, η *Απόδειξη*, η *Γενίκευση*, η *Μεταβολή*, η *Ισοδυναμία*, οι *Μετασχηματισμοί* και η *Προσέγγιση-σύγκλιση*.

3. Διδακτική διαχείριση και μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών

Καθοριστικά στοιχεία για τη διδακτική διαχείριση είναι:

- Η έμφαση που πρέπει να δίνει ο εκπαιδευτικός στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών, στη μαθηματική δραστηριότητα και μάθηση και όχι απλά στη διεκπεραίωση του έργου.
- Η δυνατότητα του/της εκπαιδευτικού να υποστηρίζει και να συντονίζει τον διάλογο και τη συζήτηση μέσα στην τάξη (Clarke & Mesiti, 2013).

Ένα καλά σχεδιασμένο έργο ενισχύει τη διερεύνηση, τον πειραματισμό και τον αναστοχασμό, ενώ η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και ψηφιακών εργαλείων διευκολύνει την κατανόηση και την επικοινωνία ιδεών.

Η διδακτική διαχείριση σύμφωνα με τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων (Brousseau, 1998) η οποία εκπορεύεται από τις θεωρίες κατασκευής της γνώσης είναι ένα εργαλείο για την εξέλιξη της μαθησιακής διαδικασίας στην τάξη, η οποία μπορεί να αναλυθεί στις ακόλουθες τέσσερις φάσεις:

Διερευνητική φάση (Δράση μαθητών)

Ο εκπαιδευτικός οργανώνει ένα διδακτικό περιβάλλον με σκοπό να εμπλέξει τους μαθητές του και στη συνέχεια να απομακρυνθεί. Ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη αυτού του περιβάλλοντος θα πρέπει να περιλαμβάνει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Οι μαθητές να είναι πρόθυμοι να το υιοθετήσουν σαν δικό τους και
- να έχουν τα μέσα να κατασκευάσουν μόνοι τους τη λύση ή το τελικό προϊόν.

Σε αυτή την κατάσταση, η γνώση εμφανίζεται μέσα από μια διερεύνηση, την επίλυση ενός προβλήματος ή μια διαδικασία μοντελοποίησης.

Φάση διατύπωσης

Ο εκπαιδευτικός έχει φροντίσει να αναπτυχθεί ένα διδακτικό περιβάλλον που βασίζεται σε προηγούμενες κοινές εμπειρίες, ενθαρρύνει και συντονίζει ανταλλαγές απόψεων.

Οι μαθητές ανταλλάσσουν και συγκρίνουν τις παρατηρήσεις τους. Σε αυτή την προσπάθεια να επικοινωνήσουν οδηγούνται στη δημιουργία κοινών νοημάτων καθώς και στη διαμόρφωση μιας γλώσσας επικοινωνίας.

Η γνώση εμφανίζεται ως αποτέλεσμα μιας προσωπικής εμπειρίας, η οποία όταν κοινοποιηθεί αποπροσωποποιείται και στη συνέχεια ενσωματώνεται στην εμπειρία της κοινότητας των μαθητών.

Φάση επικύρωσης

Ο εκπαιδευτικός ενεργεί ως συντονιστής. Παρεμβαίνει με σκοπό την ανάπτυξη παραγωγικού διαλόγου, παρακινεί για περισσότερη ακρίβεια και μεθοδικότητα στη χρήση των εννοιών και εφιστά την προσοχή των μαθητών σε πιθανές αντιφάσεις.

Οι μαθητές εμπλέκονται σε μαθηματικά έργα προσπαθώντας να επαληθεύσουν μια υπόθεση ή να εξηγήσουν κάποιο φαινόμενο.

Η γνώση έχει τα δυναμικά χαρακτηριστικά μιας θεωρίας εν τη γενέσει της.

Η φάση αυτή έχει διαλεκτικό χαρακτήρα και *«η κάθε υπόθεση πρέπει να αιτιολογείται επαρκώς ώστε είτε να γίνει αποδεκτή είτε να απορριφθεί»* (Brousseau, 1997).

Φάση θεσμοποίησης

Ο εκπαιδευτικός ως εκπρόσωπος των επίσημων μαθηματικών βοηθά τους μαθητές στη διατύπωση των αποτελεσμάτων της φάσης της επικύρωσης σύμφωνα με ορολογίες, ορισμούς, θεωρήματα και κανόνες, όπως παρουσιάζονται από τον θεσμό των αναλυτικών προγραμμάτων, των σχολικών βιβλίων και της επίσημης παιδείας.

Για τους μαθητές το διδακτικό περιβάλλον είναι ένα σαφές πλαίσιο κανόνων.

Παρέχονται στους μαθητές εφαρμογές, ασκήσεις εμπέδωσης και έργα επέκτασης. Χρειάζεται προσοχή γιατί η πρόωρη θεσμοποίηση μπορεί να διακόψει την κατασκευή νοήματος και η όψιμη να ενισχύσει ανακριβείς ερμηνείες. Και στις δύο περιπτώσεις δημιουργούνται εμπόδια προσπέλασης της γνώσης.

Ο σχεδιασμός του βιβλίου σε σχέση με τη διδακτική διαχείριση έχει ως αφετηρία τη διερευνητική φάση (Δράση μαθητών) και ακολουθούν οι φάσεις της διατύπωσης, της επικύρωσης και, τέλος, της θεσμοποίησης.

Η διδακτική διαχείριση ενός μαθηματικού έργου (διερεύνηση, ερώτημα, πρόβλημα) επικεντρώνεται στην ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα και στη δημιουργία ενός πλαισίου διαπραγμάτευσης μέσω διαλόγου. Η μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών προκύπτει από μια διδασκαλία που υποστηρίζει τη διερεύνηση στο σύγχρονο διδακτικό μοντέλο και έχει τις ακόλουθες διαστάσεις:

Α. Εμπλέκει τους μαθητές στις διερευνήσεις του βιβλίου ή σε άλλες που θεωρούνται κατάλληλες για κάθε διδακτική ενότητα, έτσι ώστε να συμμετέχουν ενεργά σε διαδικασίες σκέψης που ενθαρρύνουν και ευνοούν την ανάπτυξη συνδέσεων.

Τα έργα για τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών που δίνονται προτείνεται να :

- είναι κατανοητά από όλους τους μαθητές.
- είναι ενδιαφέροντα για τους μαθητές.
- περιλαμβάνουν ρεαλιστικές νοητικές και χρονικές προσδοκίες.
- αναπτύσσουν την κατανόηση και την εκμάθηση διαδικασιών.
- αντιμετωπίζονται με ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών.
- δίνουν έμφαση στις διαδικασίες και στην εννοιολογική κατανόηση. Όχι στην απάντηση.

Β. Ευνοεί τη δημιουργία συνεργατικού περιβάλλοντος και υποστηρίζει την ανταλλαγή επιχειρημάτων και ιδεών προκειμένου να οικοδομηθούν συγκεκριμένα μαθηματικά νοήματα.

Το περιβάλλον της τάξης προτείνεται να:

- υποστηρίζει την ανταλλαγή ιδεών και προσεγγίσεων.
- αξιοποιεί διαφορετικές ιδέες.
- προωθεί την ανταλλαγή απόψεων και τον κριτικό διάλογο.
- ενθαρρύνει την υποστήριξη των μαθητών από συμμαθητές τους.

Γ. Απευθύνει ερωτήσεις που κινητοποιούν τους μαθητές και προωθούν την ανάπτυξη συλλογισμών και επικοινωνίας των μαθηματικών ιδεών τους.

Οι ερωτήσεις προτείνεται να :

- θέτουν μαθηματικές προκλήσεις στους μαθητές.
- ενθαρρύνουν την αποτίμηση και ανάλυση μεθόδων και στρατηγικών.
- αξιοποιούν τις παρανοήσεις και τα λάθη προκειμένου οι ίδιοι οι μαθητές να μπορέσουν να αντικαταστήσουν τα ενδεχόμενα ανεπαρκή και ακατάλληλα γνωστικά τους σχήματα.
- προωθούν την εξερεύνηση και την ανακάλυψη των νέων ιδεών.

Η εφαρμογή ενός μαθηματικού έργου στη σχολική τάξη μπορεί να διακριθεί στα ακόλουθα στάδια :

Στάδιο 1ο: Στο πρώτο στάδιο της εισαγωγής του μαθηματικού έργου στην τάξη, ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν το πλαίσιο του έργου και να το συνδέσουν με τις προηγούμενες μαθηματικές τους γνώσεις. Παράλληλα, τους ενθαρρύνει στην επιλογή και χρήση κατάλληλων πόρων (π.χ. χειραπτικών, ψηφιακών, οπτικών αναπαραστάσεων) (González & Eli, 2017).

Στάδιο 2ο: Οι μαθητές εργάζονται ατομικά ή σε ομάδες και ο εκπαιδευτικός αλληλοεπιδρά μαζί τους. Είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να έχει προβλέψει κατά τον σχεδιασμό του μαθηματικού έργου πιθανές στρατηγικές των μαθητών και πιθανές παρανοήσεις και να έχει σκεφτεί τρόπους και μεθόδους για να τις αναγνωρίσει και να τις διαχειριστεί. Μπορεί να υποστηρίξει τον διάλογο και τη συζήτηση στις ομάδες βοηθώντας τους να αποσαφηνίσουν τις ιδέες τους με διάφορους τρόπους, όπως, για παράδειγμα, με διευκρινιστικές ερωτήσεις ή ζητώντας από έναν μαθητή να αναδιατυπώσει τις ιδέες ενός άλλου μαθητή της ομάδας τους. Επίσης, ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει έμφαση στη συλλογιστική σκέψη των μαθητών και στη νοερή επιχειρηματολογία με ερωτήσεις όπως: *«Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον συμμαθητή σας; Γιατί;», «Τι θα γινόταν αν…; Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;» «Η απάντηση που δώσατε έχει νόημα; Είστε σίγουροι ότι η απάντηση που δίνετε είναι σωστή; Πώς το ξέρετε;», «Υπάρχει άλλη απάντηση;», «Υπάρχει άλλος τρόπος να βρούμε τη λύση; Πού διαφέρουν οι διαφορετικές στρατηγικές που ακολουθήσατε;»* κ.λπ. Όταν παρέχει οδηγίες ο εκπαιδευτικός ενδείκνυται να εστιάζει κυρίως στη διαδικασία και όχι στο τελικό προϊόν της μαθηματικής διερεύνησης. Για παράδειγμα, μπορεί να απευθύνει στους μαθητές ερωτήσεις/υποδείξεις, όπως: *«Ποια είναι τα στοιχεία - κλειδιά του προβλήματος;», «Τι αλλάζει και τι παραμένει σταθερό; Διατηρήστε όλες τις μεταβλητές, πλην μίας, σταθερές* *και αρχίστε να πειραματίζεστε με αυτή. Ποιος ο ρόλος της; Ακολουθήστε την ίδια διαδικασία για κάθε μεταβλητή»* κ.λπ. (Van de Walle et al., 2014).

Στάδιο 3ο: Οι μαθητές παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της δραστηριότητάς τους και τις στρατηγικές που ανέπτυξαν και έτσι ο/η εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να τους υποστηρίξει να προχωρήσουν σε συνδέσεις και επεκτάσεις των μαθηματικών ιδεών που προσεγγίστηκαν (Stein et al., 2008), ενώ παράλληλα επικυρώνει και αξιολογεί τη μαθηματική γνώση τους (Burton & Morgan, 2000).

Το βιβλίο αυτό υλοποιεί τα παραπάνω, παρέχοντας στους/στις εκπαιδευτικούς υποστήριξη για τον σχεδιασμό και τη διδακτική διαχείριση των ΠΜΑ. *Ειδικότερα :*

- Εισαγωγικές διερευνήσεις που αποτελούν γέφυρες ανάμεσα σε αυτά που οι μαθητές ξέρουν και σε αυτά που πρόκειται να μάθουν (προκαταβολικοί οργανωτές) .
- Θεωρία με παραδείγματα βασισμένα στις εμπειρίες των μαθητών.
- Εφαρμογές που λειτουργούν ως παραδείγματα.
- Πλήθος ψηφιακών δραστηριοτήτων, σε κάθε ενότητα, οι οποίες δίνουν τη δυνατότητα διερευνήσεων και πολλαπλών αναπαραστάσεων.
- Συμπληρωματικό υλικό με πολλά ιστορικά σημειώματα και εργασίες επέκτασης.
- Ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης.
- Ερωτήσεις κατανόησης.
- Συνθετικές εργασίες.
- Αξιολόγηση (Ασκήσεις και προβλήματα).
- Ανακεφαλαίωση.
- Επαναληπτικά έργα.

4. Ενδεικτικές πηγές δυσκολιών των μαθητών

- Δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου μπορεί να θεωρηθεί ως η πιθανότητα πραγματοποίησής του μόνο όταν ο αριθμός επαναλήψεων του πειράματος τύχης είναι πολύ μεγάλος.
- Δυσκολεύονται να διακρίνουν αν η πιθανότητα εμφάνισης του 80% των ρίψεων ενός κέρματος είναι «κεφάλι», είναι μεγαλύτερη σε 30 ή σε 300 ρίψεις.
- Θεωρούν ότι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι μοναδικός.
  Δυσκολεύονται να αντιληφθούν ότι αν στρίψουμε ένα συνηθισμένο κέρμα 2 φορές και μας ενδιαφέρει το πλήθος των κεφαλών που φέραμε, μπορούμε εξίσου καλά να θεωρήσουμε ως δειγματικό χώρο το σύνολο $\Omega_1 = \{K, \Gamma\}$ ή το σύνολο $\Omega_2 = \{0,1,2\}$.
- Δεν μοντελοποιούν κατάλληλα ένα πρόβλημα πιθανοτήτων, προσδιορίζοντας διαισθητικά ακατάλληλη πιθανότητα.
- Απαντούν πολλές φορές παρορμητικά σε προβλήματα πιθανοτήτων για να προσδιορίσουν τη ζητούμενη πιθανότητα.
- Θεωρούν ότι ένα ποσοτικό και ένα κατηγορικό χαρακτηριστικό διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας-αιτιατού.

5. Ενδεικτικά παραδείγματα διδακτικής διαχείρισης

Στο βιβλίο έχουμε δημιουργήσει πλήθος διερευνήσεων οι οποίες υποδεικνύουν την προτεινόμενη διδακτική διαχείριση, καθώς και πλήθος ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων που παρατίθενται στο συμπληρωματικό υλικό και διευρύνουν τα εργαλεία προσέγγισης των εννοιών από τους μαθητές.

Στατιστική 2.1.

Ένα κατάστημα καταγράφει τους πελάτες που ψωνίζουν κατά τη διάρκεια των δέκα πρώτων ημερών ενός μήνα στον ακόλουθο πίνακα:

Ημέρες	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Πελάτες	15	20	25	40	30	90	25	20	35	45

i. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος.
ii. Να ερμηνεύσετε τις τιμές τους.
iii. Να αφαιρέσετε την $6^{η}$ ημέρα από το δείγμα. Να υπολογίσετε εκ νέου τη μέση τιμή και τη διάμεσο χωρίς την 6η ημέρα του δείγματος και να συγκρίνετε τις νέες τιμές με τις αρχικές των μέτρων. Τι παρατηρείτε;
iv. Να συγκρίνετε την τυπική απόκλιση του δείγματος καθώς και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος στα δύο δείγματα (με και χωρίς την 6η ημέρα).
v. Πώς επηρεάζουν οι ακραίες/απόμακρες τιμές, τα μέτρα θέσης του (i) ερωτήματος και τα μέτρα μεταβλητότητας του (iv) ερωτήματος.

Διδακτική διαχείριση:
Με τα ερωτήματα στοχεύουμε στην κατανόηση από τους μαθητές πώς οι απόμακρες τιμές επηρεάζουν μέτρα θέσης και μεταβλητότητας και είναι σε θέση σε τέτοιες περιπτώσεις να επιλέγουν κατάλληλα μέτρα. Στο ερώτημα (iii) χρησιμοποιείται μια περίπτωση δείγματος που έχει αφαιρεθεί η απόμακρη τιμή και μια περίπτωση δείγματος που δεν έχει αφαιρεθεί η απόμακρη τιμή. Τα ερωτήματα οδηγούν τους μαθητές να παρατηρήσουν ότι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση επηρεάζονται κυρίως από τις απόμακρες τιμές και καθόλου ή λίγο η διάμεσος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

Πιθανότητες, &2. – Μη ισοπίθανα ενδεχόμενα

Μη ισοπίθανα ενδεχόμενα
Η Μαρία και ο Γιώργος ρίχνουν ο καθένας από ένα ζάρι συγχρόνως.
Η Μαρία κερδίζει αν η διαφορά των ενδείξεων των άνω όψεων των ζαριών είναι 0, 1 ή 2. Ο Γιώργος κερδίζει αν η διαφορά των ενδείξεων είναι 3, 4 ή 5. Να εξεταστεί αν το παιχνίδι είναι δίκαιο, δηλαδή αν η Μαρία και ο Γιώργος έχουν την ίδια πιθανότητα να κερδίσουν.

Διδακτική διαχείριση :

Οι μαθητές συνήθως απαντούν αυθόρμητα ότι το παιχνίδι είναι δίκαιο, αφού «ο κάθε παίκτης κερδίζει σε τρεις από τις συνολικά έξι περιπτώσεις», υποθέτοντας ότι τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Με μια σειρά ερωτήσεων οδηγούμε τους μαθητές σε γνωστική σύγκρουση:

- *Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος ;*

Οι μαθητές απαντούν συνήθως $\Omega = \{0,1,2,3,4,5\}$

- *Είναι ισοπίθανα τα απλά ενδεχόμενα ;*

Οι μαθητές απαντούν συνήθως θετικά.

- *Δημιουργήστε έναν πίνακα με τα πιθανά αποτελέσματα*

Οι μαθητές φτιάχνουν τον πίνακα:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

- *Δημιουργήστε έναν πίνακα με τις πιθανές διαφορές*

Οι μαθητές φτιάχνουν τον πίνακα:

Διαφορά	0	1	2	3	4	5
Πιθανότητα	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

- *Βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α: «κερδίζει η Μαρία» , Β: «κερδίζει ο Γιώργος»*

Οι μαθητές εύκολα βρίσκουν ότι:

$P(A) = P(0) + P(1) + P(2) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} = \frac{2}{3}$ και $P(B) = P(3) + P(4) + P(5) = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{3}$

- *Τι συμπεραίνετε ;*

Οι μαθητές αναθεωρούν την αρχική τους εκτίμηση στη βάση των αποτελεσμάτων.

- *Τα απλά ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα;*

Οι μαθητές διαπιστώνουν ότι δεν είναι ισοπίθανα τα απλά ενδεχόμενα του Ω και αναθεωρούν την αρχική λανθασμένη υπόθεση.

6. Αξιοποίηση της τεχνολογίας στη διδακτική διαχείριση

Πρόσθετο υλικό για την οργάνωση της διδακτικής διαχείρισης και της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών:

- Δραστηριότητα σε περιστρεφόμενη σβούρα (έννοια της πιθανότητας):
https://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2009?locale=el

- Δραστηριότητα με ρίψη νομίσματος:
https://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2011?locale=el

- Δραστηριότητα με πιθανότητες και κίνηση:
https://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1984?locale=el

- Δραστηριότητα με ρίψη νομίσματος και εύρεση της σχετικής συχνότητας
http://www.shodor.org/interactivate/activities/Coin/

- Προσομοίωση ταυτόχρονης ρίψης νομισμάτων ή ζαριών (2 έως 16):
https://www.random.org/coins/

https://www.random.org/dice/

- Ρίχνοντας ένα νόμισμα 50, 100, ..., 1000 φορές, οι μαθητές μπορούν να εκτιμήσουν την πιθανότητα να έρθει «κεφάλι» ή «γράμματα».
http://www.shodor.org/interactivate/activities/Coin/

Βιβλιογραφία:

Andrews, P., Ryve, A., Hemmi, K., & Sayers, J. (2014). PISA, TIMSS and Finnish mathematics teaching: An enigma in search of an explanation. *Educational Studies in Mathematics, 87*(1), 7–26.

Bakker, A., & Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1), 37-59.

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, D. A. (2020). *Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II): A framework for statistics and data science education.* American Statistical Association.

Black, P., & Wiliam, D. (2010). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan, 80*(2).

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations*, Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques.* Grenoble: La pensée Sauvage.

Burton, L., & Morgan, C. (2000). Mathematicians writing. Journal for Research in Mathematics Education, 31, 429–453.

Clarke, D. J., & Mesiti, C. (2013). Writing the student into the task: Agency and Voice. In A. Watson, M. Ohtani, J. Ainley, J. Bolite Frant, M. Doorman, C. Kieran, A. Leung, C. Margolinas, P. Sullivan, D. Thompson, & Y. Yang (Eds.). Proceedings of ICMI Study 22: Task Design in Mathematics Education, (pp. 175–184). Oxford: International Commission on Mathematics Instruction

Dorier, J. L., & Maass, K. (2020). Inquiry-based mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 384–388). Springer.

Fujita, T. & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing, Research in Mathematics Education, 9(1&2), 3-20.

Gaise report (2005). *Board of Directors for Endorsement.* American Statistical Association. USA.

Giannakoulias, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' Thinking about Fundamental Real Numbers Properties. In Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 416-425). Cyprus: ERME, Department of Education, University of Cyprus.

González, G., & Eli, J. A. (2017). Prospective and in-service teachers' perspectives about launching a problem. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(2), 159-201.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and Its Applications*, 7.

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 115–139.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Information Age Publishing.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1998). *Πώς να το λύσω.* Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340.

Tam, M. (2000). Constructivism, instructional design, and technology: Implications for transforming distance learning. *Educational Technology & Society, 3*(2), 50-60.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2018). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (10th ed.). Pearson.

Vygotsky, L. (1988). *Σκέψη και γλώσσα.* Αθήνα, Εκδ.Γνώση.

Yasnitsky, A. (2018). Vygotsky: An Intellectual Biography. London and New York: Routledge

Ζαχαριάδης Θ., Βλάχου Α., Διαμαντίδης Δ., Καραβασίλης Γ., Κορρές Κ., Μαστορίδης Ε., Μπαλωμένου Α., Μπαραλός Γ., Περυσινάκη Ε., Σιώπη Κ., Σκουρκέας Α., Σπάθης Μ., Φουσκάκης Δ. (2022*). Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Λυκείου. 2η Έκδοση,* Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Παπασταυρίδης, Σ., Ζαχαριάδης, Θ., Κολέζα Ε., Μπαραλός Γ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., Σκούρας Α., Δημητρόπουλος Β., Κεϊσογλου Σ., Μηλιώνης Χ. , Ορφανάκης Σ., Πανταζή Α., Τσικοπούλου Σ. (2015). Νέο πρόγραμμα Σπουδών, *Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Λυκείου. Έκδοση* Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Κολέζα, Ε. (2003). Νοητικές διεργασίες ανάπτυξης γεωμετρικών εννοιών. *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.*

Κολιάδης, Ε. (1997). Θεωρίες μάθησης και εκπαιδευτική πράξη. Κοινωνικογνωστικές θεωρίες . Αθήνα. Αυτοέκδοση.

Κόμης, Β. (2004). *Εισαγωγή στις εκπαιδευτικές εφαρμογές των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών.* Εκδ. Νέες τεχνολογίες.

Μπαραλός, Γ. (2001). Η τυπική απόδειξη ισχύει πάντοτε. *Πρακτικά - Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, 18*, 340-352.

Μπαραλός, Γ. (2007). Το λάθος ως στοιχείο σχεδιασμού της διδασκαλίας στα μαθηματικά. Στο *Τα λάθη των μαθητών: Δείκτες Αποτελεσματικότητας ή Κλειδιά για τη Βελτίωση της Ποιότητας της Εκπαίδευσης* (σσ. 345-354).

Τζεκάκη, Μ., Μπαραλός, Γ., Σταγιόπουλος, Π.(2011). *Προσαρμογές αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο: Σχέδια διδασκαλίας για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (Τεύχος Α ΄ και Τεύχος Β΄).