Η περιπέτεια των αρνητικών αριθμών

Οι αρνητικοί αριθμοί εμφανίζονται για πρώτη φορά στην ιστορία σε ένα σπουδαίο βιβλίο Κινέζων μαθηματικών τα «Εννιά Κεφάλαια της μαθηματικής τέχνης», του οποίου η μορφή που έχουμε σήμερα στα χέρια μας τοποθετείται χρονικά από το 206 π.Χ., μέχρι το 220 μ.Χ. Προσπαθώντας να λύσουν κάποιες εξισώσεις, οι ενδιάμεσες πράξεις τους οδήγησαν στην εμφάνιση αρνητικών αριθμών. Ωστόσο, η έννοια του αρνητικού αριθμού δεν προκάλεσε ιδιαίτερα προβλήματα στους κινέζους, καθώς χρησιμοποιούσαν **κόκκινες ράβδους για τους θετικούς και μαύρες για τους αρνητικούς**. Παρ΄ όλα αυτά, όταν η λύση μιας εξίσωσης ήταν αρνητικός αριθμός, δεν την αποδέχονταν.

Οι Κινέζοι είχαν αναπτύξει και κάποιους κανόνες για τις ενδιάμεσες πράξεις αρνητικών με θετικούς, όπως:

- ✓ «το θετικό που λαμβάνεται από το τίποτα κάνει αρνητικό, το αρνητικό από το τίποτα κάνει θετικό»,
- ✓ «για πρόσθεση — με διαφορετικά πρόσημα, αφαιρέστε το ένα από το άλλο, με τα ίδια πρόσημα, προσθέστε το ένα στο άλλο»,
- ✓ «θετικό και τίποτα κάνει θετικό, αρνητικό και τίποτα κάνει αρνητικό»,
- ✓ «το άθροισμα ενός θετικού και ενός αρνητικού είναι η διαφορά τους, αν είναι ίσοι είναι μηδέν» ,
- ✓ «αν ένας μικρότερος θετικός πρέπει να αφαιρεθεί από ένα μεγαλύτερο θετικό, το αποτέλεσμα είναι θετικό, αν ένας μικρότερος αρνητικός από ένα μεγαλύτερο αρνητικό, το αποτέλεσμα είναι αρνητικό, αν ένας μεγαλύτερος αρνητικός ή θετικός πρέπει να αφαιρεθεί από ένα μικρότερο αρνητικό ή θετικό, το πρόσημο της διαφοράς τους αντιστρέφεται - το αρνητικό γίνεται θετικό και το θετικό αρνητικό»,
- ✓ «ένας αρνητικός μείον μηδέν είναι αρνητικός, ένας θετικός μείον μηδέν, θετικός, μηδέν μείον μηδέν είναι μηδέν»,
- ✓ «όταν ένας θετικός πρέπει να αφαιρεθεί από ένα αρνητικό ή ένας αρνητικός από έναν θετικό, τότε πρέπει να προστεθεί»,
- ✓ «το γινόμενο ενός αρνητικού και ενός θετικού είναι αρνητικό, δύο αρνητικών θετικό κα δύο θετικών θετικό», «το γινόμενο μηδέν με αρνητικό, μηδέν και θετικού με μηδέν ή δύο μηδενικών είναι μηδέν»,
- ✓ «ένας θετικός διαιρούμενος με ένα θετικό ή ένας αρνητικός διαιρούμενος με ένα αρνητικό είναι θετικό»,
- ✓ «ένα μηδέν διαιρούμενο με ένα μηδέν είναι μηδέν»,
- ✓ «ένας θετικός διαιρούμενο με ένα αρνητικό είναι αρνητικός»,
- ✓ «ένας αρνητικός διαιρούμενος με ένα θετικό είναι επίσης αρνητικός».

Αρνητικοί αριθμοί εμφανίζονται και στο έργο του Διόφαντου, που κατά πολλούς θεωρείται ο κορυφαίος Έλληνας αλγεβριστής. Δεν ξέρουμε με βεβαιότητα πότε έζησε, λέγεται ότι η ακμή του έργου του ήταν γύρω στο 250 μ.Χ. Ο Διόφαντος προσπαθώντας να λύσει προβλήματα, κατέληγε σε εξισώσεις. Κάποιες λύσεις ήταν αρνητικοί αριθμοί. Όμως ο Διόφαντος ενδιαφερόταν μόνο για τις ακριβείς ρητές λύσεις, αρκεί να ήταν θετικές. Τις υπόλοιπες τις ονόμαζε «αδύνατες». Στα βιβλία του υπάρχουν εξισώσεις με άπειρες λύσεις, όμως του αρκούσε μια λύση θετική ακέραια ή ρητή.

Η συστηματοποίηση των αρνητικών αριθμών και του μηδενός συναντώνται για πρώτη φορά στο έργο του Ινδού μαθηματικού Βραχμαγκούπτα, που άκμασε γύρω στο 628 μ.Χ. Οι κανόνες του για θετικούς και αρνητικούς αριθμούς είναι αυτοί που εφαρμόζουμε σήμερα, όπως «η διαίρεση θετικού με θετικό ή αρνητικού με αρνητικό, δίνει αποτέλεσμα θετικό», «η διαίρεση θετικού με αρνητικό, αποτέλεσμα αρνητικό, η διαίρεση αρνητικού με θετικό, αρνητικό», αλλά οι πράξεις με το 0 περιγράφονται λανθασμένα, όπως «η διαίρεση μηδέν δια μηδέν, μας δίνει μηδέν». Ο Βραχμαγκούπτα έλυσε τις εξισώσεις του Διόφαντου βρίσκοντας όλες τις ακέραιες λύσεις.

Στη μεσαιωνική Ευρώπη γύρω στο 1202-1220 μ.Χ., αρνητικοί αριθμοί εμφανίζονται σε ένα από τα πολλά προβλήματα του Λεονάρντο από την Πίζα (γνωστού ως Fibonacci), στα οποία έδωσε αρνητικές απαντήσεις, και μάλιστα έδειξε ότι κατανοούσε τους βασικούς κανόνες για την πρόσθεση και την αφαίρεση με αυτούς τους αριθμούς. Ο Λεονάρντο στην Αριθμητική του «Liber Abaci» χρησιμοποιεί την τωρινή μορφή των αριθμών (ινδικά ψηφία) συστηματικά και αποκλειστικά τα οποία είχε μάθει στην παιδική του ηλικία από έναν μαυριτανό δάσκαλο και χαρακτηρίζει υποδεέστερη κάθε άλλη μέθοδο υπολογισμού (πχ Άβακα). Οι μεγαλέμποροι καταλαβαίνουν πολύ γρήγορα τα μεγάλα πλεονεκτήματα των νέων αριθμών και τους χρησιμοποίησαν στα νέα τους βιβλία.

Στις αρχές του 14ου αιώνα, η ευρωπαϊκή άλγεβρα, όπως και η ισλαμική αντίστοιχή της, δεν έλαβε υπόψη καθόλου τους αρνητικούς αριθμούς. Η Ινδία και η Κίνα, ωστόσο, χρησιμοποιούσαν με ευχέρεια αρνητικές ποσότητες στους υπολογισμούς, ακόμα κι αν εξακολουθούσαν να διστάζουν να τις χρησιμοποιήσουν ως απαντήσεις σε μαθηματικά προβλήματα.

Στο τέλος του 14ου αιώνα, οι κανόνες των προσήμων βρέθηκαν γραμμένοι με λόγια και μάλιστα αιτιολογημένοι, σε ένα χειρόγραφο από έναν άγνωστο Ιταλό συγγραφέα.

Για πρώτη φορά στην Ευρώπη, στη Γαλλία το 1484, ο Nicolas Chuquet συνέθεσε το Triparty, ένα έργο για την αριθμητική και την άλγεβρα, και χωρίς να είναι σίγουρος ήταν πρόθυμος υπό ορισμένες συνθήκες να δεχτεί αρνητικές λύσεις σε εξισώσεις.

Το 1489, ο Γερμανός Johan Widman εξέδωσε ένα βιβλίο εμπορικής αριθμητικής στο οποίο **συναντάμε για πρώτη φορά τα σύμβολα «+» και «–»,** κυρίως για να δηλώσει πλεόνασμα ή έλλειψη στις μετρήσεις των αποθηκών.

Στις αρχές της δεκαετίας του 1520, τα σύμβολα «+» και «−» μπήκαν για πρώτη φορά σε ένα κείμενο για να για να αναπαραστήσουν την πρόσθεση και την αφαίρεση μεταξύ διαφορετικών όρων (στο το πρώτο ολοκληρωμένο βιβλίο Άλγεβρας στο «Art of the Coss» από τον Γερμανό Christoff Rudolff).

Γύρω στο 1525 ο Γερμανός μελετητής Adam Riese γράφει ένα βιβλίο Άλγεβρας το «Die Coss» και επηρεάζει πολύ τα πράγματα σε μια νεωτεριστική κατεύθυνση, ώστε **να αντικατασταθούν τα ρωμαϊκά ψηφία με τα τωρινά ινδοαραβικά ψηφία**, που βοηθούν την ακρίβεια στις αριθμητικές διαδικασίες.

Στην κατεύθυνση αυτή βοήθησαν νωρίτερα και οι Ιταλοί, παρά τις αντιστάσεις που συνάντησαν στο εσωτερικό της χώρας τους. Την εποχή εκείνη υπήρχε διαμάχη μεταξύ «αβακιστών» (δηλαδή υπερασπιστών της παλιάς μεθόδου του Άβακα) και «αλγοριθμιστών». Ο Riese εκλαΐκευσε τους υπολογισμούς με γραμμές και σύμβολα.

Το 1544, στην Arithmetica Integra (Ακέραια Αριθμητική) ο Γερμανός Michael Stifel περιγράφει με έναν ξεχωριστό τρόπο τους αρνητικούς αριθμούς βρίσκοντας κανόνα για να εξηγήσει πότε να χρησιμοποιεί κανείς το «+» και πότε το «−». **Ήταν ένας από τους πολλούς Γερμανούς συγγραφείς που διέδωσαν τη χρήση των γερμανικών συμβόλων «+» και «–» προς αντικατάσταση των ιταλικών p και m.** Είχε πλήρως εξοικειωθεί με τις ιδιότητες των αρνητικών αριθμών. Ωστόσο τους ονόμαζε «**παράλογους αριθμούς**» και δεν τους αποδέχθηκε ως ρίζες μιας εξίσωσης.

Το 1545, στο βιβλίο του Cardano «Ars magna» (Η Μεγάλη Τέχνη) περιλαμβάνεται μια **πιο ευρεία κατανόηση της χρήσης αρνητικών αριθμών ως λύσεις** σε προβλήματα. Ο Cardano τους χρησιμοποίησε αν και τους ονόμαζε «numeri ficti» (φανταστικοί αριθμοί). Την εποχή αυτή, η αποδοχή των αρνητικών παρουσίαζε ακόμα δυσκολίες διότι δεν προσεγγίζονταν άμεσα από τους θετικούς, αλλά η έννοια της φοράς στην ευθεία έκανε την ύπαρξή τους πολύ πιθανή.

Το 1707, ο Newton στο έργο του «Arithmetica universalis» **διατυπώνει κανόνες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού**, χωρίς να τους εξηγεί, μόνο ως τεχνικές που θα μπορούν να επιλύσουν ανώτερα μαθηματικά προβλήματα.

Τον 18ο αιώνα, ο Maclaurin, όπως και ο Newton, σκέφτηκε την άλγεβρα ως «μια γενική μέθοδο υπολογισμού με συγκεκριμένα σύμβολα που έχουν κατασκευαστεί για αυτόν τον σκοπό και έχουν βρεθεί βολικά». Την ονομάζει Καθολική Αριθμητική και προχωρά με πράξεις και κανόνες παρόμοιους με αυτούς της κοινής αριθμητικής, που βασίζονται στις ίδιες αρχές.

Στο «A Treatise of Algebra in Three Parts» ο Maclaurin όταν ασχολείται με αρνητικούς αριθμούς, σημειώνει ότι οποιαδήποτε ποσότητα μπορεί να εισέλθει στον αλγεβρικό υπολογισμό είτε **ως αύξηση είτε ως μείωση**. Ως παραδείγματα αυτών των δύο μορφών, συμπεριέλαβε έννοιες όπως **το πλεόνασμα και το έλλειμμα, η αξία του χρήματος που οφείλεται σε έναν άνδρα και που οφείλεται από αυτόν, μια γραμμή προς τα δεξιά και μία προς τα αριστερά, και ανύψωση πάνω από τον ορίζοντα και βύθιση προς τα κάτω**.

Σημείωσε ότι μπορεί κανείς να αφαιρέσει μια μεγαλύτερη ποσότητα από μια μικρότερη του ίδιου είδους, το υπόλοιπο σε αυτή την περίπτωση είναι πάντα αντίθετο σε είδος, αλλά μπορεί να το κάνει αυτό μόνο αν έχει νόημα. Για παράδειγμα, δεν μπορεί κανείς να αφαιρέσει μεγαλύτερη ποσότητα ύλης από μικρότερη.

Τον 18ο αιώνα επίσης ο Euler στο έργο του «Vollstandige Anleitung zur Algebra» (Complete Introduction to Algebra) ξεκίνησε το κείμενο με μια συζήτηση για την άλγεβρα των θετικών και αρνητικών μεγεθών. Η συζήτησή του για τον πολλαπλασιασμό ήταν κάπως λιγότερο τυπική από αυτή του Maclaurin: «Ας ξεκινήσουμε πολλαπλασιάζοντας το $-a$ με $+3$. Τώρα, **δεδομένου ότι το -a μπορεί να θεωρηθεί ως χρέος, είναι προφανές ότι αν πάρουμε αυτό το χρέος τρεις φορές, θα πρέπει επομένως να γίνει τριπλάσιο, και κατά συνέπεια το απαιτούμενο γινόμενο είναι -3a**». Ο Euler σημείωσε στη συνέχεια την προφανή γενίκευση ότι $-a$ φορές b θα είναι $-ba$ ή $-ab$ και συνεχίζεται στην περίπτωση του γινομένου δύο αρνητικών. Εδώ έγραψε απλώς ότι $-a$ φορές $-b$ δεν μπορεί να είναι το ίδιο με $-a$ φορές b, ή $-ab$, και επομένως πρέπει να είναι ίσο με $+ab$.

Παρά το ότι οι αρνητικοί αριθμοί χρησιμοποιήθηκαν ελεύθερα τον 17ο και 18ο αιώνα και θεωρήθηκαν απαραίτητοι για να φτάσουν στην επίλυση πιο σύνθετων προβλημάτων, οι μαθηματικοί δεν ήταν σε θέση να εξηγήσουν επαρκώς τις έννοιές τους και αυτό οδήγησε διακεκριμένους μαθηματικούς (F. Maseres και W. Frend) να αποκηρύξουν τη χρήση τους, καθώς και πανεπιστημιακά ιδρύματα (όπως το Cambridge στην Αγγλία) να αμφισβητήσουν την ισχύ τους.

Στα μέσα του 19ου αιώνα ο Peacock ανέλαβε να διασώσει τους αρνητικούς απαντώντας στην ερώτηση, "Τι είναι ένας αρνητικός αριθμός;" ότι είναι απλώς ένα σύμβολο της μορφής $-a$ (σημείωση: αν a θετικός). Κάποιος λειτουργεί με αυτά τα σύμβολα όπως στην αριθμητική. Εφόσον $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$ στην αριθμητική, υπό την προϋπόθεση ότι $a > b$ και $c > d$, ο ίδιος κανόνας ισχύει στη συμβολική άλγεβρα χωρίς αυτόν τον περιορισμό. Θέτοντας $a = c = 0$ έχουμε $(-b)(-d) = bd$ και, θέτοντας $a = d = 0$, έχουμε $(-b)c = -bc$ (σημείωση: εξήγηση του κανόνα των προσήμων).

Ο Hamilton, ήθελε να δικαιολογήσει τη χρήση αρνητικών στην άλγεβρα, έννοιες που συμφώνησε ότι δεν ήταν επαρκώς τεκμηριωμένες. Το 1837 έγραψε σε μια μελέτη του: Δεν απαιτείται ιδιαίτερη σκέψη για να αμφισβητήσετε, ή και να μην πιστέψετε, το δόγμα των αρνητικών και των φανταστικών, όταν διέπεται από αρχές όπως αυτές: «ένα μεγαλύτερο μέγεθος μπορεί να αφαιρεθεί από το μικρότερο και ότι το υπόλοιπο είναι μικρότερο από το τίποτα», «δύο αρνητικοί αριθμοί ή αριθμοί που δηλώνουν μεγέθη ο καθένας λιγότερο από το τίποτα, μπορούν να πολλαπλασιαστούν και το αποτέλεσμα θα είναι θετικός αριθμός»…...

Ο Hamilton κατάφερε να δείξει τους τυπικούς κανόνες για τις αριθμητικές πράξεις. Για παράδειγμα, το γινόμενο δύο αρνητικών πολλαπλασίων του a πρέπει να είναι θετικό αφού ένα τέτοιο γινόμενο περιλαμβάνει την αντιστροφή της κατεύθυνσης του βήματος a δύο φορές.

Προς τα τέλη του 19ου αιώνα οι Dedekind και Cantor, Weber ασχολήθηκαν με τη θεμελίωση των ρητών αριθμών, οργανώνοντας τις ιδιότητες τους, ώστε στη συνέχεια με τη βοήθειά τους να μπορούν να προσεγγίσουν άλλα σύνολα αριθμών (όπως οι πραγματικοί και οι φανταστικοί αριθμοί). Για παράδειγμα, «το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο κάθε ζευγαριού ρητών, είναι ρητός αριθμός (εκτός από τη διαίρεση με το 0)». Ο **Weber** εμπλούτισε τα παραπάνω θεμελιώνοντας τους γνωστούς κανόνες $a(-b)=-ab$; $a(b + c) = ab + ac$; $(-a)(-b) = ab$; και $a \cdot 0 = 0$. Επίσης, ο **Dedekind** έκανε την αντιστοιχία μεταξύ ρητών αριθμών και σημείων μιας ευθείας. Είδε λοιπόν αυτό που ήταν ξεκάθαρο ακόμη και στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς, ότι «η ευθεία είναι απείρως πλουσιότερη σε μεμονωμένα σημεία σε σχέση με τους μεμονωμένους ρητούς αριθμούς». Όμως, δεν μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τη γεωμετρική γραμμή για να ορίσει αριθμητικά νούμερα. Επομένως, ο στόχος του Dedekind, ήταν «η δημιουργία νέων αριθμών έτσι ώστε το πεδίο των αριθμών να αποκτήσει την ίδια πληρότητα, ή την ίδια συνέχεια, όπως η ευθεία γραμμή». Ο **Cantor** ήξερε ότι οι ρητοί αριθμοί ήταν πυκνοί αλλά όχι συνεχείς. Κατέληξε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι θα έπρεπε να υπάρχουν «περισσότεροι» αριθμοί από τους ρητούς αριθμούς (αυτοί που στη συνέχεια ονομάστηκαν πραγματικοί) και κατάφερε να δείξει μαζί με τον Dedekind, πώς να κατασκευάζουν αυτούς τους αριθμούς ξεκινώντας από τους ρητούς. Αλλά ήταν ο Dedekind που ολοκλήρωσε τη διαδικασία θεμελιώνοντας ακόμα πιο στέρεα τους φυσικούς και τους ρητούς αριθμούς.

Πηγές:

Boyer, C., Merzbach, U. (1989). Η Ιστορία των Μαθηματικών (2η έκδοση), Αθήνα: Γ.Α. Πνευματικός.

Katz, V.J. (2009). A history of mathematics (3rd ed.), Boston: Pearson Education.

Struik, D. (1993). Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών (Β΄ έκδοση), Αθήνα: Δαίδαλος-Ι. Ζαχαρόπουλος.

van der Waerden, B.L. (2003). Η Αφύπνιση της Επιστήμης. Αιγυπτιακά Βαβυλωνιακά και Ελληνικά Μαθηματικά (2η έκδοση), Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΤΙΤΛΟΣ: Η περιπέτεια των αρνητικών αριθμών

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ / ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ / ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ:

Δημήτρης Διαμαντίδης

Ελισσάβετ Καλογερία

Ειρήνη Περυσινάκη

Γιάννης Σταμπόλας

Κώστας Στουραΐτης

Βαγγέλης Φακούδης

Γιώργος Ψυχάρης

ΕΚΔΟΣΗ: 1.0

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28-12-2024

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων | ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού | ΙΕΠ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ | Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης | ΕΣΠΑ 2021-2027 | Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή