

Διαιρετότητα - πρώτοι αριθμοί

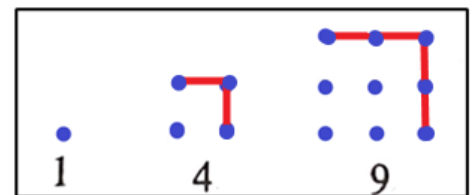
Η διαιρετότητα και οι έννοιες που συνδέονται με αυτήν είναι ένα σημαντικό κομμάτι των Μαθηματικών, που διαχρονικά απασχόλησε σπουδαίους Μαθηματικούς από την αρχαιότητα έως σήμερα. Ενδεικτικά, θα σταματήσουμε σε κάποιους σταθμούς αυτής της διαδρομής, που διαμόρφωσαν τις σύγχρονες γνώσεις μας.

Η λέξη «**αριθμός**» για τους αρχαίους Έλληνες σήμαινε αυτό που εμείς σήμερα ονομάζουμε «**θετικός ακέραιος**» ή αλλιώς «**φυσικός**» χωρίς το μηδέν. Η μελέτη των ιδιοτήτων των αριθμών ήταν ένα από τα πιο σημαντικά πεδία μαθηματικής δραστηριότητας αρκετούς αιώνες π.Χ..

Υπάρχει μια γενικότερη συμφωνία μεταξύ των ιστορικών των Μαθηματικών ότι οι **Πυθαγόρειοι** με βασικά δόγματα «**τα πάντα είναι αριθμοί**» και «**τα πάντα όντα και όλος ο Ουρανός κατασκευάζονται από τους αριθμούς**» αφιέρωσαν μεγάλο μέρος του έργου τους στη μελέτη των ιδιοτήτων των αριθμών. Με επίκεντρο την **διαιρετότητα**, προσδιόρισαν διάφορες κατηγορίες αριθμών, όπως ενδεικτικά οι παρακάτω:

- **Οι τέλειοι αριθμοί:** ο καθένας από αυτούς είχε την ιδιότητα να ισούται με το άθροισμα των διαιρετών του. Πχ $6=1+2+3$. Τέλειοι αριθμοί είναι οι 6, 28, 496, 8128,
- **Οι φίλοι αριθμοί:** ζευγάρια αριθμών που ο ένας ισούται με το άθροισμα των διαιρετών του άλλου, όπως οι 220 και 284, καθώς $220=1+2+4+7+14+28$ και $284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110$. Κατά τον Πυθαγόρα, ο ένας ήταν «**έτερος εγώ**» του άλλου. Ωστόσο, κάποιοι μελετητές θεωρούν ότι οι αριθμοί αυτοί είναι μεταγενέστεροι των Πυθαγορείων.

- **Οι παραστατικοί αριθμοί:** τρίγωνοι, τετράγωνοι, πεντάγωνοι, ετερομήκεις, και άλλοι, πολλοί εκ των οποίων αναφέρονται σε άρτιους και περιττούς αριθμούς. Για παράδειγμα, στο διπλανό σχήμα βλέπετε τους **τετράγωνους αριθμούς** οι οποίοι



δημιουργούνται αν στον προηγούμενο κάθε αριθμού τοποθετήσουμε έναν **Γνώμονα** που αποτελείται κάθε φορά από διαφορετικό πλήθος σημείων ($4=1+3$, $9=1+3+5$). *Ποιος άραγε να είναι ο επόμενος και ποια η σχέση του Γνώμονα με τους περιττούς αριθμούς;*

Στα «**Στοιχεία του Ευκλείδη**» (βιβλία VII, VIII, IX) ο κάθε αριθμός αντιπροσωπεύεται από ένα ευθύγραμμο τμήμα και δεν χρησιμοποιούνται φράσεις όπως «είναι πολλαπλάσιο του...» ή «είναι παράγοντας του». Αντί αυτών, χρησιμοποιεί αντίστοιχα τις εκφράσεις «**μετρίεται από...**» ή «**μετρά**». Πχ, ο αριθμός 6 μετρίεται από τον αριθμό 2, διότι υπάρχει ένας τρίτος αριθμός (εδώ το 3), έτσι ώστε $6=3 \cdot 2$ ή αλλιώς το 2 μετρά το 6 διότι

Στο 7ο Βιβλίο αναφέρει ότι «**πρώτος αριθμός είναι αυτός που μετρίεται μόνο από τη μονάδα**».

ια' Πρῶτος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.
 ιβ' Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἰσὶν οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.
 ιγ' Σύνθετος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

Στο ίδιο βιβλίο, στις Προτάσεις 31 και 32 αντίστοιχα, ο Ευκλείδης γράφει και αποδεικνύει ότι «κάθε σύνθετος αριθμός διαιρείται από κάποιον πρώτο» και «κάθε αριθμός ή είναι πρώτος ή έχει ως παράγοντα πρώτο αριθμό».

^α Ἄπας σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.
^β Ἄπας ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Σε συνδυασμό με την Πρόταση 14 του 9ου βιβλίου μας βοηθά να φτάσουμε σε ένα πολύ σημαντικό εύρημα, αυτό που αργότερα ονομάστηκε «**Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής**» δηλαδή ότι «**κάθε φυσικός διαφορετικός από το 1 αναλύεται με μοναδικό τρόπο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**» (δεν μας ενδιαφέρει η σειρά που έχουν οι παράγοντες στο γινόμενο).

Ακόμα, από το 9ο Βιβλίο (Πρόταση 20) μαθαίνουμε ένα από τα πιο σημαντικά ευρήματα των Μαθηματικών, ότι οι **πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι**.

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρηῖται, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ο **Ερατοσθένης** (καταγόταν από την Κυρήνεια, ήταν σύγχρονος του Αρχιμήδη και έζησε μεγάλο μέρος της ζωής του στην Αθήνα) επινόησε μια διαδικασία **για να ξεχωρίζουμε εύκολα τους πρώτους αριθμούς** ανάμεσα στους περιττούς. Η διαδικασία αυτή που ονομάστηκε «**Κόσκινο του Ερατοσθένη**» είναι η εξής: Ξεκινώντας από το 3, γράφουμε όσους περιττούς αριθμούς θέλουμε.

	3	5	7	9	11	13	15	17	19
21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
61	63	65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95	97	99

Στη συνέχεια, κρατάμε/κυκλώνουμε το 3 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του. Κατόπιν, κρατάμε/κυκλώνουμε τον επόμενο περιττό, δηλαδή το 5 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του. Στη συνέχεια κρατάμε/κυκλώνουμε το 7 και διαγράφουμε τα πολλαπλάσιά του και προχωράμε με τον ίδιο τρόπο. Οι κυκλωμένοι αριθμοί που απομένουν είναι οι πρώτοι.

Δοκιμάστε να το κάνετε στον παραπάνω πίνακα για να βρείτε τους πρώτους μέχρι το 100! Σε ποιες περιπτώσεις πιστεύετε ότι είναι εύχρηστο το Κόσκινο του Ερατοσθένη;

Αν και ήταν εμφανές ότι η πυκνότητα των πρώτων ελαττωνόταν όσο προχωρούσαμε σε ολοένα και μεγαλύτερους αριθμούς, κάποια από τα προβλήματα που προσπάθησαν διαχρονικά να λύσουν πολλοί σπουδαίοι Μαθηματικοί, ήταν:

- εφόσον οι πρώτοι ολοένα και αραιώνουν όσο οι αριθμοί μεγαλώνουν, μήπως κάποια στιγμή τελειώνουν;
- μπορούσαν άραγε να προσδιορίσουν έναν κανόνα, έναν τύπο, με τον οποίο αν μας δίνουν έναν αριθμό να μπορούμε να βρούμε πόσοι πρώτοι είναι μικρότεροι από αυτόν;
- υπάρχει κάποιος τύπος που να «γεννά» πρώτους αριθμούς;
- αν μας δώσουν έναν πολύ μεγάλο αριθμό να μπορούμε να βρούμε αν είναι πρώτος;
- αν μας δώσουν έναν πρώτο αριθμό, μπορούμε να βρούμε τον επόμενο του;

Κάποια από αυτά τα ερωτήματα απαντήθηκαν είτε θετικά, είτε αρνητικά, είτε εν μέρει, δημιουργήθηκαν εικασίες, πολλές από αυτές παραμένουν ακόμα ανοιχτές, αν και έχει σημειωθεί αρκετή πρόοδος στη διερεύνησή τους. Για παράδειγμα, αποδείχθηκε τόσο από τον Ευκλείδη, όσο και από μεταγενέστερους μαθηματικούς, ότι οι πρώτοι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ, είναι άπειροι. Επίσης, βρέθηκαν τύποι που «γεννούν» πρώτους, αλλά μέχρι έναν ορισμένο αριθμό. Επίσης βρέθηκε τύπος που μας δείχνει πόσοι πρώτοι είναι μικρότεροι από έναν αριθμό!

Ένα παράδειγμα εικασίας που αφορά την πυκνότητα των πρώτων, είναι αυτό που διατυπώθηκε το 1845 από τον **Bertrand**: αν σκεφτούμε οποιονδήποτε αριθμό n τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένας πρώτος αριθμός ανάμεσα στον n και στον διπλάσιό του. Την εικασία αυτή απέδειξε το 1850 ο Ρώσος Μαθηματικός **Tchebycheff**.

Σκεφτείτε λοιπόν έναν αριθμό μεγαλύτερο από το 3. Διπλασιάστε τον και αφαιρέστε 2. Μπορείτε να βρείτε τουλάχιστον έναν πρώτο ανάμεσά τους;

Και μια σχετικά πρόσφατη είδηση: Στις 7/12/2018 ανακοινώθηκε ο μεγαλύτερος πρώτος που έχει μέχρι τώρα βρεθεί: ο $2^{82.589.933} - 1$ (υψώνουμε το 2 στη δύναμη 82.589.933 και μετά αφαιρούμε το 1). Έχει 24.862.048 ψηφία και ανήκει σε μια κατηγορία πρώτων αριθμών, τους «αριθμούς Μερσέν», από το όνομα του Γάλλου μοναχού του 17ου αιώνα Μαρέν Μερσέν που τους μελέτησε πρώτος. Έχουν βρεθεί ήδη κατά σειρά άλλοι 49 αριθμοί Μερσέν, με τον τύπο $2^p - 1$ (από τον δικτυακό τόπο <https://www.mersenne.org/primes/>).

Πηγές:

Boyer, C., Merzbach, U. (1989). Η Ιστορία των Μαθηματικών (2η έκδοση), Αθήνα: Γ.Α. Πνευματικός.
Katz, V.J. (2009). A history of mathematics (3rd ed.), Boston: Pearson Education.

Struik, D. (1993). Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών (Β΄ έκδοση), Αθήνα: Δαίδαλος-Ι. Ζαχαρόπουλος.

Νεγρεπόντης, Σ., Φαρμάκη, Β. (2019). Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών. Από τον Θαλή στον Ευκλείδη μέσω Πυθαγορείων, Ζήνωνος, Πλάτωνος, Θεαιτήτου και Ευδόξου, Αθήνα: Εκκρεμές.

Χριστιανίδης, Γ. (2003). Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

van der Waerden, B.L. (2003). Η Αφύπνιση της Επιστήμης. Αιγυπτιακά Βαβυλωνιακά και Ελληνικά Μαθηματικά (2η έκδοση), Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΤΙΤΛΟΣ: Διαιρετότητα – πρώτοι αριθμοί

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ / ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ / ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ:

Δημήτρης Διαμαντίδης

Ελισσάβετ Καλογερία

Ειρήνη Πεрусινάκη

Γιάννης Σταμπόλας

Κώστας Στουραΐτης

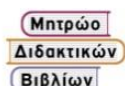
Βαγγέλης Φακούδης

Γιώργος Ψυχάρης

ΕΚΔΟΣΗ: 1.0

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28-12-2024

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων
και Αθλητισμού

ΙΕΠ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα
Ανθρώπινο Δυναμικό και
Κοινωνική Συνοχή