Διδακτική διαχείριση και μαθηματική δραστηριότητα για τα Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου

Για μια επιτυχημένη διδακτική διαχείριση του νέου προγράμματος σπουδών (ΠΣ) είναι απαραίτητη η γνώση των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων (ΠΜΑ) κάθε μαθηματικής ενότητας, καθώς και ο σχεδιασμός της διδασκαλίας σύμφωνα με τις θεωρητικές παραδοχές του νέου ΠΣ. Στην κατεύθυνση αυτή, οι ενδεικτικές προτάσεις διδακτικής διαχείρισης που συνοδεύουν το βιβλίο Μαθηματικών και τα Ψηφιακά Μαθησιακά Αντικείμενα (ΨΜΑ) στοχεύουν στην συνοπτική παρουσίαση παραδειγμάτων δημιουργίας ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που προάγει την κριτική σκέψη, την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών, την επίλυση προβλημάτων και τη μαθηματική συζήτηση στην τάξη.

Παρακάτω παρουσιάζονται συνοπτικά τα βασικά σημεία.

1. **Θεωρητικά μοντέλα για τη διαχείριση της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών.**
2. **Καινοτομίες του νέου ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου.**
3. **Αρχές διδακτικής προσέγγισης του εγχειριδίου.**
4. **Μαθηματική δραστηριότητα και διαχείριση έργων.**
5. **Ενδεικτικά παραδείγματα πρακτικής εφαρμογής.**
6. **Συμπερασματικοί στοχασμοί για τη διδασκαλία των Μαθηματικών.**

1. Θεωρητικά μοντέλα για τη διαχείριση της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στηρίζεται σε δύο βασικά διδακτικά μοντέλα που αντικατοπτρίζουν διαφορετικές θεωρητικές προσεγγίσεις μάθησης. Το παραδοσιακό μοντέλο, επηρεασμένο από τις συμπεριφοριστικές θεωρίες, θεωρεί τη μάθηση ως μια διαδικασία μεταφοράς πληροφορίας από τον εκπαιδευτικό[1] στους μαθητές. Στο μοντέλο αυτό η γνώση αντιπροσωπεύει ένα σύνολο δεδομένων, γεγονότων και δεξιοτήτων που προκαλούν μετρήσιμες και παρατηρήσιμες αλλαγές στη συμπεριφορά. Σε αυτό το πλαίσιο, δίνεται έμφαση στην εξάσκηση και την απομνημόνευση, ενώ τα λάθη θεωρούνται ως ένδειξη ανεπαρκούς κατανόησης, που πρέπει να διορθωθούν με επιπλέον προσπάθεια. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι κυρίως να μεταδίδει τη γνώση που κατέχει, ενώ οι μαθητές παραλαμβάνουν τις πληροφορίες με πιο παθητικό τρόπο.

Αντίθετα, το σύγχρονο μοντέλο, βασισμένο στις θεωρίες οικοδόμησης της γνώσης, αντιμετωπίζει τη μάθηση ως μια δυναμική και ενεργητική διαδικασία, όπου οι μαθητές οικοδομούν τη δική τους κατανόηση μέσω συνεργασίας, βιωματικών εμπειριών και διερεύνησης προβλημάτων. Στο μοντέλο αυτό, τα λάθη δεν θεωρούνται ως αποτυχίες, αλλά ως πολύτιμες ευκαιρίες για αναστοχασμό και εννοιολογική αλλαγή (Μπαραλός, 2007).

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού μετασχηματίζεται σε αυτόν του διευκολυντή (facilitator) δημιουργώντας τα κατάλληλα περιβάλλοντα μάθησης που στηρίζονται στην έννοια της Ζώνης Επικείμενης Ανάπτυξης (Vygotsky, 1988, 1997). Η Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (ΖΕΑ) αναφέρεται στο εύρος μεταξύ αυτού που ο μαθητής μπορεί να επιτύχει μόνος του και αυτού που μπορεί να επιτύχει με την κατάλληλη καθοδήγηση. Μέσα σε αυτή τη ζώνη, ο εκπαιδευτικός ή ένας συνομήλικος παρέχει διαμεσολαβητική βοήθεια (scaffolding) που επιτρέπει στον μαθητή να γεφυρώσει το χάσμα και να επεκτείνει τις δυνατότητές του. Η σωστή επικοινωνία, η χρήση της γλώσσας, η ανατροφοδότηση και η νοητική σκαλωσιά είναι ουσιαστικά εργαλεία για την ενίσχυση της μαθησιακής διαδικασίας.

[1] Το γραμματικό αρσενικό γένος «ο εκπαιδευτικός», «ο μαθητής» κ.ά. χρησιμοποιείται στο βιβλίο αυτό με συμπεριληπτικό τρόπο, δηλαδή εννοούμε «ο και η εκπαιδευτικός», «ο μαθητής και η μαθήτρια» κ.ά. Παντού, το γραμματικό αρσενικό γένος χρησιμοποιείται με παρόμοιο τρόπο σε όλες τις ανάλογες περιπτώσεις.

Οι βασικές αρχές των θεωριών οικοδόμησης της μάθησης συνοψίζονται ως εξής:

- Η γνώση οικοδομείται πάνω στη βάση της προηγούμενης εμπειρίας, μέσω συγκρίσεων και δημιουργίας συνδέσεων.
- Οι μαθητές κατακτούν τη γνώση ενεργά, συμμετέχοντας σε διερευνήσεις και μαθηματικές δραστηριότητες με τη διαμεσολάβηση των εκπαιδευτικών.
- Τα λάθη δεν είναι αποτυχημένες απαντήσεις αλλά δείκτες των δυσκολιών και ευκαιρίες για ανατροφοδότηση.
- Η διαδικασία της μάθησης είναι εξίσου σημαντική με το τελικό προϊόν.
- Η μάθηση διευκολύνεται σε συνεργατικά περιβάλλοντα, όπου η χρήση χειραπτικών υλικών, προσομοιώσεων και νέων τεχνολογιών ενισχύει την κατανόηση.
- Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να λειτουργεί ως διευκολυντής και ερευνητής, δημιουργώντας ευκαιρίες για τους μαθητές να γίνουν ενεργοί συμμετέχοντες στη διαδικασία της μάθησης.

Συνοπτικά, σε σχέση με το παραδοσιακό μοντέλο που μεταδίδει γνώση ως στατικό σύνολο πληροφοριών, το σύγχρονο μοντέλο τονίζει τη σχετικότητα της μάθησης ως μια διαδικασία συνεχούς αναδόμησης και αλληλεπίδρασης. Μέσα από την κατανόηση της Ζώνης Επικείμενης Ανάπτυξης, οι μαθητές αναπτύσσουν ουσιαστικές συνδέσεις μεταξύ της προηγούμενης και της νέας γνώσης, εμπλουτίζοντας τη μαθηματική εμπειρία τους και διευρύνοντας τους ορίζοντές τους μέσω της ενεργητικής συμμετοχής και της συνεργασίας.

Στο πλαίσιο του σύγχρονου διδακτικού μοντέλου, η **Θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων** του Brousseau (1998) προσφέρει ένα δομημένο πλαίσιο για την οργάνωση της μαθησιακής διαδικασίας, το οποίο εστιάζει στην ενεργό συμμετοχή των μαθητών και στη διαμόρφωση ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που υποστηρίζει τη διερεύνηση και τη μαθηματική δραστηριότητα. Η διδακτική διαχείριση χωρίζεται στις ακόλουθες τέσσερις φάσεις:

- **Διερευνητική φάση (δράση μαθητών):** Ο εκπαιδευτικός οργανώνει ένα μαθησιακό περιβάλλον που προάγει την αυτονομία των μαθητών, ενθαρρύνοντάς τους να εξερευνήσουν ένα πρόβλημα ή να μοντελοποιήσουν μια μαθηματική κατάσταση. Σε αυτή τη φάση, οι μαθητές εμπλέκονται σε πειραματισμό και ανακαλύπτουν σχέσεις μέσα από τη δική τους δράση, χωρίς άμεση καθοδήγηση.
- **Φάση διατύπωσης:** Οι μαθητές συγκρίνουν και συζητούν τις παρατηρήσεις τους, προσπαθώντας να επικοινωνήσουν και να αναπτύξουν κοινά νοήματα. Ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει τη διαδικασία αυτή, ενθαρρύνοντας τη γλωσσική διατύπωση των ευρημάτων τους και διασφαλίζοντας την ανταλλαγή επιχειρημάτων μέσα από μαθηματικό διάλογο.
- **Φάση εγκυροποίησης:** Σε αυτή τη φάση, ο εκπαιδευτικός συντονίζει τη συζήτηση και παρεμβαίνει ώστε να ενισχύσει τη σαφήνεια, τη δομή και την ακριβή χρήση των μαθηματικών εννοιών. Οι μαθητές καλούνται να επαληθεύσουν ή να διαψεύσουν υποθέσεις, αναπτύσσοντας την ικανότητα μαθηματικής επιχειρηματολογίας και διαμορφώνοντας μια θεωρία σε εξέλιξη.
- **Φάση θεσμοποίησης:** Ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές να διατυπώσουν τα αποτελέσματά τους χρησιμοποιώντας επίσημη μαθηματική γλώσσα, συνδέοντας τα ευρήματά τους με ορισμούς, θεωρήματα και γενικές αρχές. Αυτή η διαδικασία είναι κρίσιμη για τη μετατροπή της προσωρινής γνώσης των μαθητών σε τυπική μαθηματική γνώση, που εντάσσεται στη δομή του Προγράμματος Σπουδών. Η θεσμοποίηση πρέπει να γίνεται την κατάλληλη στιγμή: πρόωρη θεσμοποίηση μπορεί να εμποδίσει τη μαθησιακή διερεύνηση, ενώ καθυστερημένη θεσμοποίηση μπορεί να ενισχύσει παρανοήσεις.

Για την επιτυχία της παιδαγωγικής και διδακτικής διαχείρισης δίνεται βαρύνουσα σημασία:

- **Στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών**, που πρέπει να συμμετέχουν ουσιαστικά στη μαθηματική δραστηριότητα και όχι απλώς στη διεκπεραίωση των εργασιών.

- **Στον συντονισμό του διαλόγου και της συζήτησης**, ώστε να ενισχύεται η μαθηματική επιχειρηματολογία και η ανάπτυξη κριτικής σκέψης.
- **Στη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και ψηφιακών εργαλείων**, που διευκολύνουν την κατανόηση αφηρημένων εννοιών και ενισχύουν τη σύνδεση μεταξύ των μαθηματικών εννοιών.

Το σύγχρονο διδακτικό μοντέλο, σε συνδυασμό με τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων του Brousseau, διαμορφώνει ένα περιβάλλον, στο οποίο η μάθηση προκύπτει μέσα από τη διερεύνηση, τον διάλογο και την εγκυροποίησης της γνώσης. Ο εκπαιδευτικός δεν μεταδίδει απλώς πληροφορίες, αλλά οργανώνει τη μαθησιακή διαδικασία, καθοδηγώντας τους μαθητές και τις μαθήτριες να οικοδομήσουν τη γνώση μέσα από εμπειρίες και ενεργή συμμετοχή.

2. Οι καινοτομίες του νέου ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου

Τα Μαθηματικά, ως θεμελιώδες επίτευγμα του ανθρώπινου πολιτισμού, κατέχουν κεντρική θέση στα Προγράμματα Σπουδών λόγω της δυναμικής τους να περιγράφουν, να αναλύουν και να ερμηνεύουν τον κόσμο, ενώ παράλληλα καλλιεργούν τη λογική και αναλυτική σκέψη. Μέσα από τη μελέτη δομών και σχέσεων, προάγουν έναν συνεκτικό τρόπο συλλογισμού, ενισχύοντας τη λογική και τη δημιουργικότητα. Στο παρόν ΠΣ, τα Μαθηματικά προσεγγίζονται ως ανθρώπινο δημιούργημα που συμβάλλει ουσιαστικά στην ατομική ανάπτυξη και την κοινωνική πρόοδο.

Το νέο ΠΣ Μαθηματικών του Γυμνασίου έχει ως αφετηρία τα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ), τα οποία εξειδικεύουν τους γενικούς στόχους ορίζοντας όλα όσα χρειάζεται να γνωρίζει ο μαθητής, να κατανοεί και να μπορεί να εφαρμόσει μετά την ολοκλήρωση της μαθησιακής διαδικασίας και οργανώνεται σε τρία θεματικά πεδία: Αριθμοί και Άλγεβρα, Γεωμετρία και Στοχαστικά Μαθηματικά. Θεμέλιο της διαδικασίας της μάθησης είναι η βαθιά γνώση των «Μεγάλων Ιδεών» του μαθηματικού περιεχομένου από τον εκπαιδευτικό, η οποία του επιτρέπει να μετασχηματίζει την επιστημονική γνώση σε σχολική γνώση, προσαρμοσμένη στις ανάγκες των μαθητών. Ωστόσο, οι καινοτομίες του ΠΣ δεν περιορίζονται στο περιεχόμενο (Sakonidis, et al., 2022). Εισάγονται νέες μαθηματικές διεργασίες και κοινωνικο-πολιτισμικές και κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές, οι οποίες συγκεκριμενοποιούν τους στόχους του ΠΣ και καθιστούν δυνατή την αξιολόγησή τους μέσα από την καθημερινή διδακτική πράξη. Στο πλαίσιο αυτό, ο εκπαιδευτικός επιλέγει μαθηματικά έργα και εφαρμόζει κατάλληλες μαθηματικές πρακτικές, που προάγουν αυθεντικές μαθηματικές δραστηριότητες.

Τα τρία θεματικά πεδία του ΠΣ **Αριθμοί-Άλγεβρα, Γεωμετρία και Στοχαστικά Μαθηματικά,** περιλαμβάνουν θεμελιώδεις πτυχές της μαθηματικής σκέψης και εφαρμογής, αναδεικνύοντας τη σημασία της κατανόησης δομών, σχέσεων και της ανάλυσης δεδομένων, ενώ συνδέουν τη μαθηματική γνώση με πραγματικές καταστάσεις (Καραβασίλης & Κόσυβας, 2016). Κάθε πεδίο προσφέρει ευκαιρίες για την ανάπτυξη δεξιοτήτων, την καλλιέργεια του μαθηματικού συλλογισμού και τη δημιουργία κατάλληλων εργαλείων και πρακτικών που ανταποκρίνονται στις ανάγκες κάθε μαθητικής ομάδας. **Ειδικότερα:**

1ο Θεματικό πεδίο: Αριθμοί και Άλγεβρα: Το θεματικό πεδίο «Αριθμοί και Άλγεβρα» επικεντρώνεται στη μελέτη των αριθμών, των σχέσεών τους, της αλγεβρικής σκέψης και των συναρτήσεων, όπως έχει μελετηθεί σε ερευνητικές εργασίες (Kieran, 2007). Στο νέο ΠΣ, η διδασκαλία των αριθμών εξελίσσεται σταδιακά στη Β΄ Γυμνασίου. Η μελέτη των ρητών αριθμών διευρύνεται, ενώ παράλληλα εισάγονται οι άρρητοι, επιτυγχάνοντας ισορροπία μεταξύ εννοιολογικής κατανόησης και διαδικαστικής γνώσης. Στον τομέα της Άλγεβρας, δίνεται έμφαση στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης μέσα από τη διερεύνηση μεταβλητών, κανονικοτήτων και εξισώσεων, καθώς και στην έννοια της συμμεταβολής (Kafetzopoulos & Psycharis, 2022), η οποία συνδέεται με τη συνάρτηση και τις πολλαπλές αναπαραστάσεις της (πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση). Οι συναρτήσεις που διδάσκονται στη Β΄ Γυμνασίου περιλαμβάνουν τη συνάρτηση αναλογίας, τη συνάρτηση αντίστροφης αναλογίας και τη γραμμική συνάρτηση. Επιπλέον, εισάγεται η έννοια της γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας, η οποία συμβάλλει στη γενίκευση μαθηματικών σχέσεων και στην ανάπτυξη συλλογισμών (Κόσυβας, 2014). Παράλληλα, στο νέο ΠΣ απομακρύνονται πολύπλοκοι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί, ώστε να δοθεί έμφαση στη μαθηματική σκέψη και στην ανάπτυξη ουσιαστικών εννοιολογικών εργαλείων (Βερύκιος, 2011).

2ο Θεματικό πεδίο: Γεωμετρία και Μέτρηση: Η Γεωμετρία στο Γυμνάσιο ενισχύει τη χωρική αντίληψη (Battista, 2007; Κολέζα, 2003) και τη μετάβαση από εμπειρικές σε πιο αφαιρετικές προσεγγίσεις. Οι μαθητές μαθαίνουν να κατασκευάζουν σχήματα, να υπολογίζουν εμβαδά και περιμέτρους να θέτουν και να ελέγχουν εικασίες, να ανακαλύπτουν ιδιότητες μέσω λογισμικών και να αναπτύσσουν λογική σκέψη, επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση. Στη Β΄ Γυμνασίου, η διδασκαλία επεκτείνεται με την εισαγωγή γεωμετρικών μετασχηματισμών, όπως η μεταφορά και η στροφή, ενώ παράλληλα διατηρείται η απόδειξη μέσω λογικών επιχειρημάτων. Η μελέτη αυτών των εννοιών έχει απασχολήσει ερευνητές, όπως οι Hollebrands (2003) και Κόσυβας & Τσίτσος (2024), χωρίς όμως η έρευνά τους να συνδέεται άμεσα με την επεξεργασία του Προγράμματος Σπουδών. Αντίστοιχα, η έμφαση στη λογική δομή της απόδειξης απαντάται και στη βιβλιογραφία (Μπαραλός, 2001).

3ο Θεματικό πεδίο: Στοχαστικά Μαθηματικά: Ο βασικός σκοπός της διδασκαλίας της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να αξιολογούν κριτικά πληροφορίες, να εξάγουν συμπεράσματα, να κάνουν προβλέψεις και να λαμβάνουν αποφάσεις υπό αβέβαιες συνθήκες. Τα Στοχαστικά Μαθηματικά ξεχωρίζουν από άλλες μαθηματικές περιοχές, καθώς εστιάζουν στη μελέτη προβλημάτων που σχετίζονται με τη μεταβλητότητα και τη διαφορετικότητα των δεδομένων στον κόσμο γύρω μας (Bakogianni, 2019). Το εν λόγω πεδίο εισάγει τους μαθητές στην κριτική αξιολόγηση δεδομένων και την ανάλυση της τυχαιότητας. Στη Στατιστική, οι μαθητές μελετούν συνεχή δεδομένα, κατασκευάζουν χρονοδιαγράμματα και θηκογράμματα, διερευνούν τις ιδιότητες της μέσης τιμής, εξοικειώνονται με μέτρα θέσης και μεταβλητότητας και κρίνουν τη χρήση των στατιστικών διαγραμμάτων. Στις Πιθανότητες, εξετάζουν ευνοϊκές και δυνατές εκβάσεις ενός πειράματος τύχης και τις εφαρμόζουν σε μαθηματικά έργα που απαιτούν τη Βασική Αρχή της Απαρίθμησης, μαθαίνουν τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα και τον απλό προσθετικό νόμο, δίνοντας έμφαση στη στοχαστική διερεύνηση μέσω ψηφιακών μέσων (ΙΕΠ, 2023). Το πεδίο καλλιεργεί δεξιότητες λήψης αποφάσεων και αξιολόγησης πληροφοριών, συνδέοντας τα Μαθηματικά με την καθημερινή ζωή (Bargagliotti et al., 2020).

Μεγάλες Ιδέες του νέου ΠΣ και σύνδεση των εννοιών. Οι «Μεγάλες Ιδέες» λειτουργούν ως θεμελιώδεις άξονες που ενοποιούν διαφορετικά πεδία της μαθηματικής επιστήμης, αποτελούν τον πυρήνα της μαθηματικής σκέψης ενισχύοντας τη συνολική κατανόηση. Περιλαμβάνονται μεταξύ άλλων οι ακόλουθοι θεματικοί πυλώνες (Πόταρη κ.ά., 2022):

- **Μαθηματική Δομή**: Ενοποίηση αριθμητικών και αλγεβρικών εννοιών, προάγοντας τη συνδυαστική μαθηματική σκέψη.
- **Γενίκευση και Απόδειξη**: Εμβάθυνση στη μαθηματική λογική μέσω της κατανόησης γενικών προτύπων και αποδεικτικών διαδικασιών.
- **Μεταβολή**: Μελέτη μετασχηματισμών και συναρτήσεων, που αναδεικνύει τη δυναμική φύση των μαθηματικών.
- **Ισοδυναμία**: Κατανόηση σχέσεων ισοδυναμίας και συμμετρίας, ενισχύοντας τη μαθηματική δομή και οργάνωση.

Αυτές οι ιδέες ενοποιούν διαφορετικές μαθηματικές έννοιες σε ένα συνεκτικό πλαίσιο, βοηθώντας τους μαθητές να αναγνωρίσουν συνδέσεις μεταξύ αναπαραστάσεων, όπως αριθμητικές σχέσεις, γεωμετρικά σχήματα και αλγεβρικές παραστάσεις.

Επιπλέον, ενθαρρύνεται η κατανόηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ μαθηματικών ενοτήτων, όπως η σύνδεση Γεωμετρίας και Άλγεβρας, που προωθεί την εφαρμογή της γνώσης σε διαφορετικά πλαίσια. Η δομή της ύλης είναι μεθοδικά σχεδιασμένη ώστε να καθοδηγεί τους μαθητές από θεμελιώδεις έννοιες σε πιο σύνθετες εφαρμογές. Με αυτόν τον τρόπο, προσφέρει τα απαραίτητα εφόδια για την ανάπτυξη βαθιάς μαθηματικής σκέψης, δημιουργώντας τις βάσεις για μια ολοκληρωμένη μαθηματική εκπαίδευση.

Μαθηματικές πρακτικές, κοινωνικο-πολιτισμικές και κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές.
Το νέο ΠΣ αποσκοπεί στην ενεργητική εμπλοκή των μαθητών σε κρίσιμες διεργασίες κατανόησης και ανάπτυξης μαθηματικής γνώσης, οι οποίες χωρίζονται σε μαθηματικές και κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές (Πόταρη κ. ά., 2022). Οι **μαθηματικές πρακτικές ή διεργασίες** περιλαμβάνουν δεξιότητες όπως η δημιουργία συνδέσεων, ο συλλογισμός, η μαθηματική επικοινωνία, η οπτικοποίηση, η επιλογή εργαλείων, η επίλυση προβλημάτων, η μοντελοποίηση και η μεταγνωστική ενημερότητα. Αυτές οι δεξιότητες προάγουν τη σύνδεση μαθηματικών εννοιών με την καθημερινότητα, την κριτική σκέψη και την κατανόηση πολύπλοκων καταστάσεων. Παράλληλα, οι **κοινωνικο-πολιτισμικές και κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές** αποσκοπούν στη χρήση των Μαθηματικών ως εργαλείου ερμηνείας του κόσμου και ανάπτυξης της κριτικής σκέψης, μέσα σε ένα συνεργατικό και υποστηρικτικό περιβάλλον. Δίνεται έμφαση στη μαθηματική ταυτότητα, την αυτοπεποίθηση, την εμπιστοσύνη, τη συνεργασία και την εκτίμηση της αισθητικής και λογικής των Μαθηματικών. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές εμπλέκονται δραστήρια στη μαθησιακή διαδικασία, αναπτύσσοντας θετικά κίνητρα και ουσιαστική μαθηματική κατανόηση που τους εξοπλίζουν με σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες που είναι απαραίτητες για τον πολίτη του 21ου αιώνα.

3. Αρχές διδακτικής προσέγγισης του εγχειριδίου

Καθοριστικά στοιχεία για τη διδακτική διαχείριση είναι:

- Η έμφαση που πρέπει να δίνει ο/η εκπαιδευτικός στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών, στη μαθηματική δραστηριότητα και μάθηση και όχι απλά στη διεκπεραίωση του έργου.
- Η δυνατότητα του/της εκπαιδευτικού να υποστηρίζει και να συντονίζει το διάλογο και τη συζήτηση μέσα στην τάξη (Clarke & Mesiti, 2013).

Ένα καλά σχεδιασμένο έργο ενισχύει τη διερεύνηση, τον πειραματισμό και τον αναστοχασμό, ενώ η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και ψηφιακών εργαλείων διευκολύνει την κατανόηση και την επικοινωνία ιδεών.

Οι βασικές γνωστικές, παιδαγωγικές και διδακτικές αρχές οι οποίες αποτελούν τη βάση για τον σχεδιασμό και την υλοποίηση της εκπαιδευτικής διαχείρισης, περιλαμβάνουν τα εξής:
Εστίαση στην εννοιολογική κατανόηση: Το συνολικό διδακτικό πακέτο δίνει έμφαση στη βαθιά κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, η οποία έχει νόημα για τους μαθητές. Βαρύνουσα σημασία έχει η κατανόηση του «γιατί» και του «πώς» και όχι η μηχανική αποστήθιση τύπων και αλγοριθμικών διαδικασιών. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να διερευνήσουν έννοιες, να αναπτύξουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και να συνδέσουν τα Μαθηματικά με πραγματικά σενάρια. Για παράδειγμα, η διδασκαλία της αναλογίας μπορεί να συνδεθεί με πρακτικές εφαρμογές, όπως η διαχείριση χρημάτων και οι υπολογισμοί ποσοστών, ενισχύοντας τη μαθηματική σκέψη και προάγοντας την ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν δημιουργικά τις γνώσεις τους σε πραγματικά πλαίσια και καθημερινές καταστάσεις.
Διερευνητική και ανακαλυπτική μάθηση: Η διερευνητική και ανακαλυπτική μάθηση αποτελεί θεμελιώδη άξονα της μαθησιακής διαδικασίας, εστιάζοντας σε πρακτικές που προάγουν την ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα. Στις διερευνήσεις τους χρησιμοποιούν μαθηματικά εργαλεία (π.χ. χάρακες, αριθμομηχανές), χειρίζονται αντικείμενα και μοντελοποιούν τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες με τη βοήθεια ποικιλίας υλικών. Μέσα από διεργασίες όπως ο συλλογισμός, η επιχειρηματολογία, η μοντελοποίηση και η επίλυση προβλημάτων, καθώς και η χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων, οι μαθητές ενθαρρύνονται να εξερευνήσουν και να ανακαλύψουν μαθηματικά μοτίβα και σχέσεις.

Αυτή η προσέγγιση βασίζεται σε μαθητοκεντρικές πρακτικές που περιλαμβάνουν:

- **Ανακάλυψη μέσω ερωτήσεων**: Οι μαθητές θέτουν ερωτήματα, διατυπώνουν εικασίες, πειραματίζονται και επαληθεύουν τα συμπεράσματά τους.
- **Ομαδική συνεργασία**: Η εργασία σε ομάδες ενισχύει την επικοινωνία, την ανταλλαγή ιδεών και τη συνεργατική επίλυση προβλημάτων.
- **Ευέλικτες προσεγγίσεις**: Οι μαθητές επιλέγουν μεθόδους που ταιριάζουν στις δεξιότητες και τις ανάγκες τους, καλλιεργώντας την ανεξαρτησία στη μάθηση.

Μέσα από ανοιχτού τύπου ερωτήσεις και δραστηριότητες, οι μαθητές καλούνται να υποθέτουν, να πειραματίζονται, να ανακαλύπτουν και να δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών εννοιών (Cai & Leikin, 2020; Brown & Walter, 2005). Η προσέγγιση αυτή ενισχύει τη δημιουργικότητα, τον μαθηματικό συλλογισμό και την κριτική σκέψη, μετατρέποντας τους μαθητές σε ενεργητικούς συντελεστές της μαθησιακής διαδικασίας (Becker & Shimada, 1997; Arsac & Mante, 2007). Ο εκπαιδευτικός, σε αυτό το πλαίσιο, λειτουργεί ως υποστηρικτής και διευκολυντής, καθοδηγώντας τη μαθησιακή πορεία και ενθαρρύνοντας την ανάπτυξη βαθύτερης κατανόησης. Η διερευνητική μάθηση συμβάλλει στη διαμόρφωση ενός δυναμικού μαθησιακού περιβάλλοντος, όπου οι μαθητές αναπτύσσουν αυτοπεποίθηση και ικανότητες που τους προετοιμάζουν για σύνθετες μαθηματικές και πραγματικές προκλήσεις.

Σύνδεση με την πραγματική ζωή: Ένα από τα σημαντικά χαρακτηριστικά του βιβλίου και του υποστηρικτικού υλικού είναι ότι σε αρκετές περιπτώσεις τα Μαθηματικά συνδέονται με την πραγματική ζωή. Πολλά μαθηματικά έργα και δραστηριότητες βασίζονται σε αυθεντικές καταστάσεις και ρεαλιστικά σενάρια, ενισχύοντας τη μαθησιακή διαδικασία μέσω πρακτικών εφαρμογών (Kosyvas, 2016). Το βιβλίο και το υλικό των ΨΜΑ παρέχουν παραδείγματα εφαρμογών που συνδέουν τις μαθηματικές έννοιες με την καθημερινή ζωή, όπως, η μέτρηση φυσικών μεγεθών, η ανάλυση δεδομένων, η προσομοίωση οικονομικών συναλλαγών και η χρήση Μαθηματικών για την κατανόηση κοινωνικών, περιβαλλοντικών ή επιστημονικών δεδομένων. Μέσα από αυτές τις συνδέσεις, οι μαθητές αποκτούν δεξιότητες που είναι χρήσιμες στην καθημερινότητά τους, ενισχύουν τα κίνητρά τους και αναπτύσσουν θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά.

Συμπερίληψη, διαφοροποίηση και εξατομικευμένη μάθηση: Η συμπερίληψη, η διαφοροποιημένη διδασκαλία και η εξατομικευμένη μάθηση αποτελούν θεμελιώδεις αρχές για την προώθηση της ισότιμης πρόσβασης στη μαθηματική εκπαίδευση. Το διδακτικό βιβλίο Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου, σε συνδυασμό με το υλικό των Ψηφιακών Μαθησιακών Αντικειμένων (ΨΜΑ), υποστηρίζει αυτές τις αρχές, παρέχοντας στους εκπαιδευτικούς εργαλεία για την προσαρμογή της διδασκαλίας στις διαφορετικές ανάγκες των μαθητών. Η συμπερίληψη εστιάζει στη δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που προάγει την ισότητα, αναγνωρίζει τη διαφορετικότητα και ενισχύει την αυτοεκτίμηση και την ενσυναίσθηση (Κόσυβας, 2023). Απαιτείται πιο εξειδικευμένος και εξατομικευμένος σχεδιασμός και διαχείριση για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, ώστε να διασφαλιστεί η ενεργή συμμετοχή τους και η ουσιαστική τους ενσωμάτωση στη μαθησιακή διαδικασία (Τζεκάκη, Μπαραλός, Σταγιόπουλος, 2011). Οι εκπαιδευτικοί, με κατάλληλες προσαρμογές στη διδασκαλία, καλλιεργούν δεξιότητες όπως η επίλυση προβλημάτων και η κριτική σκέψη, ενθαρρύνοντας την ενεργητική συμμετοχή και τη συνεργασία (Kosyvas & Glinou, 2023). Με αυτόν τον τρόπο, διαμορφώνεται ένα περιβάλλον μάθησης που στηρίζει την προσωπική εξέλιξη κάθε μαθητή και ενισχύει το ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά.

Χρήση τεχνολογίας στη μάθηση: Η τεχνολογία αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της σύγχρονης μαθησιακής διαδικασίας, ενισχύοντας την κατανόηση σύνθετων εννοιών και την αυτονομία των μαθητών. Τα Ψηφιακά Μαθησιακά Αντικείμενα (ΨΜΑ) της Β΄ Γυμνασίου προσφέρουν ένα ευέλικτο και εξατομικευμένο περιβάλλον μάθησης, αξιοποιώντας διαδικτυακές πλατφόρμες, διαδραστικές οθόνες, εφαρμογές Μαθηματικών, ηλεκτρονικά φύλλα εργασίας και οπτικοποιήσεις των εννοιών. Η χρήση ψηφιακών εργαλείων λογισμικών (π.χ. GeoGebra, Excel) και προγράμματα μοντελοποίησης παρέχουν στους μαθητές τη δυνατότητα να πειραματιστούν, να δημιουργήσουν προσομοιώσεις και να ερμηνεύσουν δεδομένα. Για παράδειγμα, στις δραστηριότητες

Πιθανοτήτων με προσομοιώσεις, οι μαθητές χρησιμοποιούν ψηφιακά εργαλεία για να κατανοήσουν τη στοχαστική φύση των πιθανοτήτων, συνδυάζοντας θεωρία και πράξη. Η τεχνολογία επιτρέπει τη διερεύνηση μαθηματικών φαινομένων, όπως γεωμετρικές σχέσεις ή πειράματα πιθανότητας, σε ελεγχόμενες συνθήκες, ενισχύοντας την ανακαλυπτική μάθηση. Παράλληλα, σύγχρονα εργαλεία αξιολόγησης δίνουν τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να παρακολουθούν την πρόοδο των μαθητών σε πραγματικό χρόνο, καθιστώντας τη διδασκαλία πιο δυναμική και προσαρμοσμένη στις ανάγκες της τάξης. Η ενσωμάτωση αυτών των ψηφιακών μέσων μετατρέπει τη μαθησιακή εμπειρία σε μια ενεργητική, διαδραστική και ουσιαστική διαδικασία (Κυνηγός, 2006). Ενισχύει τη δημιουργική και κριτική σκέψη των μαθητών, ενώ παράλληλα αναβαθμίζει τον ρόλο του εκπαιδευτικού, υποστηρίζοντας μια καινοτόμο και αποτελεσματική διδασκαλία.

Συνεργατική μάθηση: Η συνεργατική μάθηση αποτελεί βασικό στοιχείο της μαθησιακής διαδικασίας, καθώς προάγει την κοινωνική αλληλεπίδραση και ενισχύει τη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Οι μαθητές συχνά εργάζονται σε ζεύγη ή μικρές ομάδες για να λύσουν προβλήματα. Η συζήτηση με ολόκληρη την τάξη είναι βασικό συστατικό ενός σύγχρονου διδακτικού μοντέλου (Βερύκιος, 2006). Σύμφωνα με τη θεωρία του Vygotsky, η γνώση κατασκευάζεται μέσα από την επικοινωνία και τη συνεργασία (Vygotsky, 1988, 1997). Κατάλληλα μαθηματικά έργα και δραστηριότητες καλούν τους μαθητές να ανταλλάξουν ιδέες, να μοιραστούν διαφορετικές στρατηγικές και να τεκμηριώσουν τις λύσεις τους μέσα σε ένα υποστηρικτικό περιβάλλον. Οι μαθητές εργάζονται σε μικρές ομάδες και καταγίνονται με προβλήματα που απαιτούν συνδυασμό δεξιοτήτων και διαφορετικών προσεγγίσεων, διδάσκοντας και μαθαίνοντας ο ένας από τον άλλον. Μέσα από αυτή τη διαδικασία, ενισχύεται η επικοινωνία, η αιτιολόγηση των απαντήσεων και η ανάπτυξη κοινωνικών δεξιοτήτων (Slavin, 1995; Swan, 2006). Οι δραστηριότητες δημιουργούν ένα μαθησιακό περιβάλλον όπου οι μαθητές αισθάνονται ασφαλείς να πειραματιστούν, να εκφράσουν τις απόψεις τους και να αναπτύξουν την ικανότητα να συνεργάζονται για την επίτευξη κοινών στόχων (Arsac & Mante, 2007; Κόσυβας, 2014). Η ανταλλαγή διαφορετικών προσεγγίσεων όχι μόνο βελτιώνει την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, αλλά και προάγει την αλληλοϋποστήριξη, καθιστώντας τη μαθησιακή διαδικασία μια εμπειρία πλούσια σε ερεθίσματα και δυνατότητες.

Ανάπτυξη της μαθηματικής επικοινωνίας: Η προφορική και γραπτή έκφραση των μαθηματικών ιδεών αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της γνωστικής ανάπτυξης. Οι ενδεικτικές προτάσεις διδακτικής διαχείρισης προσφέρουν ποικιλία δραστηριοτήτων που προάγουν τη μαθηματική επικοινωνία, όπως:

- Συζητήσεις όπου οι μαθητές εξηγούν τις στρατηγικές τους και αιτιολογούν τις απαντήσεις τους.
- Γραπτές εργασίες που περιλαμβάνουν αναλύσεις προβλημάτων και διατύπωση συμπερασμάτων.
- Παρουσιάσεις και ανταλλαγές ιδεών μεταξύ ομάδων.

Η καλλιέργεια αυτής της δεξιότητας βοηθά τους μαθητές να οργανώσουν τη σκέψη τους και να αναπτύξουν την αυτοπεποίθησή τους (Sfard, 2008).

Σκαλωσιές μάθησης: Ο εκπαιδευτικός έχει τον ρόλο του καθοδηγητή, δημιουργώντας διδακτικές καταστάσεις που προάγουν την ενεργή συμμετοχή των μαθητών στη μαθηματική σκέψη. Μέσω της χρήσης νοητικών σκαλωσιών, παρέχει υποστήριξη με υποδείξεις, καθοδηγητικές ερωτήσεις και κατάλληλα εργαλεία, είτε χειραπτικά είτε ψηφιακά, διευκολύνοντας την οικοδόμηση των μαθηματικών εννοιών. Η καθοδήγηση αυτή μειώνεται σταδιακά, ενθαρρύνοντας την αυτονομία και την ανεξάρτητη σκέψη των μαθητών. Η προσαρμογή της διδασκαλίας στις ατομικές ανάγκες κάθε μαθητή αποτελεί βασικό στοιχείο της μαθησιακής διαδικασίας. Οι εκπαιδευτικοί σχεδιάζουν δραστηριότητες και προκλήσεις που ανταποκρίνονται στα διαφορετικά επίπεδα κατανόησης, επιτρέποντας στους μαθητές να προχωρούν με τον δικό τους ρυθμό. Έτσι, η μάθηση γίνεται πιο ουσιαστική, εξατομικευμένη και αποτελεσματική, καθώς οι μαθητές δεν περιορίζονται σε μια παθητική αποδοχή της γνώσης, αλλά συμμετέχουν ενεργά στην κατασκευή της.

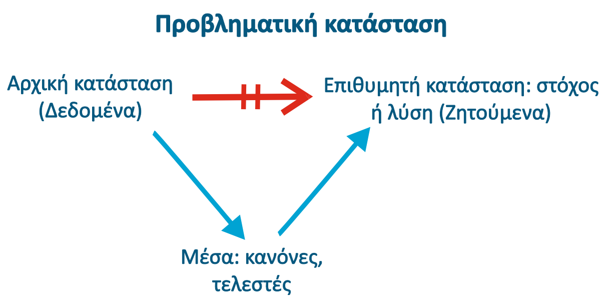
Διαμορφωτική αξιολόγηση: Η διαμορφωτική αξιολόγηση αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλίας, που αποσκοπεί στη συνεχή παρακολούθηση και βελτίωση της μαθησιακής διαδικασίας (Black & Wiliam, 2010). Επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς να εντοπίζουν παρανοήσεις, να προσαρμόζουν τις διδακτικές προσεγγίσεις στις αναπτυξιακές και μαθησιακές ανάγκες των μαθητών και να διαμορφώνουν διαφοροποιημένες δραστηριότητες που ενισχύουν την κατανόηση και τη δημιουργική σκέψη. Μέσω διαγνωστικών εργαλείων, ο εκπαιδευτικός εντοπίζει δυσκολίες και σχεδιάζει στρατηγικές υποστήριξης, διασφαλίζοντας την εξελικτική ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να εφαρμόζουν την αυτοαξιολόγηση και την ετεροαξιολόγηση μέσα από συζητήσεις και συνεργατικές δραστηριότητες, να αναστοχάζονται πάνω στην πρόοδό τους, να αναγνωρίζουν τις δυνατότητές τους και να καλλιεργούν την αυτονομία και την υπευθυνότητά τους στη μάθηση. Οι εκπαιδευτικοί, ως παρατηρητές και καθοδηγητές, παρέχουν ανατροφοδότηση που ενισχύει τη βαθύτερη κατανόηση, ενώ τα λάθη αντιμετωπίζονται ως αφετηρίες διερεύνησης και νέων ερωτημάτων (Μπαραλός, 2007). Η διαδικασία αυτή αποφεύγει την καλλιέργεια άγχους επίδοσης, προσφέροντας στα παιδιά ευκαιρίες επιτυχίας και αναγνώρισης. Μέσω της σύνδεσης θεωρίας και πράξης, η διαμορφωτική αξιολόγηση εστιάζει στη διαδικασία και όχι μόνο στο τελικό αποτέλεσμα, ενισχύοντας την εμπλοκή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία και μετατρέποντας τη διδασκαλία σε μια δυναμική, εξελισσόμενη εμπειρία που προάγει τη μάθηση και τη δημιουργικότητα.

Με αυτούς τους άξονες, η μαθηματική διδασκαλία αποκτά ευελιξία, δημιουργικότητα και σύνδεση με την πραγματική ζωή, ενισχύοντας τη συμμετοχή των μαθητών και καλλιεργώντας μια ουσιαστική και βαθιά κατανόηση των Μαθηματικών. Ο συνδυασμός εστίασης στη γνώση, υποστήριξης της ανεξαρτησίας και χρήσης καινοτόμων εργαλείων προσφέρει στους μαθητές τις απαραίτητες δεξιότητες για να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του σύγχρονου κόσμου.

4. Μαθηματική δραστηριότητα και διαχείριση έργων

Στο νέο ΠΣ το μαθηματικό έργο αναφέρεται στην εργασία που αναθέτει ο εκπαιδευτικός, όπως είναι μια άσκηση, ένα παιχνίδι ή ένα πρόβλημα, ενώ η μαθηματική δραστηριότητα αφορά τις ενέργειες και τις δράσεις των μαθητών κατά την υλοποίησή του (Τζεκάκη, 2011). Αν και το έργο σχεδιάζεται με συγκεκριμένες προθέσεις, η τελική μορφή του διαμορφώνεται μέσα από τη διαπραγμάτευση μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητών (Πόταρη κ. ά., 2022). Τα μαθηματικά έργα αποσκοπούν τόσο στην ανάπτυξη μαθηματικών γνώσεων και διεργασιών, όπως η οπτικοποίηση και η μοντελοποίηση, όσο και στην καλλιέργεια κοινωνικο-πολιτισμικών πρακτικών, συνδέοντας τα Μαθηματικά με τον πολιτισμό και την καθημερινότητα (Τσίτσος & Σταθοπούλου, 2016).

Στο πλαίσιο των μαθηματικών έργων βαρύνουσα σημασία έχουν τα προβλήματα και η λύση τους. Η έννοια του προβλήματος στα Μαθηματικά αναφέρεται σε μια κατάσταση όπου ο μαθητής δεν γνωρίζει εκ των προτέρων τη στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσει για να φτάσει στη λύση. Σύμφωνα με την ετυμολογία της λέξης, πρόβλημα είναι ένα εμπόδιο που προεξέχει και προβάλλεται για λύση. Η υπέρβαση της δυσκολίας οδηγεί στον εμπλουτισμό των γνώσεων και εμπειριών του μαθητή. Σε αντίθεση με μια άσκηση, το πρόβλημα δεν έχει προκαθορισμένη μέθοδο ή αλγόριθμο που οδηγεί με βεβαιότητα στη λύση, απαιτώντας ανάλυση, κριτική σκέψη και δημιουργικότητα.



Η επιλογή και διαχείριση μαθηματικών έργων αποτελεί θεμελιώδη διδακτική πρακτική που ενεργοποιεί τη μαθηματική δραστηριότητα και προάγει τη μάθηση. Τα μαθηματικά έργα, όπως παιχνίδια, ασκήσεις, προσομοιώσεις, προβλήματα ή ερωτήσεις, πρέπει να αντλούν ενδιαφέρον από την καθημερινή ζωή, να επιδέχονται πολλαπλές μεθόδους λύσης και να προωθούν την τεκμηρίωση και τη λογική σκέψη. Η σύνδεση με τις εμπειρίες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών ενισχύει τη συμμετοχή τους και προσφέρει ευκαιρίες αυθεντικής μάθησης.

Ο εκπαιδευτικός, σχεδιάζοντας και προσαρμόζοντας τα μαθηματικά έργα, οφείλει να λαμβάνει υπόψη τις ανάγκες και τις δυνατότητες των μαθητών, διατηρώντας παράλληλα τη μαθηματική πρόκληση. Ένα καλά σχεδιασμένο έργο ενισχύει τη διερεύνηση, τον πειραματισμό, τη μοντελοποίηση και τον αναστοχασμό, ενώ η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων και ψηφιακών εργαλείων διευκολύνει την κατανόηση και την επικοινωνία ιδεών (ΙΕΠ, 2023). Η μαθηματική δραστηριότητα που προκύπτει καλλιεργεί δεξιότητες αναζήτησης ιδιοτήτων και σχέσεων, δημιουργίας συνδέσεων και εμβάθυνσης σε μεγάλες μαθηματικές ιδέες, όπως η απόδειξη, η ισοδυναμία και οι μετασχηματισμοί. Με αυτόν τον τρόπο, προάγεται η αυθεντική μαθηματική σκέψη, ενισχύοντας τη βαθιά κατανόηση και τη μαθηματική αυτοπεποίθηση των μαθητών.

Η διδακτική διαχείριση ενός μαθηματικού έργου (π. χ. προβλήματος) επικεντρώνεται στην ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα και στη δημιουργία ενός πλαισίου διαπραγμάτευσης μέσω διαλόγου. Στη συνέχεια περιγράφονται τα διακριτά στάδια του τριμερούς μοντέλου ανάπτυξης της διαχείρισης (Πόταρη κ.ά., 2022):

α) Κατανόηση του έργου (π. χ. μαθηματικού προβλήματος): Το πρώτο στάδιο δίνει έμφαση στην ερμηνεία και ανάλυση του μαθηματικού έργου. Οι μαθητές διαβάζουν προσεκτικά, εντοπίζουν τα δεδομένα, κατανοούν τα ζητούμενα και απαντούν σε ερωτήσεις όπως: *Τι ζητά το πρόβλημα; Ποια δεδομένα έχουμε; Τι δεν γνωρίζουμε;* Η χρήση διαγραμμάτων και οπτικοποιήσεων βοηθά στη διαμόρφωση μιας σαφούς εικόνας του προβλήματος. Οι μαθητές διερευνούν το πρόβλημα, κάνουν ατομικές δοκιμές και επαληθεύσεις, αρχίζουν τη διερευνητική δράση και σχηματίζουν μια πρώτη παράσταση του προβλήματος. Ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί τους μαθητές στη σύνδεση του έργου με προηγούμενες γνώσεις, προτείνοντας κατάλληλους πόρους, όπως χειραπτικά ή ψηφιακά εργαλεία.

β) Αυτόνομη εργασία (τα ηνία ανήκουν στους μαθητές): Στο δεύτερο στάδιο οι μαθητές εργάζονται ατομικά ή σε μικρές ομάδες, συμμετέχουν ενεργητικά σε μαθηματικές δραστηριότητες στις οποίες προεξάρχουν η δράση και διατύπωση (Brousseau,1998). Οι μαθητές αναλαμβάνουν την ευθύνη για τη διερεύνηση και την ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης. Δοκιμάζουν διάφορες μεθόδους, όπως η εφαρμογή τύπων, η διάσπαση του προβλήματος ή η χρήση πινάκων και διαγραμμάτων, ενισχύοντας τη δημιουργική και κριτική τους σκέψη (Polya, 1998; Schoenfeld, 1985). Η συνεργασία διευκολύνει την ανταλλαγή ιδεών και την καλλιέργεια συλλογικού συλλογισμού. Κύριο μέλημα του εκπαιδευτικού είναι η δημιουργία κλίματος καλοπροαίρετης συζήτησης στις ομάδες μεταξύ των μαθητών, η ενθάρρυνσή τους για γόνιμη ανταλλαγή σκέψεων πάνω στο πρόβλημα, η παρότρυνσή τους για κοινή διερεύνηση και συναποδοχή νοημάτων (Cobb & Bauersfeld, 1995). Επίσης, ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει έμφαση στον συλλογισμό των μαθητών και στη νοερή επιχειρηματολογία με ερωτήσεις όπως: «*Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον συμμαθητή σας; Γιατί;*», «*Τι θα γινόταν αν…; Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;*», «*Η απάντηση που δώσατε έχει νόημα; Είστε σίγουροι ότι η απάντηση που δίνετε είναι σωστή; Πώς το ξέρετε;*», «*Υπάρχει άλλη απάντηση;*», «*Υπάρχει άλλος τρόπος να βρούμε τη λύση; Πού διαφέρουν οι διαφορετικές στρατηγικές που ακολουθήσατε;*» κ.λπ. Όταν παρέχει οδηγίες ο εκπαιδευτικός ενδείκνυται να εστιάζει κυρίως στη διαδικασία και όχι στο τελικό προϊόν της μαθηματικής διερεύνησης. Για παράδειγμα, μπορεί να απευθύνει στους μαθητές ερωτήσεις/υποδείξεις όπως: «*Ποια είναι τα στοιχεία-κλειδιά του προβλήματος;*», «*Τι αλλάζει και τι παραμένει σταθερό; Διατηρήστε όλες τις μεταβλητές πλην μιας σταθερές και αρχίστε να πειραματίζεστε με αυτή. Ποιος ο ρόλος της; Ακολουθήστε τη ίδια διαδικασία για κάθε μεταβλητή*» κ.λπ. (Πόταρη κ.ά., 2022).

γ) Ανοιχτή μαθηματική συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης: Στο τρίτο στάδιο, οι μαθητές παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της δραστηριότητάς τους, συγκρίνουν τις εκδοχές τους, υπερασπίζονται και αιτιολογούν τις λύσεις τους, αμφισβητούν τα επιχειρήματα των συμμαθητών τους και αναστοχάζονται για την αποτελεσματικότητα των προσεγγίσεών τους (Κόσυβας, 2008). Μέσα από ερωτήματα όπως: «*Ήταν η στρατηγική μου αποτελεσματική;*» ή «*Θα μπορούσα να λύσω το πρόβλημα διαφορετικά;*», «*Τι έμαθα από αυτή τη διαδικασία;*», ενισχύεται η δημόσια μαθηματική «διαμάχη» και η πειστική τεκμηρίωση. Ο εκπαιδευτικός είναι συντονιστής της συζήτησης, ζητά από τους μαθητές να αποφασίσουν «*Ποιες ιδέες είναι σωστές και ποιες είναι λανθασμένες;*», «*Ποια στρατηγική ήταν πιο σύντομη;*» βοηθώντας τους να κάνουν συνδέσεις και επεκτάσεις των μαθηματικών ιδεών, ενώ παράλληλα προβαίνει στην εγκυροποίηση ή/και τη θεσμοθέτηση της γνώσης που αποκτήθηκε (Brousseau,1998). Η φάση αυτή προάγει τη μάθηση μέσω αδιάλειπτου αναστοχαστικού διαλόγου. Στο τέλος ο εκπαιδευτικός συνοψίζει τις στρατηγικές, τα επιχειρήματα, τα συμπεράσματα από τις λύσεις που εκτέθηκαν, κάνει σύνθεση της δραστηριότητας της τάξης.

Το τριμερές μοντέλο αποτελεί μια αποτελεσματική προσέγγιση για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών, ενδείκνυται για τη λύση μαθηματικών προβλημάτων στην αίθουσα διδασκαλίας και προσαρμόζεται άριστα τόσο σε ατομικό όσο και σε ομαδικό επίπεδο. Ωστόσο, οι μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν δυσκολίες λόγω ανεπαρκών δεξιοτήτων επικοινωνίας, συνεργασίας και διαχείρισης των συγκρούσεων, προκαλώντας περιθωριοποίηση κάποιων μαθητών. Από την πλευρά τους, οι εκπαιδευτικοί καλούνται να περιορίσουν την παραδοσιακή άμεση διδασκαλία και να ενισχύσουν μαθητοκεντρικές μεθόδους μάθησης, παράδοση που απαιτεί διαρκή παρακολούθηση και αξιολόγηση για τη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Μέσα από διαδοχικά στάδια, ενισχύεται η ενεργητική συμμετοχή, η δημιουργικότητα και η κριτική σκέψη, διαμορφώνοντας ένα μαθησιακό περιβάλλον που ανταποκρίνεται στις σύγχρονες ανάγκες, προάγοντας παράλληλα την ανάπτυξη αυτόνομων, ενεργών και υπεύθυνων πολιτών σε συνθήκες ισότιμης επικοινωνίας και συνεργασίας.

Η διδακτική προσέγγιση του βιβλίου και του ψηφιακού υλικού για την πρόσκτηση της νέας γνώσης βασίζεται σε τρεις αλληλένδετες γνωστικές διεργασίες: τη **διερεύνηση**, την **οικοδόμηση** και την **εδραίωση** της γνώσης. Αυτές αποτελούν τη βάση για μια μαθησιακή διαδικασία που ενισχύει την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών και διασφαλίζει μια στέρεη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Η διερεύνηση της νέας γνώσης: Το πρώτο συστατικό της μάθησης, η γνωστική διεργασία της διερεύνησης της νέας γνώσης, αποτελεί βασικό άξονα του ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου (ΙΕΠ, 2023) και εστιάζει στη σύνδεση της νέας μαθηματικής γνώσης με τις πρότερες μαθησιακές εμπειρίες των μαθητών. Η διερεύνηση μπορεί να είναι ελεύθερη ή να περιέχει έναν βαθμό καθοδήγησης. Μια διδασκαλία που υποστηρίζει τη διερεύνηση βασίζεται στην παρουσίαση πλούσιων μαθηματικών έργων, προσπελάσιμων από όλους τους μαθητές, με έμφαση στη διαδικασία επίλυσης και την ανάπτυξη συνδέσεων. Τα έργα ενθαρρύνουν τη χρήση ποικίλων μεθόδων και στρατηγικών, ενώ το συνεργατικό περιβάλλον της τάξης προάγει την ανταλλαγή ιδεών, την ανάπτυξη επιχειρημάτων και την κριτική ανάλυση. Ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί ερωτήσεις που καλλιεργούν τον συλλογισμό και αναδεικνύουν παρανοήσεις ως ευκαιρίες μάθησης, ενώ υποστηρίζει τους μαθητές να αναλαμβάνουν ευθύνες στη διαδικασία μάθησης, διατυπώνοντας ερωτήσεις, σχεδιάζοντας στρατηγικές και αποτιμώντας τις ιδέες τους με κριτικό τρόπο. Οι διερευνήσεις συχνά ξεκινούν από ένα αρχικό πρόβλημα, το οποίο λειτουργεί ως αφόρμηση για τη μαθησιακή διαδικασία. Αυτό το πρόβλημα προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών, ενεργοποιώντας την περιέργεια και τη σκέψη τους, και θέτει τις βάσεις για μια ενεργητική και ουσιαστική εμπλοκή στη μάθηση. Αυτές οι διερευνητικές δραστηριότητες, είτε έγχαρτες είτε ψηφιακές, προσαρμόζονται στις ανάγκες και τις δυνατότητες της τάξης, διευκολύνοντας τη συμμετοχή όλων των μαθητών. Οι μαθητές καθοδηγούνται να ανακαλύψουν έννοιες, να διαμορφώσουν στρατηγικές και να συνδέσουν τη θεωρία με την πράξη, δημιουργώντας ένα περιβάλλον που ενισχύει τη μαθηματική δραστηριότητα και τον αναστοχασμό. Η διερεύνηση θέτει τη βάση για την ανάπτυξη της μαθηματικής συζήτησης και προετοιμάζει την ομαλή μετάβαση στη θεωρία. Με έμφαση στη δημιουργική σκέψη, τον πειραματισμό και τη διατύπωση εικασιών, συμβάλλει στην καλλιέργεια μιας βαθιάς και βιωματικής κατανόησης των Μαθηματικών, καθιστώντας τη μάθηση μια πλούσια και ουσιαστική εμπειρία.

Οικοδόμηση της νέας γνώσης: Κατά τη διεργασία της οικοδόμησης, οι μαθηματικές δράσεις των μαθητών που αναπτύχθηκαν κατά τη διερεύνηση προεκτείνονται και εμπλουτίζονται με την πραγμάτευση θεωρητικών γνώσεων, μεθόδων, παραδειγμάτων και εφαρμογών από τον εκπαιδευτικό. Οι μαθητές εισάγονται σταδιακά σε νέες μαθηματικές έννοιες, όπως εικασίες, ορισμοί, κανόνες, τύποι και συμπεράσματα, μέσα από κατάλληλες εξηγήσεις και δραστηριότητες φθίνουσας καθοδήγησης. Η διαδικασία αυτή δεν παρέχει έτοιμες γνώσεις, αλλά οι θεωρητικές έννοιες παρουσιάζονται αφού πρώτα έχουν ερευνηθεί, επιτρέποντας στους μαθητές να κατανοήσουν την προέλευσή τους.

Η οικοδόμηση των μαθηματικών εννοιών υποστηρίζεται από δραστηριότητες που ενισχύουν τις διεργασίες μάθησης, δίνοντας έμφαση στην κατανόηση και τη συστηματική σκέψη. Παράλληλα, η αυτοαξιολόγηση και ο αναστοχασμός ενθαρρύνονται, παρέχοντας στους μαθητές την ευκαιρία να επανεξετάσουν τη μαθησιακή τους πορεία, να αναγνωρίσουν τυχόν κενά και να εμβαθύνουν στις μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται. Αυτή η γνωστική διεργασία προάγει την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών και τους προετοιμάζει για την εφαρμογή των νέων γνώσεων σε σύνθετα προβλήματα.

Εδραίωση της νέας γνώσης: Η διεργασία εδραίωσης επικεντρώνεται στην εμπέδωση των μαθηματικών γνώσεων μέσω λυμένων εφαρμογών, άλυτων ασκήσεων και προβλημάτων που ενθαρρύνουν την αυτενέργεια των μαθητών. Οι λυμένες εφαρμογές που παρέχονται στο βιβλίο προσφέρουν πρότυπα επιχειρηματολογίας και ειδικής μεθοδολογίας, διευκολύνοντας την κατανόηση της επίλυσης ασκήσεων διαφορετικών κατηγοριών. Μέσα από αυτές, οι μαθητές εξοικειώνονται με τη μαθηματική σκέψη, αναπτύσσουν εμπειρίες και ικανότητες και προάγουν την αυτοδιόρθωση και την αυτοαξιολόγησή τους.

Οι άλυτες ασκήσεις και τα προβλήματα συνοδεύουν κάθε διδακτική ενότητα, παρέχοντας στους μαθητές την ευκαιρία να εξασκηθούν, να αναπτύξουν αυτενέργεια και να δοκιμάσουν τις γνώσεις τους σε διαφορετικά επίπεδα δυσκολίας. Η ποικιλία και η πλούσια θεματολογία τους εξυπηρετούν τη διαφοροποίηση της μαθησιακής διαδικασίας, καθώς ανταποκρίνονται σε όλα τα επίπεδα ικανοτήτων. Η ταξινόμηση των ασκήσεων σε ενότητες με αυξανόμενο βαθμό δυσκολίας επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς να επιλέγουν εκείνες που ταιριάζουν στις ανάγκες της τάξης τους. Επιπλέον, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να επιβεβαιώνουν την ορθότητα των αποτελεσμάτων τους μέσω των συνοδευτικών υποδείξεων και απαντήσεων. Τα προβλήματα μπορούν να λυθούν είτε στην τάξη είτε ως κατ' οίκον εργασίες, παρέχοντας ευελιξία στη διδακτική διαδικασία και ενισχύοντας την αυτονομία των μαθητών. Με αυτόν τον τρόπο, η γνωστική διεργασία της εδραίωσης διαμορφώνει μια σταθερή βάση γνώσεων και δεξιοτήτων, συμβάλλοντας στην ολοκληρωμένη κατανόηση και εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών.

Το σχολικό βιβλίο αυτό υλοποιεί τα παραπάνω, παρέχοντας στους εκπαιδευτικούς υποστήριξη για τον σχεδιασμό και τη διδακτική διαχείριση των ΠΜΑ. *Ειδικότερα:*

- Εισαγωγικές διερευνήσεις που αποτελούν γέφυρες ανάμεσα σε αυτά που ξέρουν και σε αυτά που πρόκειται να μάθουν (προκαταβολικοί οργανωτές) οι μαθητές.
- Θεωρία με παραδείγματα βασισμένα στις εμπειρίες των μαθητών.
- Εφαρμογές που λειτουργούν ως παραδείγματα για τους μαθητές.
- Πλήθος ψηφιακών δραστηριοτήτων σε κάθε ενότητα οι οποίες δίνουν τη δυνατότητα διερευνήσεων και πολλαπλών αναπαραστάσεων.
- Συμπληρωματικό υλικό με πλήθος ιστορικών σημειωμάτων και εργασιών επέκτασης.
- Ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης.
- Ερωτήσεις κατανόησης.
- Συνθετικές εργασίες.

- Αξιολόγηση (Ασκήσεις και προβλήματα).
- Ανακεφαλαίωση.
- Επαναληπτικά έργα.

5. Ενδεικτικά παραδείγματα πρακτικής εφαρμογής

Η έρευνα αναδεικνύει ότι πολλοί μαθητές του Γυμνασίου αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μάθηση των Μαθηματικών (Βερύκιος, 2003, Λεμονίδης, 1996), γεγονός που συχνά οδηγεί σε άνισες επιδόσεις και σχολική αποτυχία (Δραμαλίδης κ.ά., 2009; OECD, 2023). Σε αυτό το πλαίσιο, οι εκπαιδευτικοί καλούνται να διαμορφώσουν ένα μαθησιακό περιβάλλον που να χαρακτηρίζεται από ασφάλεια, συμπερίληψη και ισότητα, ενθαρρύνοντας την ενεργητική συμμετοχή όλων των μαθητών. Κάθε μαθητής, ανεξαρτήτως προέλευσης ή ταυτότητας, δικαιούται ίσες ευκαιρίες για την αξιοποίηση του δυναμικού του και την επίτευξη των καλύτερων δυνατών ακαδημαϊκών επιδόσεων (Σακονίδης, 2007; Louie, 2017).

Για να επιτευχθούν αυτοί οι στόχοι, η διδακτική διαχείριση των μαθηματικών έργων διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο. Στο βιβλίο έχουμε ενσωματώσει πλήθος διερευνήσεων οι οποίες υποδεικνύουν την προτεινόμενη διδακτική διαχείριση, καθώς και πλήθος ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων που παρατίθενται στο συμπληρωματικό υλικό και διευρύνουν τα εργαλεία προσέγγισης των εννοιών από τους μαθητές.

Διαχείριση πολύ μεγάλων και πολύ μικρών αριθμών (Διδ. Ενότ. 1.3. σ. 20).

Η διερευνητική-ανακαλυπτική μάθηση αποτελεί κεντρικό στοιχείο της διδακτικής προσέγγισης στα Μαθηματικά, καθώς ενισχύει τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών μέσα από την ενεργή συμμετοχή, τον πειραματισμό και τη διατύπωση ερωτημάτων. Ο εκπαιδευτικός, ως διευκολυντής της μάθησης, δημιουργεί ένα περιβάλλον το οποίο ευνοεί την κριτική σκέψη και τη σύνδεση των Μαθηματικών με πραγματικές εφαρμογές. Μέσω προσεκτικά επιλεγμένων δραστηριοτήτων, όπως η χρήση της τυποποιημένης μορφής αριθμών, οι μαθητές αποκτούν εργαλεία που ενισχύουν την κατανόηση και τη διαχείριση πολύ μεγάλων ή πολύ μικρών ποσοτήτων.

Διερεύνηση 2. Διαχείριση πολύ μεγάλων και πολύ μικρών αριθμών.

Εργασία μαθητών ατομικά ή κατά ζεύγη.

α) Στην πρώτη εικόνα η ερευνήτρια μέτρησε με το μικροσκόπιο την ακτίνα ενός ατόμου ουρανίου και βρήκε ότι είναι 0,0000000004 m. Στη δεύτερη εικόνα ο ερευνητής μέτρησε με το τηλεσκόπιο την απόσταση ανάμεσα στον Δία και τον Ήλιο και βρήκε ότι είναι 780.000.000 km. Πώς νομίζετε ότι μπορούν να εκφραστούν καλύτερα τα αποτελέσματα των δύο μετρήσεων σε μέτρα (m);

β) Η εύρεση κατάλληλων τρόπων γραφής πολύ μεγάλων και πολύ μικρών αριθμών διευκολύνει την παρουσίαση και σύγκριση δεδομένων του πραγματικού κόσμου. Να τεκμηριώσετε την αναγκαιότητα αξιοποίησής τους περιγράφοντας δύο δικά σας παραδείγματα.

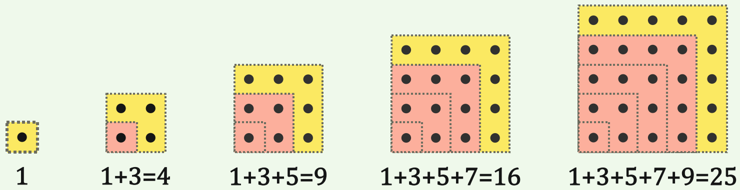
Με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα, αναδεικνύεται η σημασία της επιστημονικής γραφής στη βελτίωση της κατανόησης και της ευκολίας επεξεργασίας τέτοιων μεγεθών. Οι μαθητές συμμετέχουν ενεργά σε μετασχηματισμούς αριθμών, δοκιμάζουν διαφορετικές μορφές και αξιολογούν την πρακτικότητά τους. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τη διερεύνηση μέσα από ερωτήματα, όπως:

- *Να γράψετε την ακτίνα του ουρανίου ως γινόμενο του 40 με μια δύναμη του δέκα.*
- *Να γράψετε την ακτίνα του ουρανίου ως γινόμενο του 4 με μια δύναμη του δέκα.*
- *Να γράψετε την απόσταση Δία-Ήλιου ως γινόμενο του 78 με μια δύναμη του δέκα.*
- *Να γράψετε την απόσταση Δία-Ήλιου ως γινόμενο του 7,8 με μια δύναμη του δέκα.*

Οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν τις αρχικές και τις νέες μορφές, συζητώντας ποιες είναι πιο εύκολα κατανοητές και διαχειρίσιμες. Επιπλέον, αναζητούν δικά τους παραδείγματα πολύ μικρών ή πολύ μεγάλων αριθμών και τα μετατρέπουν σε επιστημονική γραφή, αποκτώντας έτσι εμπειρική κατανόηση της σημασίας της. Ο εκπαιδευτικός, μέσα από αυτή τη διαδικασία, καθοδηγεί τη μαθησιακή πορεία, θέτοντας στοχευμένες ερωτήσεις και ενισχύοντας τον αναστοχασμό. Η εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική διερεύνηση όχι μόνο ενισχύει τη δεξιότητά τους στην τυποποιημένη γραφή, αλλά και τους επιτρέπει να συνειδητοποιήσουν τη λειτουργικότητα των Μαθηματικών ως εργαλείο ανάλυσης, σύγκρισης και κατανόησης του κόσμου.

Τετράγωνοι αριθμοί (Διδακτική ενότητα 1.5. σ., 28).

Η διδασκαλία των τετράγωνων αριθμών και των γνωμόνων, εμπνευσμένη από την πυθαγόρεια παράδοση, προάγει τη σύνδεση Αριθμητικής και Γεωμετρίας, βοηθώντας τους μαθητές να κατανοήσουν έννοιες όπως η δύναμη και η αριθμητική κανονικότητα. Μέσω της οπτικοποίησης και της ιστορικής προσέγγισης, οι μαθητές αναπτύσσουν εννοιολογική κατανόηση και εμβαθύνουν στη μαθηματική σκέψη. Η δραστηριότητα αποσκοπεί στην ενίσχυση της κατανόησης των τετράγωνων αριθμών μέσα από μια διττή προσέγγιση: αριθμητική και γεωμετρική. Οι τετράγωνοι αριθμοί παρουσιάζονται τόσο ως το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού $ν^2=ν\cdot ν$ όσο και ως γεωμετρικές διατάξεις ψηφίδων που σχηματίζουν τετράγωνα.



Ο εκπαιδευτικός εισάγει την έννοια των «γνωμόνων του Πυθαγόρα» και καθοδηγεί τους μαθητές να εργαστούν σε ζεύγη ή μικρές ομάδες, εστιάζοντας στη διερεύνηση των τετράγωνων αριθμών. Μέσα από γεωμετρικές αναπαραστάσεις, οι μαθητές παρατηρούν τη διαδοχική αύξηση των τετράγωνων αριθμών (π.χ. 1, 4, 9, 16, 25) και διαπιστώνουν ότι κάθε νέος τετράγωνος αριθμός προκύπτει από τον προηγούμενο με την προσθήκη του επόμενου περιττού αριθμού. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τη μαθηματική σκέψη μέσα από ερωτήματα, όπως:

- *Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στους περιττούς αριθμούς και τον σχηματισμό του επόμενου τετραγώνου;*
- *Μπορείτε να προβλέψετε τον επόμενο τετράγωνο αριθμό;*

Οι μαθητές παρατηρούν ότι, για παράδειγμα, από το $5^2=25$ στο $6^2=36$, προστίθεται ο αριθμός 11, που είναι ο επόμενος περιττός μετά το 9. Διατυπώνουν έτσι την εικασία:
«Για να περάσουμε από έναν τετράγωνο αριθμό στον επόμενο, προσθέτουμε τον επόμενο διαδοχικό περιττό αριθμό».

Η δραστηριότητα ολοκληρώνεται με τη μαθηματική διατύπωση της εικασίας και τη σύνδεση αριθμητικών και γεωμετρικών αναπαραστάσεων. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τον αναστοχασμό και την ανακάλυψη μαθηματικών μοτίβων, καλλιεργώντας τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών και ενισχύοντας τη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών.

Εργασία με προεκτάσεις: Τετράγωνοι αριθμοί στη ζωγραφική (ΨΜΑ, 1.5., σ. 31).

Η αισθητική εμπειρία μπορεί να αποτελέσει κρίσιμο εργαλείο στη μαθησιακή διαδικασία, ενισχύοντας τη δημιουργικότητα και διευκολύνοντας τη βαθύτερη κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Η ενσωμάτωση της τέχνης, όπως η ζωγραφική, στη διδασκαλία προάγει την ενεργητική συμμετοχή και τη σύνδεση της γνώσης με την καθημερινή εμπειρία, προσφέροντας ένα πιο ουσιαστικό μαθησιακό πλαίσιο. Η δραστηριότητα αποτελεί ένα Ψηφιακό Μαθησιακό Αντικείμενο (ΨΜΑ) και έχει στόχο να εισαγάγει τους μαθητές στην έννοια των τετράγωνων αριθμών και των τετραγωνικών ριζών μέσα από μια δημιουργική διερεύνηση. Μέσα από ομαδική εργασία και τη δημιουργία καλλιτεχνικών έργων, οι μαθητές αναπτύσσουν δεξιότητες μαθηματικής σκέψης, επίλυσης προβλημάτων και συνεργασίας, συνδέοντας τα Μαθηματικά με την καθημερινή ζωή και συμβάλλοντας στη βελτίωση του σχολικού περιβάλλοντος.

Η δραστηριότητα ξεκινά με την παρουσίαση του θέματος από τον εκπαιδευτικό, ο οποίος θέτει στους μαθητές το ερώτημα αν τα μικρά χρωματιστά τετράγωνα που παρήγαγαν μπορούν να οργανωθούν σε ένα μεγαλύτερο τετράγωνο. Οι μαθητές εξετάζουν αν οι αριθμοί 144, 256 και 441 είναι τετράγωνοι, βρίσκοντας τις τετραγωνικές τους ρίζες μέσα από υπολογισμούς, είτε χειρόγραφους είτε με τη χρήση αριθμομηχανών. Συζητώντας και ανταλλάσσοντας ιδέες, επιβεβαιώνουν ότι το άθροισμα 144 + 256 + 441 ισούται με 841 και προχωρούν στον έλεγχο αν αυτός ο αριθμός είναι τετράγωνος, διαπιστώνοντας ότι η τετραγωνική του ρίζα είναι 29. Η ανακάλυψη αυτή δίνει στους μαθητές μια πρακτική εμπειρία της μαθηματικής έννοιας και τους βοηθά να την κατανοήσουν μέσα από τη δομή και την αλληλουχία των αριθμών.

Στη συνέχεια, οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν καλλιτεχνικά μοτίβα χρησιμοποιώντας τα τετράγωνα που έχουν εξετάσει. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τη συνεργασία μεταξύ των ομάδων και καθοδηγεί τη διαδικασία με ερωτήματα που εμπνέουν δημιουργικές ιδέες, όπως η κατασκευή γεωμετρικών σχεδίων ή πολύχρωμων μοτίβων που θα διακοσμήσουν το σχολικό περιβάλλον. Οι μαθητές παρουσιάζουν τις ιδέες τους και εργάζονται από κοινού για την υλοποίηση των καλλιτεχνικών τους έργων, εφαρμόζοντας τις μαθηματικές έννοιες στην πράξη. Μέσα από αυτή τη δημιουργική διαδικασία, αναπτύσσουν τόσο τη μαθηματική όσο και την αισθητική τους αντίληψη, ενώ η εικαστική έκφραση λειτουργεί ως μέσο κατανόησης και εφαρμογής των εννοιών που μελετήθηκαν.

Με την ολοκλήρωση της δραστηριότητας, ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί τη συζήτηση, δίνοντας στους μαθητές την ευκαιρία να αναστοχαστούν τη μαθησιακή και δημιουργική τους εμπειρία. Οι μαθητές αναφέρουν τι έμαθαν για τους τετράγωνους αριθμούς και τις τετραγωνικές ρίζες, συζητούν πώς η δραστηριότητα τους βοήθησε να κατανοήσουν καλύτερα αυτές τις έννοιες και εκφράζουν τις απόψεις τους για τη διαδικασία της ομαδικής εργασίας. Ο εκπαιδευτικός τους ενθαρρύνει να σκεφτούν πώς οι δεξιότητες που ανέπτυξαν μπορούν να τους φανούν χρήσιμες σε άλλα μαθησιακά ή δημιουργικά πλαίσια. Επιπλέον, οι μαθητές αναγνωρίζουν τη συμβολή τους στη διαμόρφωση του σχολικού περιβάλλοντος, συνδυάζοντας τη μαθηματική γνώση με την καλλιτεχνική δημιουργία και την ομαδική συνεργασία, ενισχύοντας τη συνολική μαθησιακή εμπειρία και την ανάπτυξη πολύπλευρων δεξιοτήτων.

Συνθετική Εργασία: Ο «Ταξιδευτής των Μαθηματικών» και Ιστορικό σημείωμα για την τετραγωνική ρίζα του 2 (ΨΜΑ, 1.6., σ. 36).

Η συνθετική εργασία αποσκοπεί να αναδείξει την ιστορική, μαθηματική και φιλοσοφική σημασία της ανακάλυψης της τετραγωνικής ρίζας του 2 $\left(\sqrt{2}\right)$ και της έννοιας της ασυμμετρίας, που αποτέλεσε σημείο καμπής στη μαθηματική σκέψη. Μέσα από τη μελέτη των πυθαγόρειων αρχών, οι μαθητές εξετάζουν πώς η ιδέα ότι όλα μπορούν να εξηγηθούν μέσω ακέραιων αριθμών συγκρούστηκε με την ασυμμετρία, αλλάζοντας για πάντα την αντίληψη για τους αριθμούς. Η εργασία ενθαρρύνει τους μαθητές να συνδέσουν αυτήν την ιστορική ανακάλυψη με τη σύγχρονη διδασκαλία, τη Γεωμετρία και τις εφαρμογές της στην καθημερινή ζωή, καλλιεργώντας μια βαθύτερη κατανόηση της μαθηματικής κληρονομιάς.

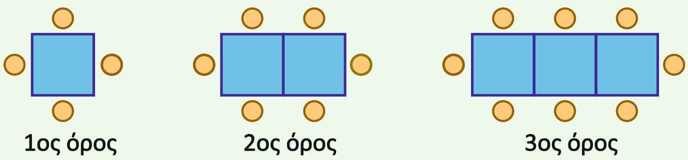
Για την εκπόνηση της συνθετικής εργασίας, οι μαθητές αντλούν πληροφορίες από το βιβλίο *«Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών»* του Κάλβιν Κλόουνσον (Calvin, 2007) και το ιστορικό σημείωμα του σχολικού βιβλίου *«Η ανακάλυψη της παράδοξης τετραγωνικής ρίζας του 2 και το πρόβλημα της ασυμμετρίας»* και τις πηγές που αναφέρονται σε αυτό. Κάθε ομάδα αναλαμβάνει έναν θεματικό άξονα και παραδίδει γραπτή εργασία 3-5 σελίδων, συνοδευόμενη από παρουσίαση ή δημιουργικό έργο. Το χρονοδιάγραμμα οργανώνεται σε τρεις φάσεις: έρευνα και συλλογή πληροφοριών την πρώτη εβδομάδα, συγγραφή και δημιουργία υλικού τη δεύτερη, και παρουσίαση την τρίτη. Μέσα από καθοδηγητικά ερωτήματα, όπως η σημασία του αριθμού $\sqrt{2}$ στη Γεωμετρία, η ιστορική πρόκληση της ασυμμετρίας για τους Πυθαγόρειους και οι σύγχρονες εφαρμογές της, οι μαθητές διερευνούν την πολιτισμική και μαθηματική αξία της έννοιας, συνδέοντας τη με τη Γεωμετρία, τη διδασκαλία και την καθημερινή ζωή.

1. **Ιστορικό πλαίσιο:** Οι μαθητές μαθαίνουν για τη σημασία των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα και τη σύνδεση με τη Φιλοσοφία και τη Γεωμετρία. Ανακαλύπτουν πώς οι Πυθαγόρειοι αντέδρασαν στην έννοια της ασυμμετρίας και τις επιπτώσεις αυτής στην εποχή τους.
2. **Μαθηματική ανάλυση:** Η τετραγωνική ρίζα του 2 εξηγείται γεωμετρικά μέσω του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Οι μαθητές κατανοούν την ασυμμετρία και μαθαίνουν γιατί ο αριθμός δεν μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο ακέραιων αριθμών. Εξετάζουν τη διάκριση μεταξύ ρητών και άρρητων αριθμών.
3. **Φιλοσοφική διάσταση:** Η ασυμμετρία αλλάζει τη μαθηματική κατανόηση και τη Φιλοσοφία, ανατρέποντας την πυθαγόρεια ιδέα της τέλειας τάξης. Οι μαθητές βλέπουν πώς αυτή η ανακάλυψη συνδέεται με την προσπάθεια κατανόησης του κόσμου.
4. **Πολιτισμικές και εκπαιδευτικές προεκτάσεις:** Οι μαθητές βλέπουν πώς διδάσκεται η τετραγωνική ρίζα του 2 σήμερα και ανακαλύπτουν τις εφαρμογές της ασυμμετρίας στη Γεωμετρία και την Αρχιτεκτονική, όπως στη σχεδίαση κτιρίων και κατασκευών.
5. **Δημιουργική εφαρμογή:** Οι μαθητές φτιάχνουν ένα ινφογράφημα (infographic) για τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, δραματοποιούν την ανακάλυψη της ασυμμετρίας ή γράφουν μια φανταστική επιστολή από τον Ίππασο προς τον Πυθαγόρα.

Γενίκευση μιας γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας (Διδ. ενότητα 2.1. σ. 54).

Η διδασκαλία της γραμμικής αριθμητικής κανονικότητας εστιάζει στην ανακάλυψη μαθηματικών σχέσεων μέσω αριθμητικών μοτίβων, γεωμετρικών και αλγεβρικών αναπαραστάσεων, καθώς και στην οπτικοποίηση, η οποία διευκολύνει τη μαθηματική σκέψη. Η διερεύνηση πραγματοποιείται μέσω συνεργατικής επίλυσης προβλημάτων, επιτρέποντας στους μαθητές να ανταλλάξουν ιδέες, να διατυπώσουν υποθέσεις και να ελέγξουν τη γενικότητά τους. Ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει τη διαδικασία, ενθαρρύνοντας την αυτονομία των μαθητών και τη σύνδεση μεταξύ αριθμητικής και αλγεβρικής σκέψης. Η μαθηματική δραστηριότητα δομείται γύρω από τη διερεύνηση ενός προβλήματος, όπως το εξής:

Η κυρία Ρένα ενώνει τετράγωνα τραπέζια για να φιλοξενήσει περισσότερους καλεσμένους. Πόσες θέσεις προσθέτει κάθε νέο τραπέζι και πώς μπορούμε να βρούμε τον αριθμό θέσεων για 90 τραπέζια;



Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες, καταγράφουν τιμές, διατυπώνουν τον αναδρομικό κανόνα (π.χ. κάθε νέο τραπέζι προσθέτει 2 θέσεις) και διαμορφώνουν τον γενικό κανόνα **y = 2ν + 2**. Η μαθηματική σκέψη ενισχύεται με ερωτήματα όπως:

- *Πώς μεταβαίνουμε από έναν αριθμό θέσεων στον επόμενο;*
- *Πώς μπορούμε να βρούμε τον αριθμό θέσεων για 90 τραπέζια χωρίς συνεχή προσθήκη;*
- *Πώς μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των θέσεων για 900 τραπέζια ;*

Η δραστηριότητα αναπτύσσεται σε τρία στάδια:

- **Ατομική κατανόηση:** Οι μαθητές παρατηρούν τη διαδοχική αύξηση των θέσεων, διατυπώνουν αρχικές ιδέες και προβλέπουν τη σχέση μεταξύ όρων.
- **Συνεργατική διερεύνηση:** Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες, κατασκευάζουν πίνακα τιμών, ανακαλύπτουν τον αναδρομικό κανόνα και διατυπώνουν τον γενικό κανόνα. Ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει τη διαδικασία μέσω καθοδηγητικών ερωτήσεων, χωρίς να παρέχει έτοιμες λύσεις.
- **Συζήτηση και αναστοχασμός**: Οι μαθητές παρουσιάζουν τις λύσεις τους στην ολομέλεια, συγκρίνουν διαφορετικές προσεγγίσεις και συζητούν τη διαφορά μεταξύ αναδρομικού και γενικού κανόνα.

Ο εκπαιδευτικός συνοψίζει τη μαθησιακή διαδικασία, επισημαίνοντας ότι ο γενικός κανόνας **y = 2ν + 2** επιτρέπει την άμεση εύρεση οποιουδήποτε όρου χωρίς διαδοχικές προσθέσεις. Με αυτή τη διδακτική προσέγγιση, οι μαθητές αναπτύσσουν ικανότητες αιτιολόγησης, διατυπώνουν και επαληθεύουν εικασίες για τον γενικό τύπο της κανονικότητας, ανακαλύπτουν μαθηματικές σχέσεις και εμβαθύνουν στην αλγεβρική σκέψη, καθιστώντας τη μάθηση ουσιαστική και άμεσα συνδεδεμένη με πραγματικά προβλήματα.

«Αλγεβρικά πλακίδια»: αλγεβρική παράσταση ως γινόμενο ή άθροισμα. (Διδακτική ενότητα 2.2. σ., 64).

Η χρήση αλγεβρικών πλακιδίων αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για την κατανόηση της επιμεριστικής ιδιότητας και της παραγοντοποίησης, μειώνοντας τις παρανοήσεις και ενισχύοντας την αυτοπεποίθηση των μαθητών. Μέσω της σύνδεσης γεωμετρικών και αλγεβρικών παραστάσεων, οι μαθητές απλοποιούν εκφράσεις, αναγνωρίζουν λάθη και αναπτύσσουν αλγεβρικό συλλογισμό. Η οπτικοποίηση διευκολύνει τη μετάβαση από τη συγκεκριμένη στη συμβολική σκέψη, ενισχύοντας τόσο τη μαθηματική κατανόηση όσο και τη διαχείριση δυσκολιών.

Στο πλαίσιο της δραστηριότητας, οι μαθητές εργάζονται με αλγεβρικά πλακίδια για να αναγνωρίσουν παραστάσεις ως άθροισμα ή γινόμενο, να συνδέσουν γεωμετρικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις και να εντοπίσουν κοινά λάθη. Τα θετικά αλγεβρικά πλακίδια παριστάνουν εμβαδά, ενώ το αρνητικό πρόσημο χρησιμοποιείται συμβολικά για να εκφράσει αρνητικές αλγεβρικές τιμές.

Αρχικά, παρατηρούν πλακίδια που εκφράζουν δυνάμεις (x^2, $-x^2$), μεταβλητές (x, −x) και σταθερούς όρους (1, -1), διατυπώνοντας σχετικές παραστάσεις. Έπειτα, χρησιμοποιούν τα πλακίδια για να μετατρέψουν σχηματισμούς σε αλγεβρικές εκφράσεις και να επαληθεύσουν ιδιότητες όπως η επιμεριστική. Για παράδειγμα, ένας σχηματισμός που περιλαμβάνει x, x,1,1 μπορεί να γραφεί ως 2(x+1) ή 2x+2.

Οι μαθητές στη συνέχεια απλοποιούν εκφράσεις, συνδυάζοντας όμοιους όρους, όπως 3x+2x=5x, ή κατηγοριοποιώντας πλακίδια βάσει διάστασης για πιο σύνθετες παραστάσεις, π.χ. $5x^2-3x^2+2x=2x^2+2x$. Χρησιμοποιώντας την οπτικοποίηση, εφαρμόζουν την επιμεριστική ιδιότητα για την ανάπτυξη γινομένων, όπως $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$. Παράλληλα, εντοπίζουν συχνά λάθη, όπως η λανθασμένη σύνθεση 3x+2x=5x, αναγνωρίζοντας τη σημασία της διάκρισης μεταξύ όρων διαφορετικής διάστασης.

Στην ολομέλεια, οι μαθητές παρουσιάζουν τις λύσεις τους, συγκρίνουν προσεγγίσεις και εξηγούν τη διαδικασία σκέψης τους. Ο εκπαιδευτικός ενισχύει τον αναστοχασμό, διευκολύνοντας τη σύνδεση μεταξύ γεωμετρικών και αλγεβρικών αναπαραστάσεων. Η δραστηριότητα ολοκληρώνεται με τη σύνδεση των αλγεβρικών παραστάσεων με εφαρμογές, όπως ο υπολογισμός εμβαδών, ενισχύοντας τη μαθηματική σκέψη και τη δημιουργικότητα των μαθητών.

Η έννοια της συμμεταβολής (Διδακτική ενότητα 3.1., σ. 98).

Η συμμεταβολή αναφέρεται στην ταυτόχρονη μεταβολή δύο συνδεδεμένων μεταβλητών και αποτελεί θεμελιώδη έννοια για την κατανόηση των συναρτήσεων και των ρυθμών μεταβολής. Η σύνδεση μεταξύ αριθμητικών, γραφικών και αλγεβρικών αναπαραστάσεων διευκολύνει την εννοιολογική κατανόηση και τη μαθηματική σκέψη. Στη Β΄ Γυμνασίου, με τη βοήθεια της συμμεταβολής οι μαθητές διερευνούν σχέσεις μεταξύ μεταβλητών και αναγνωρίζουν πότε μια συμμεταβολή είναι συνάρτηση.

Πίνακας Ατιφά:		**Πίνακας του Σωκράτη**	
Απόσταση (x)	**Θερμίδες (y)**	**Απόσταση (x)**	**Θερμίδες (y)**
4	200	3	180
8	380	4	190
5	350	2	150
8	410	10	500

Για την κατανόηση της έννοιας, οι μαθητές εξετάζουν δύο σύνολα δεδομένων που περιγράφουν τη σχέση μεταξύ της απόστασης και των θερμίδων που καταναλώνουν η Ατιφά και ο Σωκράτης. Στον πίνακα της Ατιφά, για x=8 υπάρχουν δύο διαφορετικές τιμές θερμίδων (y=380 και y=410), γεγονός που σημαίνει ότι η συμμεταβολή δεν είναι συνάρτηση. Ωστόσο, επειδή οι δύο μεταβλητές αλλάζουν μαζί, υπάρχει συμμεταβολή. Στον πίνακα του Σωκράτη, κάθε τιμή της απόστασης αντιστοιχεί σε μία μόνο τιμή θερμίδων, επομένως η συμμεταβολή αυτή και συνάρτηση.

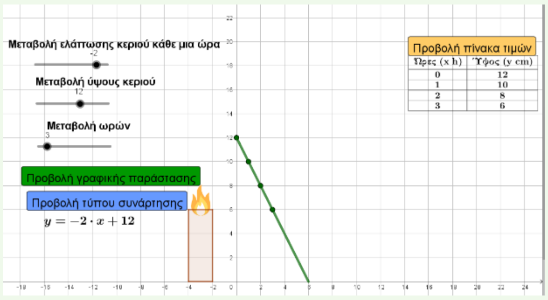
Οι μαθητές εξετάζουν περαιτέρω τις περιπτώσεις όπου μια συνάρτηση δεν αποτελεί συμμεταβολή.

Η διαφορά μεταξύ συμμεταβολής και συνάρτησης αναλύεται με ερωτήσεις προς τους μαθητές:

«Είναι κάθε μονοσήμαντη αντιστοιχία συμμεταβολή;» και *«Είναι κάθε συμμεταβολή συνάρτηση;»*. Ζητείται επίσης από τους μαθητές να δώσουν δικά τους παραδείγματα προκειμένου να κατανοήσουν ότι η συμμεταβολή περιγράφει μια σχέση μεταβολής, ενώ η συνάρτηση απαιτεί ειδικά χαρακτηριστικά που εκφράζονται μέσα από την μονοσήμαντη αντιστοιχία. Η διδασκαλία ολοκληρώνεται με συζήτηση πάνω σε καθημερινά παραδείγματα, όπως η σχέση απόστασης-χρόνου ή θερμοκρασίας-πίεσης, ενισχύοντας την κατανόηση των μαθητών και τη σύνδεση της μαθηματικής θεωρίας με την πραγματική ζωή.

Το ύψος του κεριού (ΨΜΑ, Διδακτική ενότητα 3.4., σ. 119).

Η μαθηματική μοντελοποίηση επιτρέπει τη μετάφραση καθημερινών προβλημάτων στη γλώσσα των Μαθηματικών μέσω εξισώσεων και συναρτήσεων, προσφέροντας ένα ισχυρό εργαλείο κατανόησης. Στο πλαίσιο της διδασκαλίας, οι μαθητές διερευνούν τη γραμμική συνάρτηση y=αx+β η οποία περιγράφει τη μεταβολή του ύψους ενός κεριού με την πάροδο του χρόνου. Αναγνωρίζουν ότι το β αντιπροσωπεύει το αρχικό ύψος και το α τη μοναδιαία μεταβολή (ρυθμός καύσης). Το ύψος του κεριού μειώνεται κάθε λεπτό που περνάει, οπότε πρέπει α<0, κατανοώντας παράλληλα και την αρνητική κλίση της ευθείας, αναγνωρίζοντας ότι για κάθε λεπτό η μείωση του ύψους είναι -2 μονάδες. Μέσω του GeoGebra, πειραματίζονται μεταβάλλοντας τις τιμές των παραμέτρων και παρατηρούν πώς αλλάζει η μορφή της γραφικής παράστασης. Οι αλλαγές αυτές τους επιτρέπουν να εντοπίσουν σχέσεις μεταξύ διαφορετικών συναρτήσεων και να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματα στο αρχικό πλαίσιο.



Ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί τη συζήτηση επισημαίνοντας κρίσιμα σημεία, όπως η σημασία της τομής με τον άξονα y'y και η επίδραση της κλίσης στην ταχύτητα καύσης. Παράλληλα, οι μαθητές καλούνται να ερμηνεύσουν παρανοήσεις, όπως η σύγχυση μεταξύ των παραμέτρων α και β, εξηγώντας τη σημασία τους. Η δραστηριότητα–ολοκληρώνεται με αναστοχασμό, όπου οι μαθητές επιβεβαιώνουν ότι η κλίση της γραμμικής συνάρτησης εκφράζει τη σταθερή μεταβολή και χρησιμοποιούν τη σχέση για να υπολογίσουν τον χρόνο πλήρους καύσης του κεριού.

Μια εναλλακτική εφαρμογή της γραμμικής σχέσης περιλαμβάνει την ανάλυση ενός τηλεφωνικού προγράμματος με σταθερό πάγιο και κόστος ανά λεπτό. Οι μαθητές συλλέγουν δεδομένα, κατασκευάζουν πίνακα τιμών και διατυπώνουν τη συνάρτηση y=0,5x+10, όπου το 0,5 αντιπροσωπεύει την τιμή ανά λεπτό και το 10 το πάγιο κόστος. Μέσω ερωτήσεων όπως *«Πόσο θα κοστίσουν 100 λεπτά;»* και *«Αν πλήρωσα 20 €, πόσα λεπτά μίλησα;»*, κατανοούν τη γενική μορφή της γραμμικής συνάρτησης και τη σύνδεσή της με πρακτικά προβλήματα.

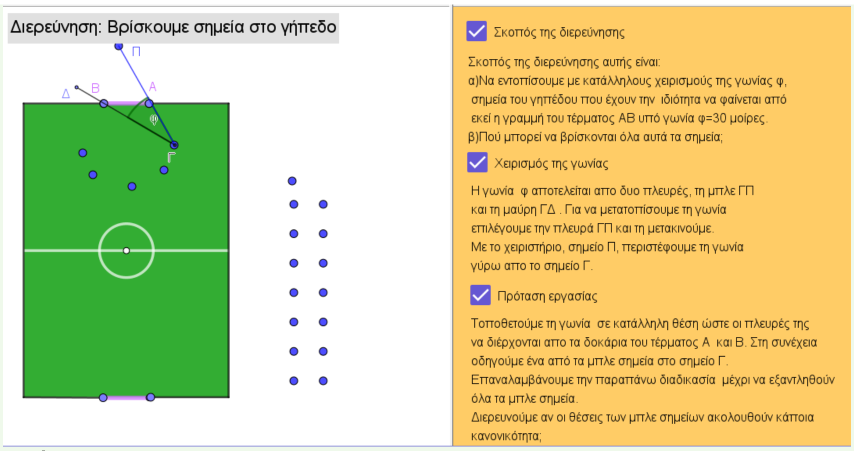
Η διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης με τέτοιες προσεγγίσεις βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν τις έννοιες μέσα από πραγματικά παραδείγματα, συνδυάζοντας την οπτικοποίηση, τη διερεύνηση και την αλγεβρική σκέψη για να καταλήξουν σε γενικεύσεις και μαθηματικούς κανόνες.

Παρατήρηση. Το διερευνητικό έργο προσφέρεται για την εφαρμογή της διαφοροποιημένης προσέγγισης «χαμηλό κατώφλι-ψηλό ταβάνι» διασφαλίζοντας ότι όλες οι επιμέρους δραστηριότητες είναι προσιτές στους μαθητές, ενώ παράλληλα παρέχουν περιθώρια για εμβάθυνση και εξερεύνηση. Αυτή η πρακτική προάγει μια συμπεριληπτική μαθησιακή κοινότητα όπου όλοι οι μαθητές προοδεύουν με τον δικό τους ρυθμό (Boaler, 2022).

Εύρεση σημείων στο γήπεδο (Διδακτική ενότητα 4.1., σ. 138).

Το μαθηματικό έργο «Εύρεση σημείων στο γήπεδο» εισάγει την έννοια της εγγεγραμμένης γωνίας μέσω της αναζήτησης σημείων από τα οποία το τέρμα φαίνεται υπό σταθερή γωνία 30°.

Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες, χρησιμοποιώντας διαφανές χαρτί και μοιρογνωμόνιο για να κατασκευάσουν τη γεωμετρική σχέση και να αναγνωρίσουν τη μαθηματική δομή πίσω από το πρόβλημα. Στόχος είναι η προοδευτική μαθηματική μοντελοποίηση, όπου οι μαθητές ξεκινούν από πρακτικές δράσεις, διατυπώνουν εικασίες και καταλήγουν σε γενικεύσεις που επισημοποιούνται με μαθηματικούς όρους.



Εικόνα: Στιγμιότυπο από τη διερεύνηση με τη χρήση του ψηφιακού υλικού.

Η διδασκαλία αξιοποιεί το GeoGebra, επιτρέποντας στους μαθητές να εξερευνήσουν δυναμικά τη συμμετρία και τη γεωμετρική θέση του σημείου Μ. Μέσω της αλληλεπίδρασης με το ψηφιακό αρχείο, παρατηρούν ότι τα σημεία που ικανοποιούν τη συνθήκη σχηματίζουν κυκλικό τόξο, γεγονός που συνδέεται με την ιδιότητα των εγγεγραμμένων γωνιών. Οι μαθητές πειραματίζονται με διαφορετικές γωνίες και παραμέτρους, οδηγούμενοι σταδιακά σε γενικεύσεις.

Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τη μαθηματική επιχειρηματολογία, θέτοντας ερωτήματα όπως:

- *Τι συμβαίνει αν η γωνία αλλάξει;*
- *Ποια είναι η γεωμετρική θέση όλων των σημείων που βλέπουν το τέρμα υπό 30°;*.

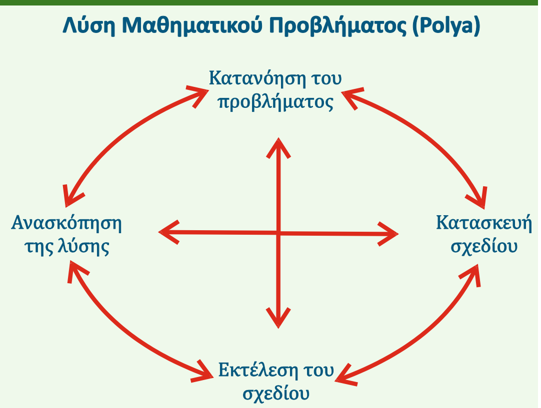
Στη συζήτηση, οι μαθητές συγκρίνουν τις ανακαλύψεις τους και διασαφηνίζουν την έννοια της εγγεγραμμένης γωνίας. Η διερεύνηση μπορεί να γίνει με διαφορετικούς τρόπους: είτε μέσω ανεστραμμένης τάξης, όπου οι μαθητές εξετάζουν το αρχείο στο σπίτι και το συζητούν στην τάξη, είτε δια ζώσης με χρήση διαδραστικού πίνακα, είτε σε ομάδες εργασίας με σταθμούς υπολογιστών.

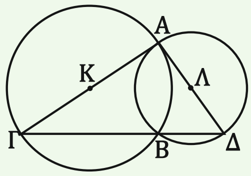
Η δραστηριότητα προωθεί τη μαθηματική σκέψη, συνδέοντας τη γεωμετρία με αυθεντικές εφαρμογές, ενώ η χρήση ψηφιακών εργαλείων ενισχύει τη μαθηματική μοντελοποίηση και τη γενίκευση. Μέσω του πειραματισμού και της αναστοχαστικής συζήτησης, οι μαθητές κατανοούν βαθύτερα τις ιδιότητες των γωνιών και των γεωμετρικών τόπων, ενώ παράλληλα αναπτύσσουν δεξιότητες διερεύνησης και συλλογισμού.

Ένα πρόβλημα γεωμετρικής απόδειξης (Διδ. ενότητα 4.4.).

Η διδακτική διαχείριση του προβλήματος ακολουθεί τη μέθοδο **Polya**, η οποία περιλαμβάνει:

- **Κατανόηση του προβλήματος**, όπου οι μαθητές αναλύουν τα δεδομένα και διατυπώνουν ερωτήσεις,
- **Σχεδιασμό της λύσης**, μέσα από τη διατύπωση υποθέσεων και επιλογή στρατηγικών,
- **Εκτέλεση της λύσης**, με χρήση γεωμετρικών ιδιοτήτων, και
- **Ανασκόπηση και επιβεβαίωση**, όπου επανεξετάζουν τη διαδικασία και τα συμπεράσματά τους.





Εκφώνηση: *Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το σημείο Α φέρνουμε τις διαμέτρους ΑΓ και ΑΔ. Ζητείται να φέρετε τις χορδές ΓΒ και ΒΔ και να αποδείξετε ότι* τα σημεία Γ, Β, Δ είναι συνευθειακά.

Ο εκπαιδευτικός προβάλλει την εικόνα και καλεί τους μαθητές να περιγράψουν τα βασικά της στοιχεία. Ένας μαθητής παρατηρεί: *«Υπάρχουν δύο κύκλοι που τέμνονται στα σημεία Α και Β»*, ενώ ένας άλλος προσθέτει: *«Για τις διαμέτρους ΑΓ και ΑΔ σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ιδιότητες εγγεγραμμένων γωνιών»*. Στη συνέχεια, οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες, προσπαθώντας να διατυπώσουν μια υπόθεση για το αν τα σημεία Γ, Β, Δ είναι συνευθειακά.

Καθώς αναλύουν τη σχέση των γωνιών, ένας μαθητής σχολιάζει: *«Ξέρουμε ότι μια εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε διάμετρο είναι 90°»*, ενώ ένας άλλος συμπληρώνει: *«Αν και οι δύο γωνίες που σχηματίζονται από τις χορδές ΓΒ και ΒΔ είναι ορθές, τότε το άθροισμά τους θα είναι 180°, άρα τα σημεία είναι συνευθειακά!»*. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τη χρήση δυναμικών λογισμικών, όπως το GeoGebra, για να επαληθεύσουν τα συμπεράσματά τους.

Μετά την επίλυση, οι μαθητές συζητούν την προσέγγισή τους και αναστοχάζονται. Ένας μαθητής παρατηρεί: *«Στην αρχή δεν ήμουν σίγουρος γιατί η διάμετρος σχετίζεται με τις γωνίες, αλλά βλέποντας το στο σχήμα κατάλαβα τη λογική»*, ενώ ένας άλλος σχολιάζει: *«Η χρήση της ιδιότητας των εγγεγραμμένων γωνιών μάς βοήθησε να αποδείξουμε το ζητούμενο χωρίς περιττούς υπολογισμούς»*. Η συζήτηση ολοκληρώνεται με τον εκπαιδευτικό να ρωτά: *«Πώς αλλιώς θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε την απόδειξη;»*, προάγοντας την κριτική σκέψη και τη μαθηματική επιχειρηματολογία.

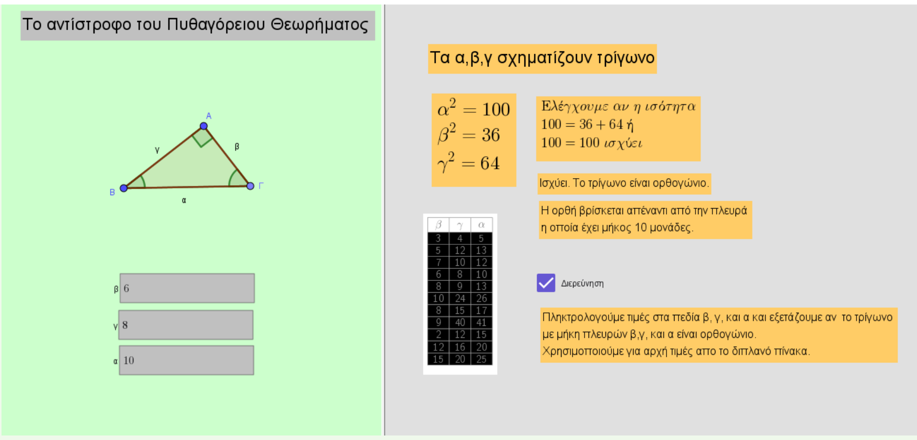
Με τη μέθοδο Polya, οι μαθητές οργανώνουν τη σκέψη τους, κατανοούν τα βασικά στοιχεία του προβλήματος και προσεγγίζουν συστηματικά τη λύση. Αυτή η προσέγγιση ενισχύει την κατανόηση της Γεωμετρίας και την ικανότητα απόδειξης μαθηματικών σχέσεων (Μπαραλός, 2001; Κολέζα, 2003).

Εικασία του αντιστρόφου του Πυθαγόρειου Θεωρήματος (Διδακτική ενότητα 4.3., σ. 150).

Η διερεύνηση του αντιστρόφου του Πυθαγόρειου Θεωρήματος επιτρέπει στους μαθητές να εξετάσουν τη σχέση μεταξύ των πλευρών ενός τριγώνου και της γωνίας που σχηματίζουν, οδηγώντας τους στην ανακάλυψη και διατύπωση της αντίστροφης πρότασης. Μέσω δομημένης πειραματικής διαδικασίας, οι μαθητές κατασκευάζουν τρίγωνα με δεδομένα μήκη πλευρών, ελέγχουν αν ισχύει η σχέση $α^2=β^2+γ^2$ και μετρούν τη γωνία που σχηματίζουν οι πλευρές β και γ, διαμορφώνοντας σταδιακά τη μαθηματική τους επιχειρηματολογία.

Η δραστηριότητα στηρίζεται στη σταδιακή ταξινόμηση και συσχέτιση στοιχείων σε πίνακες, βοηθώντας τους μαθητές να ανακαλύψουν το μοτίβο που οδηγεί στη διατύπωση του αντιστρόφου του Πυθαγόρειου Θεωρήματος. Μέσω του GeoGebra, δοκιμάζουν διαφορετικές τριάδες αριθμών που αντιστοιχούν σε μήκη πλευρών, επιβεβαιώνοντας αν σχηματίζουν τρίγωνα και αν αυτά είναι ορθογώνια. Το ψηφιακό περιβάλλον προσφέρει άμεση ανατροφοδότηση, επιτρέποντάς τους να αναθεωρούν τις υποθέσεις τους και να οδηγούνται σε γενικεύσεις.

Ο εκπαιδευτικός συντονίζει τη συζήτηση θέτοντας ερωτήματα όπως *«Πότε ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο;»* και *«Τι παρατηρείτε για τη σχέση των πλευρών όταν η γωνία είναι 90°;»*, βοηθώντας τους μαθητές να αναγνωρίσουν τη μαθηματική σχέση. Οι μαθητές συνεργαζόμενοι διατυπώνουν αρχικές εικασίες, τις ελέγχουν με νέες δοκιμές και συζητούν τα αποτελέσματά τους στην ολομέλεια, ενισχύοντας την ικανότητά τους στη μαθηματική επιχειρηματολογία.



Εικόνα: Στιγμιότυπο από τη διερεύνηση με τη χρήση του ψηφιακού υλικού.

Η διερεύνηση μπορεί να γίνει με διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις, όπως η ανεστραμμένη τάξη (flipped classroom) , όπου οι μαθητές μελετούν το ψηφιακό αρχείο στο σπίτι και το συζητούν στην τάξη, ή διαδραστική προσέγγιση, όπου οι μαθητές εργάζονται με διαδραστικό πίνακα και εισάγουν δεδομένα σε πραγματικό χρόνο ή συνεργαζόμενοι σε σταθμούς εργασίας, συγκρίνοντας διαφορετικά τρίγωνα και εξάγοντας γενικά συμπεράσματα για τις συνθήκες που πρέπει να πληροί ένα τρίγωνο ώστε να είναι ορθογώνιο.

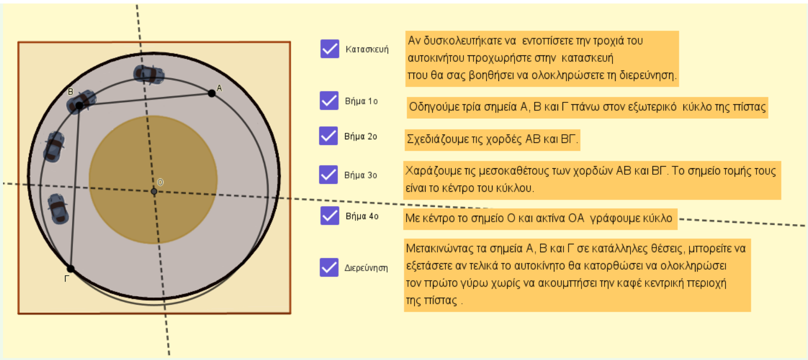
Η δραστηριότητα καταλήγει σε αναστοχασμό, όπου οι μαθητές συνοψίζουν τα ευρήματά τους και αναλύουν τυχόν λανθασμένες εικασίες. Με αυτόν τον τρόπο, ενισχύεται η μαθηματική σκέψη, ενώ η χρήση πειραματικών διαδικασιών και τεχνολογικών εργαλείων επιτρέπει μια βαθύτερη κατανόηση της σχέσης μεταξύ πλευρών και γωνιών των τριγώνων, καθιστώντας τη μάθηση δυναμική και ουσιαστική.

Μετασχηματισμός στροφής (Διδακτική ενότητα 5.3., σ. 174).

Η διερεύνηση του **μετασχηματισμού στροφής** εισάγει τους μαθητές στην έννοια της περιστροφής μέσω της ανάλυσης της κυκλικής τροχιάς ενός αυτοκινήτου σε πίστα αγώνων. Οι μαθητές, εργαζόμενοι σε ζεύγη, καλούνται να εξετάσουν εάν το αυτοκίνητο θα ολοκληρώσει την πορεία του χωρίς να ακουμπήσει την κεντρική περιοχή της πίστας, εντοπίζοντας το κέντρο περιστροφής. Η μαθηματική δραστηριότητα στηρίζεται στην προοδευτική μαθηματική μοντελοποίηση, όπου οι μαθητές διατυπώνουν υποθέσεις, πειραματίζονται και σταδιακά οδηγούνται σε γενικεύσεις.

Κατά τη διερεύνηση, οι μαθητές χρησιμοποιούν διαφανές χαρτί και διαβήτη για να σχεδιάσουν κυκλικές τροχιές, εστιάζοντας στη σταθερή απόσταση των σημείων του κύκλου από το κέντρο του. Μέσω πειραματισμού, επιχειρούν να προβλέψουν τις επόμενες θέσεις του αυτοκινήτου, διερευνώντας παράλληλα τις ιδιότητες των χορδών και των τόξων. Ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί τη μαθησιακή διαδικασία, ενθαρρύνοντας τη μαθηματική επιχειρηματολογία μέσω ερωτήσεων όπως: *«Ποια είναι τα χαρακτηριστικά των σημείων που ανήκουν στον κύκλο;»* και *«Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς;»*.

Η χρήση του GeoGebra επιτρέπει στους μαθητές να αλληλεπιδρούν με το ψηφιακό περιβάλλον, μεταβάλλοντας τις παραμέτρους της περιστροφής και παρατηρώντας πώς η αλλαγή του κέντρου ή της ακτίνας επηρεάζει την τροχιά. Η δυναμική αναπαράσταση βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν τη μαθηματική δομή της στροφής και να επιβεβαιώσουν ή να αναθεωρήσουν τις υποθέσεις τους.



Εικόνα: Στιγμιότυπο από τη διερεύνηση με τη χρήση του ψηφιακού υλικού.

Η διερεύνηση ολοκληρώνεται με συζήτηση, όπου οι μαθητές ανταλλάσσουν απόψεις, διορθώνουν πιθανά λάθη και καταλήγουν σε γενικεύσεις σχετικά με τις ιδιότητες των περιστροφών. Η δραστηριότητα μπορεί να υλοποιηθεί με διαφορετικούς τρόπους: είτε ως ανεστραμμένη τάξη, με αρχική μελέτη στο σπίτι και ανάλυση στην τάξη, είτε δια ζώσης, με συνεργατική εργασία και χρήση διαδραστικού πίνακα. Μέσα από τη μαθηματική μοντελοποίηση και τον αναστοχασμό, οι μαθητές κατανοούν βαθύτερα τις περιστροφές και τις εφαρμογές τους στη γεωμετρία και την πραγματική ζωή.

Υπολογισμός του π από τον Αρχιμήδη: μελέτη ιστορικού σημειώματος (ΨΜΑ 6.1., σ. 194).

Οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται να κατανοήσουν το π ως μαθηματική σταθερά που προκύπτει από τη σχέση της περιφέρειας προς τη διάμετρο ενός κύκλου, περιορίζοντας την αντίληψή τους στη μηχανική χρήση της προσέγγισής του ως $\pi \approx 3{,}14$. Η αφηρημένη φύση του π και η σύνδεσή του με τύπους όπως $L=2\pi r$ και $E=\pi r^2$, χωρίς επαρκή γεωμετρική ή εμπειρική εξερεύνηση, εντείνουν τη σύγχυση, ειδικά όταν απουσιάζει η εννοιολογική κατανόηση των αναλογιών. Η δραστηριότητα με θέμα «Ο Αρχιμήδης και ο αριθμός π» αξιοποιεί τη διδακτική αξία του ιστορικού σημειώματος για τον υπολογισμό του π από τον Αρχιμήδη, συνδυάζοντας τη μαθηματική σκέψη, την ιστορική διάσταση και τη βιωματική μάθηση. Μέσα από αυτήν, οι μαθητές κατανοούν τη σημασία του π, τη μεθοδολογία του Αρχιμήδη και τη σύγχρονη εφαρμογή του στις επιστήμες, ενισχύοντας την κριτική σκέψη και τη μαθηματική επικοινωνία.

Ο εκπαιδευτικός εισάγει το θέμα παρουσιάζοντας την ιστορική προσέγγιση του Αρχιμήδη και καλεί τους μαθητές να αναρωτηθούν γιατί εκείνος χρησιμοποίησε κανονικά πολύγωνα για να προσεγγίσει το π, ποια ήταν η καινοτομία της μεθόδου του και πώς σήμερα μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό με μεγαλύτερη ακρίβεια. Οι μαθητές απαντούν με βάση την ιστορική αφήγηση και ενθαρρύνονται να κάνουν υποθέσεις για τη μέθοδό του και τη σχέση της με τις σύγχρονες τεχνικές. Στη συνέχεια, εργάζονται σε ομάδες και προσομοιώνουν τη μέθοδο του Αρχιμήδη χρησιμοποιώντας βασικά γεωμετρικά σχήματα, χαρτί μιλιμετρέ, χάρακες, διαβήτες και εργαλεία σχεδίασης πολυγώνων, όπως εφαρμογές λογισμικού τύπου Geogebra. Σχεδιάζουν έναν κύκλο και ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο και ένα περιγεγραμμένο γύρω από αυτόν, υπολογίζουν τις περιμέτρους των δύο πολυγώνων και καταγράφουν το κατώτερο και το ανώτερο όριο για το μήκος της περιφέρειας του κύκλου. Επαναλαμβάνουν τη διαδικασία με κανονικά δωδεκάγωνα, διπλασιάζοντας σταδιακά τον αριθμό των πλευρών (π.χ. 6, 12, 24), ώστε να παρατηρήσουν πώς τα όρια προσεγγίζουν όλο και περισσότερο το μήκος του κύκλου και υπολογίζουν την προσέγγιση του π μέσω των περιμέτρων: $\frac{\text{Περίμετρος Πολυγώνου}}{\text{Διάμετρος Κύκλου}}$

Κατά τη διάρκεια της διερεύνησης, οι μαθητές εμπλέκονται σε συζητήσεις, σχολιάζοντας ότι η περίμετρος του εγγεγραμμένου πολυγώνου δίνει μικρότερη τιμή για το μήκος του κύκλου, ενώ το περιγεγραμμένο πολύγωνο δίνει μεγαλύτερη, με αποτέλεσμα το π να βρίσκεται κάπου ενδιάμεσα. Παρατηρούν ότι με τον διπλασιασμό του αριθμού των πλευρών, οι δύο τιμές συγκλίνουν, οδηγώντας τους στην κατανόηση της έννοιας της προσέγγισης. Συνειδητοποιούν ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των πλευρών των πολυγώνων, τόσο βελτιώνεται η ακρίβεια της προσέγγισης.

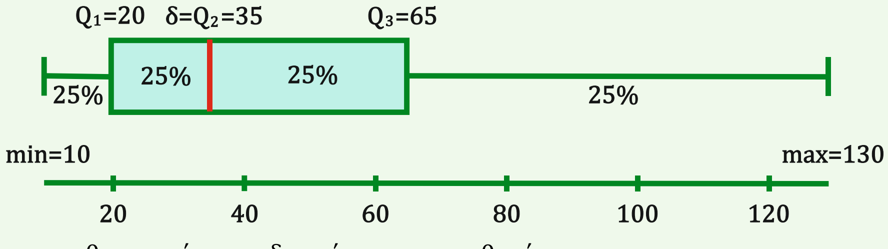
Παράδειγμα Φύλλου Εργασίας:

Πολύγωνο	**Αριθμός Πλευρών**	**Περίμετρος Εγγεγραμμένου**	**Περίμετρος Περιγεγραμμένου**	**Εκτίμηση π**
Εξάγωνο	6			
Δωδεκάγωνο	12			
Εικοσιτετράγωνο	24			

Με την ολοκλήρωση των υπολογισμών, κάθε ομάδα παρουσιάζει τα αποτελέσματά της και συγκρίνει τις εκτιμήσεις τους με την πραγματική τιμή του π. Η συζήτηση εστιάζει στο πώς οι υπολογισμοί τους πλησιάζουν την πραγματική τιμή, πώς η ακρίβεια επηρεάζεται από την αύξηση του αριθμού των πλευρών και ποια είναι η σημασία της μαθηματικής ακρίβειας σε πρακτικές εφαρμογές, όπως η Αρχιτεκτονική ή η Φυσική. Μέσα από ερωτήσεις όπως «Ποια είναι τα βασικά διδάγματα από τη μέθοδο του Αρχιμήδη;» και «Πώς αυτή επηρεάζει τον τρόπο που προσεγγίζουμε τα μαθηματικά προβλήματα σήμερα;», οι μαθητές ενισχύουν την κατανόησή τους για τη μαθηματική διαδικασία.
Η δραστηριότητα επιτρέπει στους μαθητές να κατανοήσουν βιωματικά την έννοια του π και την επαναστατική μεθοδολογία του Αρχιμήδη, συνδυάζοντας μια ιστορική αφήγηση με την πρακτική διερεύνηση. Αναπτύσσουν δεξιότητες υπολογισμού, συνεργασίας και μαθηματικής επικοινωνίας, ενώ αναστοχάζονται τη σημασία της μαθηματικής ακρίβειας και της διαδοχικής προσέγγισης αριθμητικών τιμών μέσω γεωμετρικών μεθόδων. Παράλληλα, αντιλαμβάνονται τη μαθηματική σκέψη ως εργαλείο κατανόησης της σχέσης μεταξύ Γεωμετρίας, αριθμών και Ιστορίας, ενισχύοντας τη σύνδεση των Μαθηματικών με την επιστήμη, την καθημερινή ζωή και τη διαχρονική τους αξία.

Κατασκευή θηκογράμματος – περίληψη των πέντε αριθμών. (7.2, σ. 240)

Το εν λόγω μαθηματικό έργο αποσκοπεί στην καλλιέργεια της στατιστικής σκέψης των μαθητών, ενισχύοντας τη μαθηματική τους επιχειρηματολογία μέσα από τη διερεύνηση πραγματικών δεδομένων. Οι μαθητές, εργαζόμενοι σε ζεύγη, αναλύουν τα ποσά που ξόδεψαν οι πελάτες ενός καταστήματος και χρησιμοποιούν το θηκόγραμμα για να εντοπίσουν βασικά μέτρα θέσης και διασποράς.



Κατά τη διάρκεια της μαθηματικής τους διερεύνησης, οι μαθητές:

- Ταξινομούν τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά, κάτι που επιτρέπει μια πρώτη οπτική επεξεργασία.
- Εντοπίζουν το μικρότερο (10€) και το μεγαλύτερο ποσό (130€), διαπιστώνοντας την έκταση της διακύμανσης των ποσών.
- Υπολογίζουν τη διάμεσο η οποία είναι Q_2=δ=35€, δηλαδή την τιμή που χωρίζει το σύνολο των δεδομένων σε δύο ίσα μέρη, και σχολιάζουν ότι «Η διάμεσος δείχνει ότι περίπου το 50% ξόδεψε έως 35 ευρώ και το

άλλο 50% ξόδεψε περισσότερα από 35 ευρώ». Ακριβέστερα «περίπου το 50% ξόδεψε από 20 ευρώ έως 35 ευρώ και το άλλο 50% ξόδεψε από 35 ευρώ έως 130 ευρώ».

- Βρίσκουν τα τεταρτημόρια δηλαδή Q_1=20 € και Q_3=65€, διαπιστώνοντας για παράδειγμα ότι *«το 25% των πελατών που ξόδεψε τα λιγότερα χρήματα, δαπάνησε από 10 έως 20 ευρώ »* και *«το 75% ξόδεψε λιγότερα από το τρίτο τεταρτημόριο»*, *«το 75% των πελατών που ξόδεψε τα λιγότερα χρήματα, δαπάνησε από 10 έως 65 ευρώ».*
- Ερμηνεύουν το ενδοτεταρτημοριακό εύρος ($IQR = Q_3 - Q_1=45$) και συζητούν για το πώς βοηθά στην κατανόηση της διασποράς των δαπανών.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί και πρέπει να θέσει ερωτήματα για τις ερμηνείες της μεταβλητότητας σε αντίστοιχα διαστήματα. Κατά τη συζήτηση, οι μαθητές αναγνωρίζουν τις δυνατότητες ερμηνείας των δαπανών των πελατών για το συγκεκριμένο παράδειγμα και των δεδομένων γενικά.

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα ενισχύει την ικανότητα των μαθητών να διαβάζουν, να ερμηνεύουν και να αξιοποιούν στατιστικά δεδομένα, καλλιεργώντας τον στατιστικό εγγραμματισμό και προετοιμάζοντάς τους για τον ρόλο του ενεργού πολίτη. Η σύνδεση της στατιστικής με την καθημερινή ζωή τους βοηθά να αναπτύξουν μια κριτική στάση απέναντι στις πληροφορίες που λαμβάνουν, ενισχύοντας τη μαθηματική τους αυτοπεποίθηση και τη δυνατότητα λήψης τεκμηριωμένων αποφάσεων.

Κριτική ανάγνωση διαγράμματος. (7.4. σ. 256)

Το συγκεκριμένο έργο αποσκοπεί στην καλλιέργεια του στατιστικού εγγραμματισμού των μαθητών, προωθώντας την κριτική τους ικανότητα στην ανάγνωση και ερμηνεία δεδομένων μέσα από τη μελέτη της βροχόπτωσης στην από της Άρτας. Οι μαθητές εργάζονται κατά ζεύγη ή μικρές ομάδες και αναλύουν τον πίνακα με τις μηνιαίες τιμές ύψους βροχόπτωσης, συγκρίνοντάς τον με το αντίστοιχο ραβδόγραμμα.

Κατά τη διάρκεια της διερεύνησης, οι μαθητές διατυπώνουν παρατηρήσεις όπως:

- *Το ραβδόγραμμα φαίνεται σωστό, αλλά ας ελέγξουμε αν οι τιμές των ράβδων αντιστοιχούν ακριβώς στις τιμές του πίνακα.*
- *Ο ισχυρισμός της Αιμιλίας για τον Ιανουάριο μοιάζει υπερβολικός, ας το επιβεβαιώσουμε με υπολογισμούς.*

Υπολογίζοντας τον λόγο της βροχόπτωσης του Ιανουαρίου ως προς τον Οκτώβριο και τον Απρίλιο, βρίσκουν: $\frac{140}{80}=1{,}75$ και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η βροχόπτωση είναι 1,75 φορές μεγαλύτερη. Όχι τέσσερις φορές, όπως ισχυρίστηκε η Αιμιλία.

Αυτή η διαπίστωση οδηγεί στη συζήτηση για τη σημασία των υπολογισμών με ακρίβεια και του τρόπου με τον οποίο τα διαγράμματα μπορούν να ερμηνευθούν παραπλανητικά αν δεν εξεταστούν προσεκτικά.

Ακολούθως, οι μαθητές αναζητούν περιπτώσεις "παραπλανητικών" διαγραμμάτων στα μέσα ενημέρωσης. Σχόλια όπως:

- *Αν ο άξονας των τιμών δεν ξεκινά από το μηδέν, η διαφορά μπορεί να φαίνεται πολύ μεγαλύτερη από ό,τι είναι στην πραγματικότητα.*
- *Μια λάθος κλίμακα μπορεί να αλλάξει εντελώς την εντύπωση που δημιουργεί ένα διάγραμμα.*

Η κριτική ανάγνωση των στατιστικών στοιχείων ενισχύει τη μαθηματική τους σκέψη και τη δυνατότητα να διαχειρίζονται πληροφορίες υπεύθυνα. Αυτό είναι απαραίτητο για τον σύγχρονο ενεργό πολίτη, ο οποίος καθημερινά εκτίθεται σε στατιστικά δεδομένα και γραφικές παραστάσεις σε ειδήσεις, πολιτικές αναλύσεις και διαφημίσεις. Η συνειδητοποίηση του τρόπου με τον οποίο παρουσιάζονται τα δεδομένα τους βοηθά να αναπτύξουν μια πιο κριτική προσέγγιση στην πληροφόρηση, ενισχύοντας παράλληλα τις δεξιότητές τους στη μαθηματική επιχειρηματολογία και ανάλυση.

Πόσες είναι οι κίτρινες; (8.3. σ. 278)

Η δραστηριότητα υπενθυμίζει στους μαθητές την έννοια της πιθανότητας και τους καθοδηγεί να εφαρμόσουν τη θεωρία πιθανοτήτων σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα. Μέσω της ανάλυσης των δεδομένων, οι μαθητές κατανοούν τον απλό προσθετικό νόμο της πιθανότητας, που ισχύει όταν τα γεγονότα είναι ασυμβίβαστα, δηλαδή όταν δεν έχουν κοινά στοιχεία.

Ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει το πρόβλημα και ζητά από τους μαθητές να καταγράψουν και να οργανώσουν τα δεδομένα:

- Συνολικός αριθμός από καραμέλες: 40
- Χρωματική κατανομή: 6 κόκκινες, 12 πράσινες, 8 μπλε, υπόλοιπες λευκές ή κίτρινες
- Γνωστή πιθανότητα: P(κίτρινη ή μπλε) = 0,4

Οι μαθητές, εργαζόμενοι σε ομάδες ή ατομικά, υπολογίζουν τις πιθανότητες των χρωμάτων χρησιμοποιώντας τον τύπο:

P(A)=ευνοϊκές περιπτώσεις/ σύνολο περιπτώσεων

Υπολογίζουν:

- P(κόκκινη)=0,15
- P(πράσινη)= 0,3
- P(κόκκινη ή πράσινη) =0,45

Στη συνέχεια, γίνεται συζήτηση για τον απλό προσθετικό νόμο:

- Οι μαθητές αναγνωρίζουν ότι η πιθανότητα P(κόκκινη ή πράσινη) μπορεί να υπολογιστεί με πρόσθεση των αντίστοιχων πιθανοτήτων, γιατί τα δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα (δεν μπορεί μια καραμέλα να είναι ταυτόχρονα κόκκινη και πράσινη).
- Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές παραδείγματα άλλων ασυμβίβαστων ενδεχομένων.
- Για την εύρεση του πλήθους των κίτρινων καραμελών, οι μαθητές λύνουν την εξίσωση:

P(κίτρινη)+P(μπλε)=0,4 ή $\frac{x}{40}+\frac{8}{40}=0{,}4$ ή x+8=16 ή x=8.

Άρα, οι κίτρινες καραμέλες είναι 8.

Η δραστηριότητα ολοκληρώνεται με συζήτηση, όπου οι μαθητές επαληθεύουν τα αποτελέσματά τους και εφαρμόζουν τον προσθετικό κανόνα σε νέα παραδείγματα. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τον αναστοχασμό μέσω ερωτήσεων, όπως:

- *Γιατί μπορούμε να προσθέσουμε τις πιθανότητες όταν τα ενδεχόμενα δεν έχουν κοινά στοιχεία;*
- *Μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα όταν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ δύο ενδεχομένων;*

Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές αποκτούν βαθύτερη κατανόηση της πιθανότητας και της μαθηματικής δομής των ασυμβίβαστων γεγονότων, ενώ η χρήση αριθμητικών και λογικών συλλογισμών ενισχύει τη μαθηματική τους σκέψη.

6. Συμπερασματικοί στοχασμοί για τη διδασκαλία των Μαθηματικών

Η διδασκαλία των Μαθηματικών αποτελεί μία από τις πιο απαιτητικές και συναρπαστικές προκλήσεις για τους εκπαιδευτικούς, καθώς δεν περιορίζεται στη μετάδοση γνώσεων, αλλά επικεντρώνεται στη δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος που καλλιεργεί τη μαθηματική σκέψη, τη δημιουργικότητα και την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών. Στο πλαίσιο αυτό, ο εκπαιδευτικός σχεδιάζει μαθηματικά έργα και δραστηριότητες που προάγουν τη διερεύνηση, τη συνεργασία και την εδραίωση των μαθηματικών εννοιών. Οι προτάσεις διδακτικής διαχείρισης που συνοδεύουν το βιβλίο Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου και τα Ψηφιακά Μαθησιακά Αντικείμενα (ΨΜΑ) παρέχουν πολύτιμα εργαλεία για την υποστήριξη αυτής της διαδικασίας, προσαρμόζοντας τις ιδέες και τις μεθόδους στις ανάγκες κάθε τάξης.

Ένας ασφαλής και συμπεριληπτικός χώρος μάθησης αποτελεί θεμέλιο για την πρόοδο των μαθητών. Οι εκπαιδευτικοί καλλιεργούν μια κουλτούρα διαλόγου, όπου κάθε άποψη και απορία γίνεται σεβαστή, ενώ ενισχύουν την ενεργή συμμετοχή όλων, αναγνωρίζοντας τη σημασία της κοινωνικής και πολιτισμικής πολυμορφίας. Μέσα από πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία, αξιοποιούν τις πολιτισμικές αξίες και εμπειρίες των μαθητών, εφαρμόζοντας διαφοροποιημένες και πολυτροπικές διδακτικές πρακτικές που ανταποκρίνονται στις μοναδικές τους ανάγκες. Παράλληλα, προάγουν αυθεντικές μαθηματικές δραστηριότητες που ενισχύουν τη σκέψη, τη συλλογική κατανόηση και τη μαθηματική αυτοπεποίθηση. Θέτοντας υψηλές προσδοκίες για όλους, εξασφαλίζουν δίκαιη πρόσβαση στη μάθηση, δημιουργώντας ένα περιβάλλον που ενδυναμώνει τη διαρκή μαθησιακή ανάπτυξη.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών απαιτεί στρατηγικές που ενισχύουν τη βαθιά κατανόηση, την κριτική σκέψη και τη συνεργασία. Η διαχείριση λαθών βοηθά στη βελτίωση του συλλογισμού και την αποσαφήνιση παρανοήσεων, ενώ η εννοιολογική διδασκαλία συνδέει τις μαθηματικές έννοιες με τη συμβολική γλώσσα (Μπαραλός, 2007; Πόταρη κ.ά., 2022). Μέσα από μαθηματικές συζητήσεις, συνεργατικές προσεγγίσεις και τη χρήση σύγχρονων εργαλείων, η διδασκαλία γίνεται ελκυστική και δημιουργική, ενώ οι διαφοροποιημένες δραστηριότητες και οι ανοικτές ερωτήσεις ενθαρρύνουν την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας, καλλιεργώντας την αυτονομία και τη θετική στάση των μαθητών.

Στο συμπληρωματικό υλικό του βιβλίου Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου, έχουμε αναπτύξει και παραθέτουμε πλήθος ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων (ΨΜΑ), τα οποία αποσκοπούν στην ενίσχυση της διδακτικής διαχείρισης και στην ενεργοποίηση της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών, διευκολύνοντας τη μαθησιακή διαδικασία.

<table>
<tr><th colspan="2">ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
Αντιστοίχιση παραγράφων με τα ΠΜΑ</th></tr>
<tr><th>Παράγραφος</th><th>ΠΜΑ</th></tr>
<tr><td colspan="2">Κεφάλαιο 1: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ</td></tr>
<tr><td>1.1</td><td>• Να διερευνούν τις ιδιότητες των δυνάμεων με βάση ρητό και εκθέτη θετικό ακέραιο, να τις διατυπώνουν συμβολικά και να τις αιτιολογούν χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δύναμης.</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>• Να επεκτείνουν τον ορισμό και τις ιδιότητες της δύναμης στην περίπτωση του ακέραιου εκθέτη.</td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>• Να αξιοποιούν την τυποποιημένη μορφή των ρητών αριθμών για να αναπαριστούν μικρά φυσικά μεγέθη και να επιλύουν αντίστοιχα προβλήματα.</td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>• Να υπολογίζουν την τιμή απλών αριθμητικών παραστάσεων με τις τέσσερις πράξεις και δυνάμεις, με την απαιτούμενη προτεραιότητα.</td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>• Να αναγνωρίζουν, μέσα από προβλήματα, την αναγκαιότητα εισαγωγής και χρήσης των τετραγωνικών ριζών θετικών αριθμών. Να προσδιορίζουν τις τετραγωνικές ρίζες τέλειων τετραγώνων.
(Προτείνεται να προηγηθεί η διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος από τη Γεωμετρία.)</td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>• Να διερευνούν την ύπαρξη αριθμών που δεν είναι ρητοί και να αναγνωρίζουν τους άρρητους.
• Να διερευνούν και να διακρίνουν τις δεκαδικές αναπαραστάσεις των ρητών και άρρητων αριθμών.</td></tr>
<tr><td>1.7</td><td>• Να τοποθετούν άρρητους αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.
• Να λύνουν προβλήματα με τη χρήση πραγματικών αριθμών.
• Να επεκτείνουν τον ορισμό της δύναμης με βάση πραγματικό αριθμό και εκθέτη ακέραιο.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Κεφάλαιο 2: ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ</td></tr>
<tr><td>2.1</td><td>• Να λύνουν προβλήματα που συναντούν στα Μαθηματικά και την καθημερινή ζωή με κανονικότητες της μορφής $α \cdot ν + β$ όπου α και β ρητοί αριθμοί.
• Να διατυπώνουν επιχειρήματα και να αιτιολογούν τους συλλογισμούς τους σχετικά με τον προσδιορισμό μιας κανονικότητας.</td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>• Να αναγνωρίζουν και να ερμηνεύουν μια αλγεβρική παράσταση ως γινόμενο ή άθροισμα.
• Να απλοποιούν απλές αλγεβρικές παραστάσεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας (απαλοιφή παρένθεσης και αναγωγή όμοιων όρων).
• Να διερευνούν και να αποδεικνύουν αλγεβρικά και γεωμετρικά την ιδιότητα:
$$(α + β)(γ + δ) = αγ + αδ + βγ + βδ.$$
• Να υπολογίζουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης.</td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>• Να αναγνωρίζουν τους όρους: εξίσωση πρώτου βαθμού, πρώτο και δεύτερο μέλος, άγνωστος, λύση ή ρίζα.
• Να αναγνωρίζουν αν ένας αριθμός είναι λύση της εξίσωσης ή/και του αντίστοιχου προβλήματος.</td></tr>
<tr><td>2.4</td><td>• Να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $αx + β = γx + δ$ με εφαρμογή των ιδιοτήτων διατήρησης της ισότητας και των πράξεων.
• Να αναγνωρίζουν ισοδύναμες εξισώσεις.
• Να αναγνωρίζουν ότι μια εξίσωση μπορεί να έχει άπειρες λύσεις ή καμία λύση.</td></tr>
</table>

2.5	• Να επιλύουν ρεαλιστικά προβλήματα με εξισώσεις της μορφής $αx + β = γx + δ$ με άγνωστο και στα δύο μέλη. • Να συνθέτουν ρεαλιστικά προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις της μορφής $αx + β = γx + δ$ με άγνωστο και στα δύο μέλη.
Κεφάλαιο 3: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	
3.1	• Να αναγνωρίζουν σε καταστάσεις της καθημερινότητας μεγέθη που συμμεταβάλλονται και να διακρίνουν ποιο μέγεθος καθορίζει το άλλο. • Να αναγνωρίζουν τις σχέσεις που τα μεγέθη συμμεταβάλλονται ως συναρτήσεις και να τις διακρίνουν από σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις. • Να εκφράζουν μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών) και συμβολικά (με τύπο).
3.2	• Να χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, τύπους) και να μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν). • Να εξετάζουν αν ένα σημείο (διατεταγμένο ζεύγος) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. • Να υπολογίζουν αλγεβρικά και να εκτιμούν γραφικά τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως.
3.3	• Να αναγνωρίζουν μέσα σε ποικίλα πλαίσια τη σχέση που συνδέει δύο ανάλογα ποσά ως σχέση αναλογίας. • Να αναπαριστούν τις σχέσεις αναλογίας που εμφανίζονται σε διάφορα πλαίσια ως σχέση της μορφής $y = αx$. • Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx$ και να διαπιστώνουν ότι είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. • Να ερμηνεύουν τη σταθερά αναλογίας (κλίση της ευθείας) ως μεταβολή του y που αντιστοιχεί σε μοναδιαία αύξηση του x.
3.4	• Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx + β$ και να εξηγούν τη σημασία των α και β. • Να επιλύουν (γραφικά και αλγεβρικά) προβλήματα χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης $y = αx + β$. • Να επιλύουν γραφικά εξισώσεις της μορφής $αx + β = γ$.
3.5	• Να διερευνούν μέσα από προβλήματα τη σχέση που συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά. • Να εκφράζουν τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά που ανακύπτουν σε προβλήματα της καθημερινής ζωής στη μορφή $y = \frac{α}{x}$, $x \neq 0$, $α \neq 0$. • Να διερευνούν αν στη συνάρτηση $y = \frac{α}{x}$ αυξάνεται ή μειώνεται το y όταν αυξάνεται το x για $α > 0$ και $α < 0$. • Να επιλύουν προβλήματα αντιστρόφως ανάλογων ποσών με τη συνάρτηση $y = \frac{α}{x}$, $x \neq 0$, $α \neq 0$.
Κεφάλαιο 4: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	
4.1	• Να διερευνούν και να αιτιολογούν εμπειρικά τις σχέσεις εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας που βαίνουν στο ίδιο τόξο.
4.2	• Να αναγνωρίζουν και να διακρίνουν ένα κανονικό από ένα μη κανονικό πολύγωνο και να διαμορφώνουν σχετικούς ορισμούς. • Να προσδιορίζουν την κεντρική γωνία κανονικών ν−γώνων και τη γωνία κανονικού ν−γώνου (με ν = 3, 4, 6). • Να σχεδιάζουν κανονικά πολύγωνα χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα ή ψηφιακά εργαλεία.

4.3	• Να διερευνούν και να διατυπώνουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του και να τα χρησιμοποιούν για τον υπολογισμό μηκών και τον προσδιορισμό ορθής γωνίας τριγώνου, αντίστοιχα.
Κεφάλαιο 5: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ	
5.1	• Να αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές με τη βοήθεια διανυσμάτων. • Να συνδέουν τα διανύσματα με φυσικά διανυσματικά μεγέθη και να προσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά τους αναγνωρίζοντας τη διαφορά ανάμεσα σε ευθύγραμμο τμήμα και διάνυσμα.
5.2	• Να αναγνωρίζουν μετασχηματισμούς μεταφοράς και να καθορίζουν τα στοιχεία και τα χαρακτηριστικά τους. • Να διερευνούν και να εντοπίζουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα από έναν μετασχηματισμό μεταφοράς. • Να αξιοποιούν τις ιδιότητες του μετασχηματισμού μεταφοράς κατά διάνυσμα στον σχεδιασμό σχημάτων και την αιτιολόγηση ιδιοτήτων τους. • Να σχεδιάζουν το σχήμα που προκύπτει από τη μεταφορά ενός σχήματος κατά διάνυσμα χρησιμοποιώντας μία ποικιλία εργαλείων και στρατηγικών.
5.3	• Να αναγνωρίζουν μετασχηματισμούς στροφής και να καθορίζουν τα στοιχεία και τα χαρακτηριστικά τους. • Να διερευνούν και να εντοπίζουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα από έναν μετασχηματισμό στροφής ως προς κέντρο και γωνία στροφής. • Να αξιοποιούν τις ιδιότητες του μετασχηματισμού στροφής ως προς κέντρο και γωνία στροφής στον σχεδιασμό σχημάτων και στην αιτιολόγηση ιδιοτήτων τους. • Να σχεδιάζουν με ποικιλία εργαλείων και στρατηγικών το σχήμα που προκύπτει από τη στροφή δεδομένου σχήματος ως προς κέντρο και συγκεκριμένη γωνία στροφής αξιοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού.
5.4	• Να αναγνωρίζουν την κεντρική συμμετρία ως ειδική περίπτωση μετασχηματισμού στροφής κατά 180°. • Να αναγνωρίζουν σχήματα με κέντρο συμμετρίας και να προσδιορίζουν το κέντρο συμμετρίας τους.
5.5	• Να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν μετασχηματισμούς σε ένα γεωμετρικό μοτίβο, ένα σχέδιο, ένα έργο τέχνης ή μία πλακόστρωση.
Κεφάλαιο 6: ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	
6.1	• Να χρησιμοποιούν τον τύπο για το μήκος κύκλου στην επίλυση προβλημάτων.
6.2	• Να υπολογίζουν τα μήκη των τόξων ως μέρη του μήκους του κύκλου τους.
6.3	• Να μετασχηματίζουν επιφάνειες σε ισοδύναμες με τη διαδικασία διάσπασης και ανασύνθεσης επιφάνειας.
6.4	• Να επιλέγουν τις κατάλληλες μονάδες μέτρησης εμβαδού επιφάνειας και να κάνουν μετατροπές από τη μία μονάδα μέτρησης στην άλλη.
6.5	• Να επικυρώνουν τους τύπους εμβαδού τετραγώνου και ορθογώνιου παραλληλογράμμου επιλέγοντας κατάλληλη μονάδα μέτρησης. • Να χρησιμοποιούν τη διάσπαση και ανασύνθεση επιφανειών για τον προσδιορισμό του τύπου του εμβαδού παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου.
6.6	• Να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου όταν γνωρίζουν την ακτίνα ή τη διάμετρο του κύκλου.

6.7	• Να υπολογίζουν τα εμβαδά κυκλικών τομέων ως μέρη του εμβαδού του κυκλικού δίσκου τους.
6.8	• Να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού εμβαδού μεικτόγραμμων σχημάτων αξιοποιώντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών.
6.9	• Να αξιοποιούν την έννοια του εμβαδού για την εξήγηση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.
Κεφάλαιο 7: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ	
7.1	• Να διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με απογραφικά χρονικά δεδομένα. • Να συλλέγουν χρονικά δεδομένα που προκύπτουν από επαναλαμβανόμενες μετρήσεις κάποιου χαρακτηριστικού. • Να κατασκευάζουν χρονοδιαγράμματα για χρονικά δεδομένα.
7.2	• Να περιγράφουν και προσδιορίζουν τα τεταρτημόρια ενός συνόλου δεδομένων. • Να κατασκευάζουν απλά θηκογράμματα χρησιμοποιώντας την «περίληψη πέντε αριθμών» για συνεχή ποσοτικά δεδομένα. • Να περιγράφουν τα δεδομένα με βάση την περίληψη των πέντε αριθμών: ελάχιστη τιμή, τεταρτημόρια και μέγιστη τιμή.
7.3	• Να διερευνούν ιδιότητες της μέσης τιμής, όπως τη μεταβολή της όταν προστίθενται ή πολλαπλασιάζονται όλα τα δεδομένα με τον ίδιο αριθμό. • Να διερευνούν πώς επηρεάζονται η μέση τιμή και η διάμεσος από την ύπαρξη απόμακρων τιμών. • Να περιγράφουν και να διερευνούν την έννοια της μεταβλητότητας χρησιμοποιώντας το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.
7.4	• Να επιλέγουν πληροφορίες από διαφορετικές αναπαραστάσεις ποσοτικών και χρονικών δεδομένων και να καταλήγουν σε συμπεράσματα. • Να εντοπίζουν παραδείγματα χρήσης στατιστικών διαγραμμάτων που μπορούν να οδηγήσουν σε εσφαλμένα συμπεράσματα και να παραπλανήσουν.
Κεφάλαιο 8: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ	
8.1	• Να ελέγχουν αν δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα.
8.2	• Να απαριθμούν το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου με χρήση της Βασικής Αρχής Απαρίθμησης (ΒΑΑ) και να υπολογίζουν την αντίστοιχη πιθανότητα.
8.3	• Να χρησιμοποιούν τον απλό προσθετικό νόμο για να υπολογίζουν την πιθανότητα σύνθετων ενδεχόμενων.

Βιβλιογραφία

Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert.* Villeurbanne: IREM de Lyon, CRDP.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843–908). Information Age Publishing.

Bakogianni, D. (2019). *Studying a community of secondary mathematics teachers who negotiate new resources for the teaching of statistics* (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Σχολή Θετικών Επιστημών. Τμήμα Μαθηματικών. Τομέας Διδακτικής των Μαθηματικών).

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, D. A. (2020). *Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II): A framework for statistics and data science education.* American Statistical Association

Becker, J., & Shimada, S. (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Boaler, J. (2022). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative mathematics, inspiring messages and innovative teaching.* John Wiley & Sons.

Black, P., & Wiliam, D. (2010). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan, 80*(2).

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques.* Grenoble: La pensée Sauvage.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing.* Psychology Press.

Cai, J., & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 287–301.

Calvin, C. (2007). *Ο ταξιδευτής των Μαθηματικών.* Αθήνα: Κέδρος.

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (Eds.). (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Clarke, D. J., & Mesiti, C. (2013). Writing the student into the task: Agency and Voice. In A. Watson, M. Ohtani, J. Ainley, J. Bolite Frant, M. Doorman, C. Kieran, A. Leung, C. Margolinas, P. Sullivan, D. Thompson, & Y. Yang (Eds.). Proceedings of ICMI Study 22: Task Design in Mathematics Education, (pp. 175–184). Oxford: International Commission on Mathematics Instruction

Hollebrands, K. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(1), 55–72.

Kafetzopoulos, G. I., & Psycharis, G. (2022). Conceptualization of function as a covariational relationship between two quantities through modeling tasks. *The Journal of Mathematical Behavior, 67*, 100993.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Information Age Publishing.

Kosyvas, G. (2016). Students' involvement in a workplace inquiry activity: Solution of the solar panel problem. In G. Adams (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 36*(1), 47–52.

Kosyvas, G., & Glinou, A. (2023). Collaborative learning and problem-solving practices in the instruction of mathematics in secondary education. In G. Kosyvas (Ed.), *The Connect Approach Handbook: A Handbook on the implementation of the Flipped Classroom Approach in Secondary Education (Gymnasium) in the context of Mathematics, Physics and Foreign Language* (pp. 30–35). Athens: Regional Directorate for Primary and Secondary Education of Attica (e-book).

Louie, N. L. (2017). The culture of exclusion in mathematics education and its persistence in equity-oriented teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(5), 488–519.

OECD (2023). PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education, PISA, OECD Publishing, Paris.

Sakonidis, C., Potari, D., & Zachariades, T. (2022). Meeting the challenges of re-designing two mathematics curricula reforms in uncertain times. *Research in Mathematics Education, 24*(2), 150–169.

Slavin, R. E. (1995). *Cooperative learning: Theory, research, and practice.* Boston: Allyand and Bacon Publishers.

Swan, M. (2006). *Collaborative learning in mathematics: A challenge to our beliefs and practices.* NRDC.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge University Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press.

Polya, G. (1998). *Πώς να το λύσω.* Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Vygotsky, L. (1988). *Σκέψη και γλώσσα.* Αθήνα: Γνώση.

Vygotsky, L. (1997). *Νους στην κοινωνία, η ανάπτυξη των ανώτερων ψυχολογικών διαδικασιών.* Αθήνα: Gutenberg.

Καραβασίλης, Γ., & Κόσυβας, Γ. (2016). Όψεις κριτικής αποτίμησης του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου: το εγχειρίδιο υποστηρίζει δραστηριότητες υψηλής γνωστικής βαρύτητας; *Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών–Επιστημονικών Θεμάτων, 10*, 68-84.

Βερύκιος, Π. (2003): «Κατανόηση εννοιών της άλγεβρας από μαθητές του Γυμνασίου». Εισήγηση στο Συνέδριο που διοργάνωσε το Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών και το Πανεπιστήμιο Κύ-πρου από 12-14/4/2003 με θέμα «Τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο».

Βερύκιος, Π. (2006). «*Συζήτηση με Ολόκληρη την Τάξη: μια σημαντική διάσταση για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών*». *Πρακτικά του 23ου Συνεδρίου της ΕΜΕ, Πάτρα.*

Βερύκιος Π. (2010): «*Συναρτησιακή προσέγγιση βασικών μαθηματικών εννοιών στο Γυμνάσιο*». Διδακτορική διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ.

Βερύκιος, Π. (2011). *Συναρτησιακή προσέγγιση βασικών εννοιών της Σχολικής Άλγεβρας σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλήματος*. Στο: *Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση.* Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών (σσ. 9-50). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Δραμαλίδης, Α., Μάρκος, Α., & Σακονίδης, Χ. (2009). Μαθηματικές επιδόσεις μαθητών Γ΄ Γυμνασίου: διερεύνηση κοινωνικο-εκπαιδευτικών παραγόντων. Στο Γ. Ηλιόπουλος, Σ. Κουνιάς, & Γ. Παπαϊωάννου (Επιμ.), *Πρακτικά 22ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Στατιστικής* (σελ. 75-82).

ΙΕΠ. (2023). *Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά Γυμνασίου.* Αθήνα: ΙΕΠ.

Κολέζα, Ε. (2003). Νοητικές διεργασίες ανάπτυξης γεωμετρικών εννοιών. *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.*

Κυνηγός, Χ. (2006). *Το μάθημα της Διερεύνησης.* Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Κόσυβας, Γ. (2008). Εικασίες και μαθηματική συζήτηση στην τάξη. *Πρακτικά του 25ου Συνεδρίου της ΕΜΕ* (σσ. 434-448). Βόλος: ΕΜΕ.

Κόσυβας, Γ. (2014). Εμπλοκή των μαθητών σε ένα πρόβλημα εικονιστικής κανονικότητας για την εισαγωγή στην άλγεβρα. *Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών–Επιστημονικών Θεμάτων, 3*, 31-53.

Κόσυβας, Γ. (2023). Η «παιδαγωγική της ενσυναίσθησης» στο «Διαδικτυακό Σχολείο» της Περιφερειακής Διεύθυνσης Εκπαίδευσης Αττικής. *Preschool and Primary Education, 11*(2), 207–237.

Κόσυβας, Γ., & Τσίτσος, Β. (2024). Διερευνήσεις μετασχηματισμών μεταφοράς σε περιβάλλον δυναμικής Γεωμετρίας στη Β΄ Γυμνασίου. Στο *Πρακτικά 39ου συνεδρίου της ΕΜΕ* (σσ. 312–321). Αθήνα: ΕΜΕ.

Λεμονίδης, Χ. (1996). Δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθητών κατά το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. Ευκλείδης Γ', Τόμος 13, Τεύχος 45.

Μπαραλός, Γ. (2001). Η τυπική απόδειξη ισχύει πάντοτε. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, 18*, 340-352.

Μπαραλός, Γ. (2007). Το λάθος ως στοιχείο σχεδιασμού της διδασκαλίας στα μαθηματικά. Στο *Τα λάθη των μαθητών: Δείκτες Αποτελεσματικότητας ή Κλειδιά για τη Βελτίωση της Ποιότητας της Εκπαίδευσης* (σσ. 345-354).

Τζεκάκη, Μ., Μπαραλός, Γ., Σταγιόπουλος, Π.(2011). *Προσαρμογές αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο: Σχέδια διδασκαλίας για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (Τεύχος Α΄ και Τεύχος Β΄).

Πόταρη, Δ., Ζωιτσάκος, Σ., Καμπούκος, Κ., Κόσυβας, Γ., Λουλάκης, Μ., Μεταξάς, Ν., & Τριανταφύλλου, Χ. (2022). *Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Γυμνασίου* (2η έκδοση). Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματική Δραστηριότητα και Μαθηματικά Έργα. Κεντρική Ομιλία. Στο Καλδρυμίδου, Μ., & Βαμβακούση, Ξ. (Επιμ.), *Πρακτικά από το 4ο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σσ. 51-66). Ιωάννινα: ΕΝΕΔΙΜ - Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Τσίτσος, Β., & Σταθοπούλου, Χ. (2016). Διδακτικές μετατοπίσεις με εργαλείο τη μαθηματική μοντελοποίηση. Στο Μ. Σκουμιός & Χ. Σκουμπουρδή (Επιμ.), *Πρακτικά 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή: Το εκπαιδευτικό υλικό στα Μαθηματικά και το εκπαιδευτικό υλικό στις Φυσικές Επιστήμες: Μοναχικές πορείες ή αλληλεπιδράσεις;* (σσ. 421–430).

Σακονίδης, Χ. (2007). *Κλειδιά και αντικλείδια: Μαθαίνοντας και διδάσκοντας Μαθηματικά.* ΥΠΕΠΘ: Πανεπιστήμιο Αθηνών.