ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Αθανάσιος Βελέντζας, Ευστράτιος Καπότης,
Αλέξανδρος Π. Κατέρης, Βασίλειος Νούσης, Αργύριος Πάσχος,
Γεώργιος Πολυζώης, Παύλος Γ. Τζαμαλής

Φυσική

Α΄ Λυκείου

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ

- **απαντήσεις** των ερωτήσεων
- **λύσεις** των ασκήσεων και των προβλημάτων

ΕΛΛΗΝΟ ΕΚΔΟΤΙΚΗ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Οι αναλυτικές λύσεις είναι ενδεικτικές και σε καμία περίπτωση οι μοναδικές ορθές στα ερωτήματα και τις ασκήσεις που τίθενται στο σχολικό βιβλίο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Δύναμη

1.1 Η έννοια της δύναμης

Ερωτήσεις

1. **α)** Είναι $\Delta L = 2\ \text{mm} = 2{\cdot}10^{-3}\ \text{m}$. Ισχύει:

$$F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta L \quad \text{ή} \quad k = \frac{F_{\varepsilon\lambda}}{\Delta L}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$k = \frac{4\ \text{N}}{2{\cdot}10^{-3}\ \text{m}} = 2{\cdot}10^{3}\ \text{N/m}$$

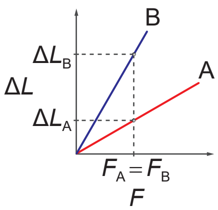
β) Είναι $\Delta L' = 5\ \text{mm} = 5{\cdot}10^{-3}\ \text{m}$. Έχουμε:

$$F'_{\varepsilon\lambda} = k\Delta L' = \left(2{\cdot}10^{3}\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)\left(5{\cdot}10^{-3}\ \text{m}\right) = 10\ \text{N}$$

2. Την κίνηση του μικρού σκάφους προκαλεί η δύναμη που ασκεί το νερό στα κουπιά. Σύμφωνα με τον 3ο Νόμο του Νεύτωνα (Νόμος Δράσης-Αντίδρασης), ο αθλητής ασκεί δύναμη στο νερό μέσω των κουπιών (δράση) και το νερό ασκεί ταυτόχρονα μια αντίθετη δύναμη (αντίδραση) που κινεί το μονό σκιφ.

3. **α)** Ισχύουν:

$$F_{\text{A}} = k_{\text{A}}\Delta L_{\text{A}} \quad \text{και}$$
$$F_{\text{B}} = k_{\text{B}}\Delta L_{\text{B}}$$



Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\cancel{F_{\text{A}}}}{\cancel{F_{\text{B}}}} = \frac{k_{\text{A}}\Delta L_{\text{A}}}{k_{\text{B}}\Delta L_{\text{B}}} \quad \text{ή} \quad 1 = \frac{k_{\text{A}}\Delta L_{\text{A}}}{k_{\text{B}}\Delta L_{\text{B}}}$$

$$\text{ή} \quad k_{\text{B}}\Delta L_{\text{B}} = k_{\text{A}}\Delta L_{\text{A}}$$

$$\text{ή} \quad \frac{k_{\text{B}}}{k_{\text{A}}} = \frac{\Delta L_{\text{A}}}{\Delta L_{\text{B}}} \quad (1)$$

Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι:

$$\Delta L_{\text{A}} < \Delta L_{\text{B}} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta L_{\text{A}}}{\Delta L_{\text{B}}} < 1 \quad (2)$$

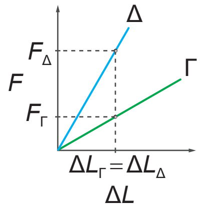
Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{k_{\text{B}}}{k_{\text{A}}} < 1 \quad \text{ή} \quad k_{\text{B}} < k_{\text{A}}$$

Άρα, το Α είναι πιο δύσκαμπτο από το Β.

β) Ισχύουν:

$$F_{\Gamma} = k_{\Gamma}\Delta L_{\Gamma} \quad \text{και} \quad F_{\Delta} = k_{\Delta}\Delta L_{\Delta}$$



Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{F_{\Gamma}}{F_{\Delta}} = \frac{k_{\Gamma}\,\cancel{\Delta L_{\Gamma}}}{k_{\Delta}\,\cancel{\Delta L_{\Delta}}} \quad \text{ή} \quad \frac{F_{\Gamma}}{F_{\Delta}} = \frac{k_{\Gamma}}{k_{\Delta}} \quad (3)$$

Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι:

$$F_{\Gamma} < F_{\Delta} \quad \text{ή} \quad \frac{F_{\Gamma}}{F_{\Delta}} < 1 \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει:

$$\frac{k_{\Gamma}}{k_{\Delta}} < 1 \quad \text{ή} \quad k_{\Gamma} < k_{\Delta}$$

Άρα, το Δ είναι πιο δύσκαμπτο από το Γ.

Ασκήσεις

1. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η επιμήκυνση ΔL και το βάρος w είναι ανάλογα ποσά, οπότε:

$$\frac{\Delta L_1}{\Delta L_2} = \frac{w_1}{w_2} \quad (1)$$

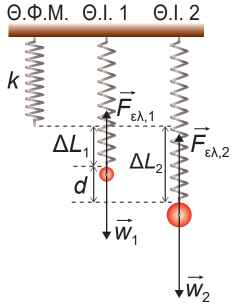
Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι για $w_1 = 5\ \text{N}$ προκαλείται επιμήκυνση $\Delta L_1 = 15\ \text{cm}$. Έστω ότι η επιμήκυνση $\Delta L_2 = 33\ \text{cm}$ αντιστοιχεί σε βάρος w_2. Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$\frac{15\ \text{cm}}{33\ \text{cm}} = \frac{5\ \text{N}}{w_2} \quad \text{ή} \quad 15w_2 = 5\cdot 33\ \text{N}$$

$$\text{ή} \quad w_2 = \frac{5\cdot 33}{15}\ \text{N} \quad \text{ή} \quad w_2 = 11\ \text{N}$$

Άρα, η επιμήκυνση $33\ \text{cm}$ προκλήθηκε από βάρος $11\ \text{N}$.

2. **α)**



Το βάρος $w_1 = 100\ \text{N}$ προκαλεί επιμήκυνση ΔL_1 και το βάρος $w_2 = w_1 + 20\ \text{N} = 120\ \text{N}$ προκαλεί πρόσθετη επιμήκυνση:

$$d = (81{,}25 - 80)\ \text{cm} = 1{,}25\ \text{cm} = 1{,}25 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

Στις θέσεις ισορροπίας ισχύουν:

$F_{\varepsilon\lambda,1} = w_1$ ή $k\Delta L_1 = w_1$ (1)

$F_{\varepsilon\lambda,2} = w_2$ ή $k\Delta L_2 = w_2$ ή $k(\Delta L_1 + d) = w_2$ (2)

Αφαιρώντας την (1) από τη (2) έχουμε:

$$kd = w_2 - w_1 \quad \text{ή} \quad k = \frac{w_2 - w_1}{d}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$k = \frac{120\ \text{N} - 100\ \text{N}}{1{,}25 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 1600\ \text{N/m}$$

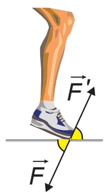
β) Από την (1) έχουμε:

$$\Delta L_1 = \frac{w_1}{k} = \frac{100\ \text{N}}{1600\ \text{N/m}} = 0{,}0625\ \text{m} = 6{,}25\ \text{cm}$$

Επομένως, το αρχικό μήκος του ελατηρίου ήταν:

$$80\ \text{cm} - 6{,}25\ \text{cm} = 73{,}75\ \text{cm}$$

3. Η δοθείσα δύναμη $\vec{F}$ και η δύναμη $\vec{F}'$ που ασκεί το ταρτάν στον δρομέα αποτελούν ζεύγος δράσης-αντίδρασης. Συνεπώς, η $\vec{F}'$ έχει την κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα και μέτρο:



$$F' = F \quad \text{ή} \quad F' = 600\ \text{N}$$

1.2 Σύνθεση και ανάλυση δυνάμεων

Ερωτήσεις

1. Έστω φ η γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι δύο δυνάμεις.

Όταν $\varphi = 0°$, τότε οι δυνάμεις είναι ομόρροπες και το μέτρο της συνισταμένης έχει μέγιστη τιμή:

$$\Sigma F_{max} = 2F$$

Όσο η φ αυξάνεται, παραμένοντας μικρότερη από $180°$, το μέτρο της συνισταμένης δύναμης θα μειώνεται.

Όταν $\varphi = 180°$, τότε οι δυνάμεις είναι αντίθετες, οπότε έχουν μηδενική συνισταμένη (ελάχιστη τιμή):

$$\Sigma F_{min} = 0$$

2. α) Έχουμε:

$\Sigma F_x = 5\ \text{N} - 5\ \text{N} = 0\ \text{N}$ και $\Sigma F_y = 6\ \text{N} - 3\ \text{N} = 3\ \text{N}$

Για τη συνισταμένη δύναμη ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_x + \Sigma\vec{F}_y$$

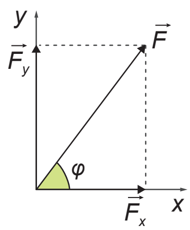
Επομένως, έχει μέτρο:

$$\Sigma F = \Sigma F_y = 3\ \text{N}$$

και κατεύθυνση ίδια με αυτήν της δύναμης 6 N.

β) Η επιπλέον δύναμη που πρέπει να δράσει στο σώμα έτσι, ώστε να μηδενιστεί η συνισταμένη δύναμη είναι αντίθετη της συνισταμένης του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα, θα έχει μέτρο 3 N και κατεύθυνση ίδια με αυτήν της δύναμης 3 N.

3. Οι συνιστώσες της δύναμης $\vec{F}$ είναι:



$F_x = F\sigma\upsilon\nu\varphi$

$= (100\ \text{N}) \cdot 0{,}6 = 60\ \text{N}$

$F_y = F\eta\mu\varphi$

$= (100\ \text{N}) \cdot 0{,}8 = 80\ \text{N}$

4. Από το σχήμα προκύπτουν τα εξής:

$$F_3 = 30\ \text{N}, \quad F_{1x} = 30\ \text{N}, \quad F_{1y} = 20\ \text{N},$$
$$F_{2x} = 30\ \text{N}, \quad F_{2y} = 10\ \text{N}$$

Έχουμε:

$$\Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} = 30\ \text{N} - 30\ \text{N} = 0\ \text{N}$$
$$\Sigma F_y = F_3 + F_{1y} + F_{2y} = -30\ \text{N} + 20\ \text{N} + 10\ \text{N} = 0\ \text{N}$$

Για τη συνισταμένη δύναμη ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_x + \Sigma\vec{F}_y$$

Επομένως, η συνισταμένη των τριών δυνάμεων είναι μηδέν ($\Sigma F = 0\ \text{N}$).

Ασκήσεις

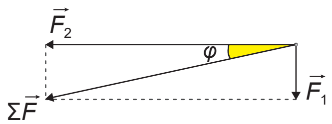
1. Για τη συνισταμένη $\Sigma\vec{F}$ των $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ισχύει:

$$\Sigma F = F_1 - F_2 \quad \text{ή} \quad F_2 = F_1 - \Sigma F$$

Με αντικατάσταση των τιμών προκύπτει:

$$F_2 = 3{,}7 \cdot 10^5\ \text{N} - 1{,}8 \cdot 10^5\ \text{N} = 1{,}9 \cdot 10^5\ \text{N}$$

2. α)



Με αντικατάσταση των τιμών στη σχέση:

$$\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

έχουμε:

$$41\,\text{N} = \sqrt{(9\,\text{N})^2 + F_2^2} \quad \text{ή} \quad (41\,\text{N})^2 = (9\,\text{N})^2 + F_2^2$$

$$\text{ή} \quad F_2^2 = 1600\,\text{N}^2$$

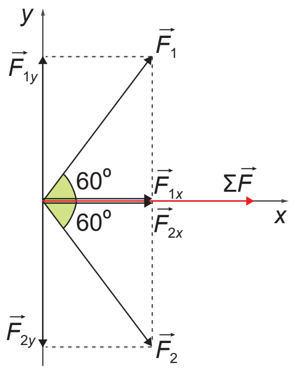
$$\text{ή} \quad F_2 = 40\,\text{N}$$

β) Ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{F_1}{F_2} = \frac{9\,\text{N}}{40\,\text{N}} = \frac{9}{40}$$

Με έναν υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε $\varphi = 12{,}7°$.

3. α)



Ισχύει:

$$F_1 = F_2 = F$$

Έχουμε:

$$\Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 \text{συν}60° + F_2 \text{συν}60°$$

$$= F\frac{1}{2} + F\frac{1}{2} = F$$

$$\Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} = F_1 \text{ημ}60° - F_2 \text{ημ}60°$$

$$= F\text{ημ}60° - F\text{ημ}60° = 0$$

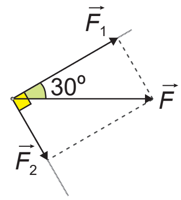
Επομένως:

$$\Sigma F = \Sigma F_x = F$$

β) Έστω τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ με μέτρα $F_1 = F_2 = F_3 = F$, οι οποίες σχηματίζουν ανά δύο γωνία $120°$.

Από το ερώτημα α) προκύπτει ότι η συνισταμένη των $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ έχει μέτρο F, διεύθυνση τη διχοτόμο των $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και φορά αντίθετη της $\vec{F}_3$. Επομένως, η συνισταμένη των $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ είναι αντίθετη της $\vec{F}_3$, οπότε οι τρεις δυνάμεις έχουν μηδενική συνισταμένη.

4. Η δύναμη $\vec{F}$ είναι η συνισταμένη των $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$. Έχουμε:



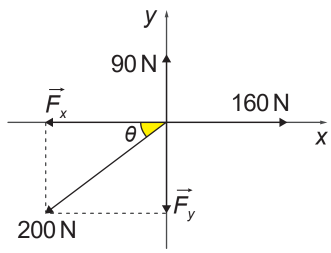
$$F_1 = F\text{συν}30°$$

$$= (97{,}0\,\text{N}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 84{,}0\,\text{N}$$

$$F_2 = F\text{ημ}30°$$

$$= (97{,}0\,\text{N}) \cdot \frac{1}{2} = 48{,}5\,\text{N}$$

5. α) Έστω $\vec{F}$ η δύναμη μέτρου $200\,\text{N}$. Επειδή η συνισταμένη δύναμη είναι κατακόρυφη, δεν θα έχει οριζόντια συνιστώσα, οπότε $\Sigma F_x = 0$. Επομένως, η συνιστώσα $\vec{F}_x$ της $\vec{F}$ θα έχει μέτρο $160\,\text{N}$.



β) Ισχύει:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$200\,\text{N} = \sqrt{(160\,\text{N})^2 + F_y^2}$$

$$\text{ή} \quad (200\,\text{N})^2 = (160\,\text{N})^2 + F_y^2$$

$$\text{ή} \quad F_y^2 = 14.400\,\text{N}^2 \quad \text{ή} \quad F_y = 120\,\text{N}$$

γ) Έχουμε:

$$\Sigma F = \Sigma F_y = 90\,\text{N} - 120\,\text{N} = -30\,\text{N}$$

Άρα, το μέτρο της συνισταμένης των τριών δυνάμεων είναι $30\,\text{N}$.

6. Οι συνιστώσες των δυνάμεων στους άξονες (2η και 3η στήλη) προκύπτουν από το διάγραμμα.

Το μέτρο κάθε δύναμης (4η στήλη) προκύπτει από το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Για τη συνιστώσα της συνισταμένης στον x-άξονα (5η στήλη) έχουμε:

$$\Sigma F_x = T_x + S_x + V_x + U_x$$

$$= 4\,\text{N} - 16\,\text{N} - 12\,\text{N} + 16\,\text{N} = -8\,\text{N}$$

Για τη συνιστώσα της συνισταμένης στον y-άξονα (6η στήλη) έχουμε:

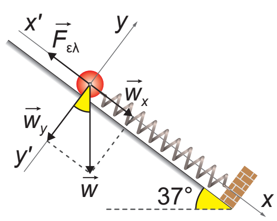
$$\Sigma F_y = T_y + S_y + V_y + U_y$$
$$= 12\text{ N} + 12\text{ N} - 12\text{ N} - 4\text{ N} = 8\text{ N}$$

Για το μέτρο της συνισταμένης (7η στήλη) έχουμε:

$$\Sigma F = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$$
$$= \sqrt{(-8\text{ N})^2 + (8\text{ N})^2} = 8\sqrt{2}\text{ N}$$

Δύναμη		T	S	V	U
Συνιστώσα δύναμης στον άξονα	x	4	–16	–12	16
	y	12	12	–12	–4
Μέτρο δύναμης		$4\sqrt{10}$	20	$12\sqrt{2}$	$4\sqrt{17}$
Συνιστώσα συνισταμένης στον άξονα	x	–8			
	y	8			
Μέτρο συνισταμένης		$8\sqrt{2}$			

7.



α) Έχουμε:

$$w_x = w\eta\mu\varphi = (1\text{ N})\cdot 0{,}6 = 0{,}6\text{ N}$$

β) Ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \;\text{ ή }\; w_x - F_{ελ} = 0$$
$$\text{ή }\; w_x = k\Delta L \;\text{ ή }\; k = \frac{w_x}{\Delta L}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$k = \frac{0{,}6\text{ N}}{10\text{ mm}} = 0{,}06\text{ N/mm}$$
$$= 0{,}06\,\frac{\text{N}}{10^{-3}\text{ m}} = 60\text{ N/m}$$

1.3 Είδη δυνάμεων

Ερωτήσεις

1. Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι η τριβή αυξάνεται συνεχώς. Συνεπώς, πρόκειται για στατική τριβή (η τριβή ολίσθησης έχει σταθερό μέτρο, ενώ η στατική τριβή μπορεί να έχει μεταβλητό μέτρο). Άρα, το κιβώτιο δεν ολισθαίνει μέχρι τη χρονική στιγμή t_1.

2. Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή t_1, δηλαδή κατά τη μετάβαση από τον διάδρομο (δ) στο σαλόνι (σ), η τριβή ολίσθησης μειώνεται. Επομένως:

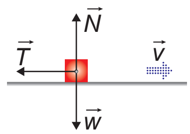
$$T_\delta > T_\sigma \;\text{ ή }\; \mu_\delta N_\delta > \mu_\sigma N_\sigma$$

Η κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}$ ισούται κατά μέτρο με το βάρος του κιβωτίου τόσο στον διάδρομο όσο και στο σαλόνι, οπότε από την προηγούμενη σχέση προκύπτει:

$$\mu_\delta > \mu_\sigma$$

Άρα, το κιβώτιο παρουσιάζει μικρότερο συντελεστή τριβής στο σαλόνι.

3. Αφαιρώντας βιβλία από το κουτί, μειώνεται το βάρος $\vec{w}$ του κουτιού με τα υπόλοιπα βιβλία. Αυτό έχει ως συνέπεια τη μείωση της κάθετης δύναμης στήριξης $\vec{N}$, οπότε μειώνεται η τριβή $\vec{T}$. Άρα, το κιβώτιο μετακινείται ευκολότερα.

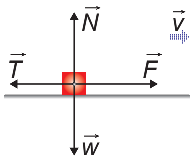


Πράγματι, ισχύει:

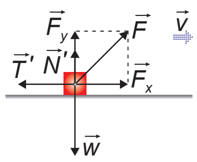
$$w_{τελ} < w_{αρχ} \;\text{ ή }\; N_{τελ} < N_{αρχ}$$
$$\text{ή }\; \mu N_{τελ} < \mu N_{αρχ} \;\text{ ή }\; T_{τελ} < T_{αρχ}$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι ο συντελεστής τριβής μ είναι πάντα θετικός και ανεξάρτητος από την κάθετη δύναμη στήριξης.

4. Η πρόσφυση είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση (Α) όπου η δύναμη του εργάτη είναι οριζόντια. Στην περίπτωση (Β) η κάθετη συνιστώσα $\vec{F}_y$ της $\vec{F}$ βοηθά το σώμα να «σηκωθεί», οπότε η δύναμη στήριξης είναι μικρότερη σε σχέση με την περίπτωση (Α).



(A)



(B)

Συνεπώς, μικρότερη είναι και η τριβή, οπότε το κιβώτιο έχει μικρότερη πρόσφυση στο πάτωμα.

5. Καλύτερη πρόσφυση με την επιφάνεια του χιονιού έχει το έλκηθρο στην περίπτωση (A) όπου η δύναμη από τον πατέρα έχει κάθετη συνιστώσα προς τα κάτω. Στην περίπτωση (B) η κάθετη συνιστώσα της δύναμης του πατέρα βοηθά να ανασηκωθεί το έλκηθρο, οπότε η κάθετη δύναμη στήριξης είναι μικρότερη σε σχέση με την περίπτωση (A). Συνεπώς, μικρότερη είναι και η τριβή.

Ασκήσεις

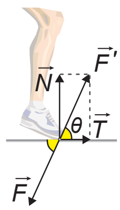
1. Αν $\vec{w}$ είναι το βάρος του κιβωτίου, τότε για την κάθετη δύναμη στήριξης και την τριβή δίνονται:

$$N = \frac{80}{100}w \quad \text{και} \quad T = \frac{16}{100}w$$

Αντικαθιστώντας τα N, T στην εξίσωση $T = \mu N$ έχουμε:

$$\frac{16}{100}w = \mu \cdot \frac{80}{100}w \ \text{ ή } \ 16 = 80\,\mu \ \text{ ή } \ \mu = 0{,}2$$

2. Στην άσκηση 3 της υποενότητας 1.1 δίνεται ότι $\theta = 60°$. Βρήκαμε το μέτρο της δύναμης που ασκείται στον δρομέα από το ταρτάν:

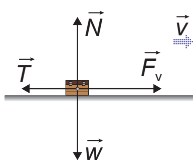


$$F' = 600\ \text{N}$$

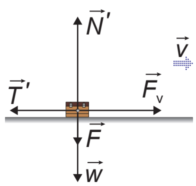
Η οριζόντια συνιστώσα της $\vec{F}'$ είναι η στατική τριβή με κατεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα και μέτρο:

$$T = F'\text{συν}\theta = (600\ \text{N})\cdot\frac{1}{2} = 300\ \text{N}$$

3. α)



(1)



(2)

Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι για $F = 0$ N είναι $T = 4$ N (**σχήμα 1**) και επειδή $N = w$, η σχέση $T = \mu N$ γράφεται (σε μονάδες SI):

$$\mu w = 4 \qquad (1)$$

Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι για $F = 15$ N είναι $T' = 10$ N (**σχήμα 2**) και επειδή $N' = F + w$, η σχέση $T' = \mu N' = \mu(F + w)$ γράφεται (σε μονάδες SI):

$$10 = \mu(15 + w) \ \text{ ή } \ 10 = \mu 15 + \mu w$$
$$\text{ή (λόγω της (1)) } 10 = 15\mu + 4$$
$$\text{ή } 15\mu = 6 \ \text{ ή } \ \mu = 0{,}4$$

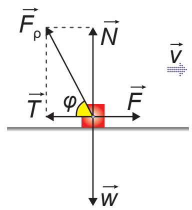
β) Από την (1) έχουμε:

$$w = \frac{4}{\mu}\ \text{N} = \frac{4}{0{,}4}\ \text{N} = 10\ \text{N}$$

Επομένως:

$$N = w = 10\ \text{N}$$

4. α) Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο βιβλίο. Η συνισταμένη της κάθετης δύναμης επαφής και της τριβής είναι η δύναμη $\vec{F}_\rho$ που ασκεί το ράφι στο βιβλίο.



β) Ισχύουν:

$$N = w = 10\ \text{N}$$
$$T = \mu N = 0{,}5\cdot(10\ \text{N}) = 5\ \text{N}$$

Ισχύει η διανυσματική σχέση:

$$\vec{F}_\rho = \vec{N} + \vec{T}$$

Για το μέτρο και την κατεύθυνση της $\vec{F}_\rho$ έχουμε:

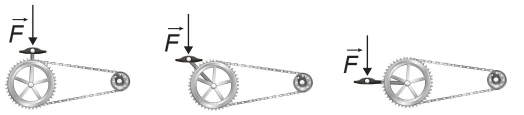
$$F_\rho = \sqrt{T^2 + N^2} = \sqrt{(5\ \text{N})^2 + (10\ \text{N})^2}$$
$$= \sqrt{125}\ \text{N} = 5\sqrt{5}\ \text{N}$$

$$\text{εφ}\varphi = \frac{N}{T} = \frac{10\ \text{N}}{5\ \text{N}} = 2$$

1.4 Το πρότυπο του άκαμπτου σώματος υπό την επίδραση δυνάμεων

Ερωτήσεις

1.



(A) (B) (Γ)

Στο στιγμιότυπο (Α) η απόσταση του σημείου περιστροφής από τον φορέα της δύναμης είναι μηδενική. Άρα, η ροπή μηδενίζεται, δηλαδή $\tau_A = 0$ N·m.

Στο στιγμιότυπο (Γ) η απόσταση του σημείου περιστροφής από τον φορέα της δύναμης είναι η μέγιστη δυνατή και ισούται με την ακτίνα R του γραναζιού. Άρα, το μέτρο της ροπής μεγιστοποιείται, δηλαδή $\tau_\Gamma = FR$.

Στο στιγμιότυπο (Β) για την απόσταση d του σημείου περιστροφής από τον φορέα της δύναμης ισχύει $d < R$. Άρα, το μέτρο της ροπής είναι $\tau_B = Fd$.

Ισχύει:

$$\tau_A < \tau_B < \tau_\Gamma$$

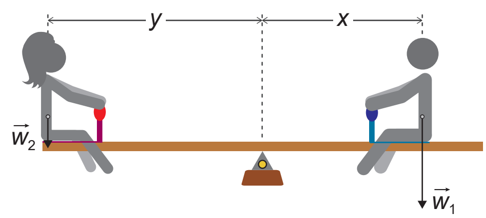
2. **α)** Το **γερμανικό κλειδί** είναι ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται για το σφίξιμο ή τη χαλάρωση παξιμαδιών, βιδών και μπουλονιών. Η αρχή λειτουργίας του βασίζεται στη ροπή. Όταν εφαρμόζεται δύναμη στη λαβή του κλειδιού, η δύναμη αυτή «πολλαπλασιάζεται» με την απόσταση από τον άξονα της βίδας (βραχίονας). Η ροπή που δημιουργείται είναι αρκετή για να περιστρέψει το παξιμάδι ή τη βίδα. Όσο μεγαλύτερη είναι η λαβή του κλειδιού τόσο μεγαλύτερη είναι η ροπή για την ίδια δύναμη, καθιστώντας έτσι ευκολότερο το σφίξιμο ή τη χαλάρωση των παξιμαδιών.

β) Το **καρότσι οικοδομής** είναι ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται για τη μεταφορά φορτίων. Η αρχή λειτουργίας του βασίζεται επίσης στη ροπή. Η δύναμη που ασκείται στα χερούλια του καροτσιού μεταφέρεται μέσω των βραχιόνων και δημιουργεί μια ροπή γύρω από τον τροχό (άξονας περιστροφής). Η ύπαρξη του τροχού μειώνει την ανάγκη για άσκηση μεγάλης δύναμης, αφού η ροπή βοηθά στην ανύψωση και τη μετακίνηση του φορτίου με μικρότερη προσπάθεια από ό,τι αν προσπαθούσαμε να σηκώσουμε το φορτίο χωρίς το καρότσι.

γ) Το **ανοιχτήρι κρασιού** ή τιρμπουσόν εκμεταλλεύεται τη ροπή για να διεισδύσει ο κοχλίας στον φελλό και τελικά να πραγματοποιηθεί η αφαίρεσή του από τα μπουκάλια. Όταν περιστρέφετε τη λαβή του, οι αντίρροπες δυνάμεις προκαλούν ροπή και με τον τρόπο αυτό βιδώνει το τιρμπουσόν μέσα στον φελλό. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας δύναμη στον μοχλό του, η ροπή βοηθά στην ανύψωση του φελλού από το μπουκάλι με σχετικά μικρή προσπάθεια.

3. Η ροπή της δύναμης που ασκούμε στην πόρτα, την περιστρέφει ως προς τον άξονα που ορίζουν οι μεντεσέδες. Μεγιστοποιούμε τη ροπή δεδομένης δύναμης, όταν μεγιστοποιήσουμε την απόσταση της δύναμης από τον άξονα περιστροφής. Για αυτό βάζουμε το πόμολο στην άκρη και όχι στο μέσο της πόρτας, αυξάνοντας με αυτόν τον τρόπο την απόσταση.

4. Δίνεται ότι $w_1 = 3w_2$. Οι ροπές των βαρών έχουν ίσα μέτρα.

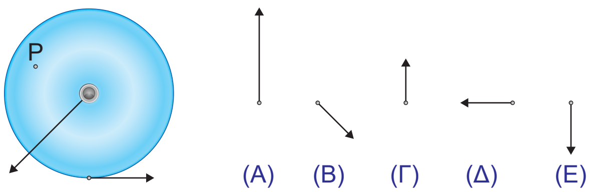


Επομένως:

$$\tau_1 = \tau_2 \;\text{ ή }\; w_1 x = w_2 y \;\text{ ή }\; 3w_2 x = w_2 y \;\text{ ή }\; x = \frac{y}{3}$$

Άρα, η τριπλάσια δύναμη πρέπει να ασκείται στο $1/3$ της απόστασης της άλλης δύναμης από το κέντρο περιστροφής (υποτριπλάσια απόσταση), για να έχει ίση κατά μέτρο ροπή με την άλλη δύναμη.

5. Η ροπή της δύναμης που διέρχεται από το κέντρο του τροχού είναι μηδενική. Αφού θέλουμε τη δράση τρίτης δύναμης που να μηδενίζει τη συνολική ροπή στο σώμα και η μία δύναμη έχει μηδενική ροπή, αρκεί η τρίτη δύναμη να δημιουργεί ροπή αντίθετης της ροπής που δημιουργεί η δύναμη στην περιφέρεια του τροχού. Η ροπή της δύναμης που ασκείται στην περιφέρεια έχει διεύθυνση κάθετη στη σελίδα του βιβλίου με φορά από το βιβλίο προς το μάτι μας. Η ροπή της τρίτης δύναμης πρέπει να έχει αντίθετη φορά.



Τη συνθήκη αυτή μπορούν να ικανοποιήσουν οι δυνάμεις (Α) και (Γ). Όμως, το σημείο Ρ βρίσκεται σε μικρότερη απόσταση από την ακτίνα του κύκλου, οπότε χρειάζεται να ασκηθεί μεγαλύτερη δύναμη, ώστε να παραχθεί ίσου μέτρου ροπή με τη ροπή της δύναμης που ασκείται στην περιφέρεια. Επειδή τα διανύσματα είναι σχεδιασμένα υπό κλίμακα και το (Α) είναι μεγαλύτερο από το (Γ), το (Α) μπορεί να δώσει την αντίθετη ροπή που απαιτείται.

Εναλλακτικά, ονομάζουμε $\vec{F}_1$ τη δύναμη με σημείο εφαρμογής το κέντρο του τροχού και $\vec{F}_2$ τη δύναμη με σημείο εφαρμογής στην περιφέρεια του τροχού. Θεωρούμε ότι ο τροχός έχει κέντρο Ο και ακτίνα R. Έστω $\vec{F}_3$ η δύναμη που πρέπει να δράσει στο σημείο Ρ. Ισχύει:

$$\vec{\tau}_{ολ} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 \text{ ή } \vec{0} = \vec{0} + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 \text{ ή } \vec{\tau}_2 = -\vec{\tau}_3$$

ή για τα μέτρα τους:

$$\tau_2 = \tau_3 \quad (1)$$

Η ροπή της $\vec{F}_2$ έχει διεύθυνση κάθετη στη σελίδα του βιβλίου με φορά από το βιβλίο προς το μάτι μας. Η ροπή της τρίτης δύναμης πρέπει να έχει αντίθετη φορά. Τη ζητούμενη φορά μπορούν να ικανοποιήσουν οι δυνάμεις (Α) και (Γ). Ισχύει:

$$(\text{OP}) < R \text{ ή } \frac{(\text{OP})}{R} < 1 \quad (2)$$

Η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$F_2 R = F_3 (\text{OP}) \text{ ή } \frac{F_2}{F_3} = \frac{(\text{OP})}{R}$$

και λόγω της (2) προκύπτει:

$$\frac{F_2}{F_3} < 1 \text{ ή } F_2 < F_3$$

δηλαδή η $\vec{F}_3$ πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την $\vec{F}_2$.

Άρα, από τα διανύσματα (Α) και (Γ) επιλέγουμε το μεγαλύτερο, δηλαδή το (Α).

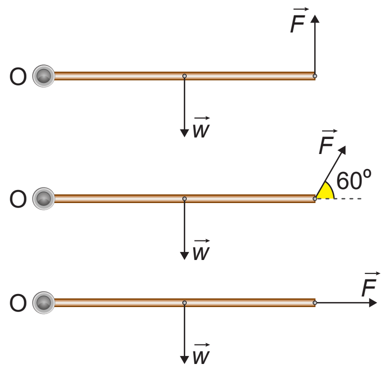
6. Σωστό είναι το γράφημα (Α).

Το δοχείο γεμίζει με σταθερό ρυθμό, οπότε το κέντρο μάζας του νερού θα ανυψώνεται με σταθερό ρυθμό. Ο σταθερός ρυθμός σε γράφημα απεικονίζεται με ευθεία.

Όταν το δοχείο είναι άδειο, το κέντρο μάζας είναι στο μηδέν, ενώ όταν είναι γεμάτο, το κέντρο μάζας είναι στο μέσο, δηλαδή $y_{cm} < H/2$. Αυτές τις συνθήκες ικανοποιεί το γράφημα (Α).

Ασκήσεις

1.



Έστω L το μήκος της ράβδου και $\vec{w}$ το βάρος της. Η ροπή του βάρους και στις τρεις περιπτώσεις είναι ίδια:

$$\tau_w = -w\frac{L}{2} = -(40\ \text{N})(1\ \text{m}) = -40\ \text{N}\cdot\text{m}$$

- Για το 1ο σχήμα έχουμε:

  $$\tau_F = FL = (40\ \text{N})(2\ \text{m}) = 80\ \text{N}\cdot\text{m}$$

  Επομένως:

  $$\Sigma\tau = \tau_w + \tau_F = -40\ \text{N}\cdot\text{m} + 80\ \text{N}\cdot\text{m} = 40\ \text{N}\cdot\text{m}$$

  Άρα, η ολική ροπή έχει μέτρο $40\ \text{N}\cdot\text{m}$, διεύθυνση κάθετη στη σελίδα και φορά από τη σελίδα προς το μάτι μας. Τείνει να περιστρέψει τη ράβδο αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

- Για το 2ο σχήμα αναλύουμε την $\vec{F}$ σε δύο συνιστώσες, την $\vec{F}_x$ κατά μήκος της ράβδου και την $\vec{F}_y$ κάθετη στη ράβδο. Ισχύουν:

$$F_x = F\sigma\upsilon\nu 60^\circ$$

$$F_y = F\eta\mu 60^\circ = F\frac{\sqrt{3}}{2} = (40\ \text{N})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}\ \text{N}$$

Από αυτές, μόνο η $\vec{F}_y$ προκαλεί ροπή ως προς το Ο, οπότε για τη ροπή της $\vec{F}$ έχουμε:

$$\tau_F = \tau_{F_y} = F_y L = (20\sqrt{3}\ \text{N})(2\ \text{m}) = 40\sqrt{3}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Επομένως:

$$\Sigma\tau = \tau_w + \tau_F = -40\ \text{N}\cdot\text{m} + 40\sqrt{3}\ \text{N}\cdot\text{m}$$
$$= 40(\sqrt{3}-1)\ \text{N}\cdot\text{m} = 29{,}3\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Άρα, η ολική ροπή έχει μέτρο $29{,}3\ \text{N}\cdot\text{m}$, διεύθυνση κάθετη στη σελίδα και φορά από τη σελίδα προς το μάτι μας. Τείνει να περιστρέψει τη ράβδο αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

- Για το 3ο σχήμα παρατηρούμε ότι φορέας της $\vec{F}$ διέρχεται από το σημείο περιστροφής, δηλαδή η απόσταση του φορέα της δύναμης από το σημείο περιστροφής είναι μηδενική. Συνεπώς, η $\vec{F}$ δεν μπορεί να περιστρέψει το σώμα. Ισχύει:

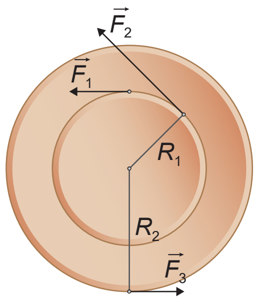
$$\tau_F = F\cdot 0 = 0\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Επομένως:

$$\Sigma\tau = \tau_w + \tau_F = -40\ \text{N}\cdot\text{m} + 0\ \text{N}\cdot\text{m} = -40\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Άρα, η ολική ροπή έχει μέτρο $40\ \text{N}\cdot\text{m}$, διεύθυνση κάθετη στη σελίδα και φορά από το μάτι μας προς τη σελίδα. Τείνει να περιστρέψει τη ράβδο κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

2. Οι ακτίνες είναι $R_1 = 6\ \text{cm} = 6\cdot10^{-2}\ \text{m}$ και $R_2 = 8\ \text{cm} = 8\cdot10^{-2}\ \text{m}$.



α) Ζεύγος δυνάμεων αποτελούν οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_3$, διότι ασκούνται σε δύο διαφορετικά σημεία του σώματος και είναι αντίθετες. Η ροπή $\vec{\tau}$ του ζεύγους έχει διεύθυνση την ευθεία που είναι κάθετη στη σελίδα, φορά από τη σελίδα προς το μάτι μας και μέτρο το γινόμενο του μέτρου της μίας από τις δύο δυνάμεις επί την απόσταση των φορέων τους. Έχουμε:

$$\tau = F_1(R_1 + R_2)$$
$$= (12\ \text{N})(6\cdot10^{-2}\ \text{m} + 8\cdot10^{-2}\ \text{m}) = 1{,}68\ \text{N}\cdot\text{m}$$

β) Η ροπή $\vec{\tau}$ του ζεύγους των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_3$ είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους. Η ροπή της $\vec{F}_2$ ως προς το κέντρο της τροχαλίας είναι:

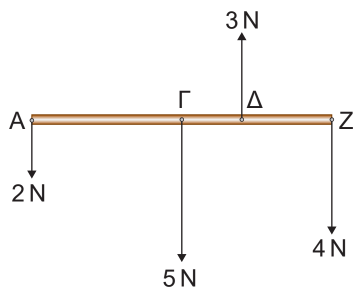
$$\tau_2 = F_2 R_1 = (24\ \text{N})(6\cdot10^{-2}\ \text{m}) = 1{,}44\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Η συνολική ροπή που ασκείται στη διπλή τροχαλία ως προς το κέντρο της έχει διεύθυνση την ευθεία που είναι κάθετη στη σελίδα, φορά από τη σελίδα προς το μάτι μας και μέτρο:

$$\Sigma\tau = \tau + \tau_2 = 1{,}68\ \text{N}\cdot\text{m} + 1{,}44\ \text{N}\cdot\text{m} = 3{,}12\ \text{N}\cdot\text{m}$$

3. Οι αποστάσεις είναι:

$$(\text{ΑΓ}) = 50\ \text{cm} = 50\cdot10^{-2}\ \text{m} = 0{,}5\ \text{m}$$
$$(\text{ΑΔ}) = 70\ \text{cm} = 70\cdot10^{-2}\ \text{m} = 0{,}7\ \text{m}$$
$$(\text{ΑΖ}) = 100\ \text{cm} = 100\cdot10^{-2}\ \text{m} = 1\ \text{m}$$



Ονομάζουμε τις δυνάμεις $F_1 = 2\ \text{N}$, $F_2 = 5\ \text{N}$, $F_3 = 3\ \text{N}$, $F_4 = 4\ \text{N}$ και ορίζουμε ως θετική τη φορά της δύναμης $\vec{F}_1$.

Για τη συνισταμένη δύναμη ισχύει:

$$\Sigma F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$
$$= 2\ \text{N} + 5\ \text{N} + (-3\ \text{N}) + 4\ \text{N} = 8\ \text{N}$$

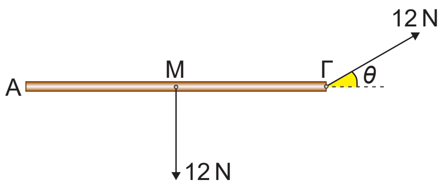
Για τη συνισταμένη ροπή ως προς το σημείο Α ισχύει:

$$\begin{aligned}\Sigma\tau &= \tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4\\ &= -F_1\cdot 0 - F_2(\mathrm{A\Gamma}) + F_3(\mathrm{A\Delta}) - F_4(\mathrm{AZ})\\ &= -(5\ \mathrm{N})(0{,}5\ \mathrm{m}) + (3\ \mathrm{N})(0{,}7\ \mathrm{m}) - (4\ \mathrm{N})(1\ \mathrm{m})\\ &= -4{,}4\ \mathrm{N{\cdot}m}\end{aligned}$$

Η συνισταμένη δύναμη με μέτρο $8\ \mathrm{N}$ και φορά αυτήν της $\vec{F}_1$, η οποία θα προκαλέσει ροπή $\tau_{\Sigma F}$ ίδια με τη συνολική ροπή $\Sigma\tau$ των δυνάμεων ως προς το Α, πρέπει να βρίσκεται σε απόσταση x από το Α και να ισχύει $\tau_{\Sigma F} = -\Sigma F\cdot x$. Επομένως:

$$x = -\frac{\tau_{\Sigma F}}{\Sigma F} = -\frac{-4{,}4\ \mathrm{N{\cdot}m}}{8\ \mathrm{N}} = 0{,}55\ \mathrm{m} = 55\ \mathrm{cm}$$

4.



Ονομάζουμε $\vec{F}_1$ τη δύναμη με σημείο εφαρμογής το Μ και $\vec{F}_2$ τη δύναμη με σημείο εφαρμογής το Γ. Έστω L το μήκος της ράβδου. Ισχύουν:

$$(\mathrm{A\Gamma}) = L \ \text{ και } \ (\mathrm{AM}) = \frac{L}{2}$$

Η ροπή της $\vec{F}_1$ ως προς το Α είναι:

$$\tau_1 = -F_1(\mathrm{AM}) = -F_1\frac{L}{2}$$

Για να βρούμε τη ροπή της $\vec{F}_2$, αναλύουμε τη δύναμη σε δύο συνιστώσες, την $\vec{F}_{2x}$ κατά μήκος της ράβδου και την $\vec{F}_{2y}$ κάθετη στη ράβδο. Ισχύουν:

$$F_{2x} = F_2\,\text{συν}\theta \ \text{ και } \ F_{2y} = F_2\,\text{ημ}\theta$$

Μόνο η συνιστώσα $\vec{F}_{2y}$ προκαλεί ροπή ως προς το Α, οπότε για τη ροπή της $\vec{F}_2$ έχουμε:

$$\tau_2 = \tau_{F_{2x}} + \tau_{F_{2y}} = 0 + \tau_{F_{2y}} = F_{2y}(\mathrm{A\Gamma}) = F_2\,\text{ημ}\theta\cdot L$$

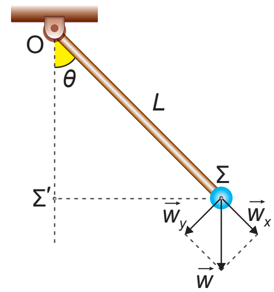
Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς το Α είναι μηδέν. Επομένως:

$$\Sigma\tau = 0 \ \text{ ή } \ \tau_1+\tau_2 = 0$$

$$\text{ή } -F_1\frac{L}{2} + F_2\,\text{ημ}\theta\cdot L = 0 \ \text{ ή } \ \text{ημ}\theta = \frac{F_1}{2F_2}$$

Είναι $F_1 = F_2 = 12\ \mathrm{N}$, οπότε προκύπτει $\text{ημ}\theta = 1/2$ και βρίσκουμε $\theta = 30°$.

5. **α)** Έστω Σ′ η προβολή του Σ στην κατακόρυφο που διέρχεται από το Ο. Ο φορέας του βάρους βρίσκεται σε απόσταση (ΣΣ′) από το Ο. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΣΣ′ έχουμε:



$$\text{ημ}\theta = \frac{(\Sigma\Sigma')}{L} \ \text{ ή } \ (\Sigma\Sigma') = L\,\text{ημ}\theta$$

Η ροπή του βάρους ως προς το Ο είναι:

$$\begin{aligned}\tau &= -w(\Sigma\Sigma') = -wL\,\text{ημ}\theta\\ &= -(3\ \mathrm{N})(1\ \mathrm{m})\text{ημ}\theta = -3\,\text{ημ}\theta\ \mathrm{N{\cdot}m}\end{aligned}$$

Άρα, το μέτρο της ροπής του βάρους ως προς το Ο είναι:

$$\tau = 3\,\text{ημ}\theta\ \mathrm{N{\cdot}m}$$

Εναλλακτικά, για να βρούμε τη ροπή του βάρους, αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες, την $\vec{w}_x$ κατά μήκος της ράβδου και την $\vec{w}_y$ κάθετη στη ράβδο. Ισχύουν:

$$w_x = w\,\text{συν}\theta \ \text{ και } \ w_y = w\,\text{ημ}\theta$$

Μόνο η συνιστώσα $\vec{w}_y$ προκαλεί ροπή ως προς το Ο, οπότε για τη ροπή του βάρους έχουμε:

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_{w_x} + \tau_{w_y} = 0 + \tau_{w_y} = -w_y(\mathrm{O\Sigma}) = -w\,\text{ημ}\theta\cdot L\\ &= -(3\ \mathrm{N})(1\ \mathrm{m})\text{ημ}\theta = -3\,\text{ημ}\theta\ \mathrm{N{\cdot}m}\end{aligned}$$

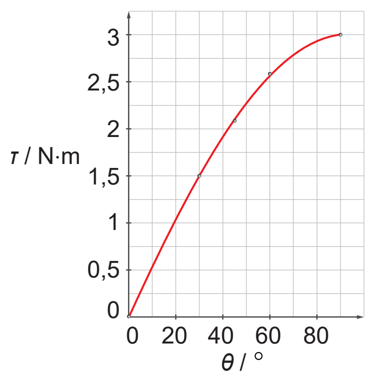
και ξαναβρίσκουμε για το μέτρο της:

$$\tau = 3\,\text{ημ}\theta\ \mathrm{N{\cdot}m}$$

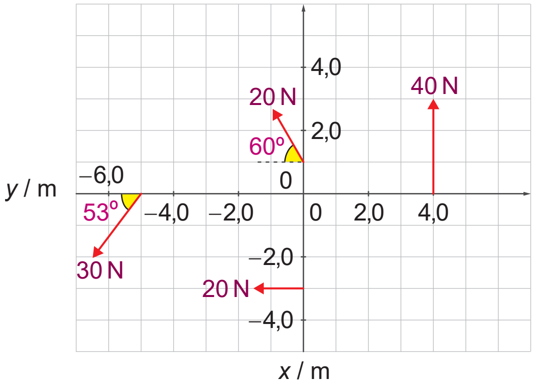
β) Συμπληρώνουμε τον πίνακα.

θ	0°	30°	45°	60°	90°
τ / N·m	0	1,5	2,1	2,6	3

γ) Κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\tau = \mathrm{f}(\theta)$.



6.



Οι δυνάμεις ασκούνται σε διάφορα σημεία μιας πλάκας που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο και είναι κάθετος σε αυτήν. Ονομάζουμε:

- $\vec{F}_1$ τη δύναμη μέτρου $30\ \text{N}$ που σχηματίζει γωνία $53°$ με τον x-άξονα και το σημείο εφαρμογής της απέχει $d_1 = 5\ \text{m}$ από το Ο,
- $\vec{F}_2$ τη δύναμη μέτρου $20\ \text{N}$ που είναι κάθετη στον y-άξονα και το σημείο εφαρμογής της απέχει $d_2 = 3\ \text{m}$ από το Ο,
- $\vec{F}_3$ την άλλη δύναμη μέτρου $20\ \text{N}$ που το σημείο εφαρμογής της απέχει $d_3 = 1\ \text{m}$ από το Ο,
- $\vec{F}_4$ τη δύναμη μέτρου $40\ \text{N}$ με σημείο εφαρμογής που απέχει $d_4 = 4\ \text{m}$ από το Ο.

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τη ροπή κάθε δύναμης ως προς το Ο.

Ροπή της $\vec{F}_1$

Αναλύουμε την $\vec{F}_1$ σε δύο συνιστώσες. Ισχύουν:

$$F_{1x} = F_1 \text{συν}53° \quad \text{και} \quad F_{1y} = F_1 \text{ημ}53°$$

Μόνο η συνιστώσα $\vec{F}_{1y}$ προκαλεί ροπή ως προς το Ο, οπότε για τη ροπή της $\vec{F}_1$ έχουμε:

$$\tau_{F_1} = \tau_{F_{1x}} + \tau_{F_{1y}} = 0 + \tau_{F_{1y}} = F_{1y} d_1 = F_1 \text{ημ}53° \cdot d_1$$
$$= (30\ \text{N})(0{,}80)(5\ \text{m}) = 120\ \text{N·m}$$

Η ροπή της $\vec{F}_1$ ως προς το Ο έχει μέτρο $120\ \text{N·m}$, διεύθυνση την ευθεία που είναι κάθετη στη σελίδα και φορά από τη σελίδα προς το μάτι μας. Η φορά περιστροφής είναι αντίθετη από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Ροπή της $\vec{F}_2$

Έχουμε:

$$\tau_{F_2} = F_2 d_2 = -(20\ \text{N})(3\ \text{m}) = -60\ \text{N·m}$$

Η ροπή της $\vec{F}_2$ ως προς το Ο έχει μέτρο $60\ \text{N·m}$, διεύθυνση την ευθεία που είναι κάθετη στη σελίδα και φορά από το μάτι μας προς τη σελίδα. Η φορά περιστροφής είναι ίδια με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Ροπή της $\vec{F}_3$

Αναλύουμε την $\vec{F}_3$ σε δύο συνιστώσες. Ισχύουν:

$$F_{3x} = F_3 \text{συν}60° \quad \text{και} \quad F_{3y} = F_3 \text{ημ}60°$$

Μόνο η συνιστώσα $\vec{F}_{3x}$ προκαλεί ροπή ως προς το Ο, οπότε για τη ροπή της $\vec{F}_3$ έχουμε:

$$\tau_{F_3} = \tau_{F_{3x}} + \tau_{F_{3y}} = \tau_{F_{3x}} + 0 = F_{3x} d_3 = F_3 \text{συν}60° \cdot d_3$$
$$= (20\ \text{N})(0{,}5)(1\ \text{m}) = 10\ \text{N·m}$$

Η ροπή της $\vec{F}_3$ ως προς το Ο έχει μέτρο $10\ \text{N·m}$, διεύθυνση την ευθεία που είναι κάθετη στη σελίδα και φορά από τη σελίδα προς το μάτι μας. Η φορά περιστροφής είναι αντίθετη από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

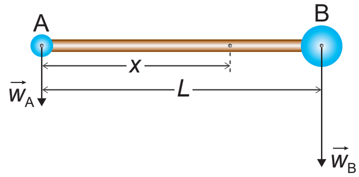
Ροπή της $\vec{F}_4$

Έχουμε:

$$\tau_{F_4} = F_4 d_4 = (40\ \text{N})(4\ \text{m}) = 160\ \text{N·m}$$

Η ροπή της $\vec{F}_4$ ως προς το Ο έχει μέτρο $160\ \text{N·m}$, διεύθυνση την ευθεία που είναι κάθετη στη σελίδα και φορά από τη σελίδα προς το μάτι μας. Η φορά περιστροφής είναι αντίθετη από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

7.



Το μήκος L της ράβδου είναι:

$$L = 120\ \text{cm} = 120 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 1{,}2\ \text{m}$$

Γνωρίζουμε ότι, αν ένα σώμα στηριχθεί στην κατακόρυφο που διέρχεται από το κέντρο βάρους του, θα ισορροπήσει. Αναζητούμε ένα σημείο ως προς το οποίο μηδενίζεται η ροπή των βαρών των σφαιρών Α, Β. Έστω ότι το σημείο αυτό απέχει x από το Α, οπότε από το Β απέχει $L - x$. Ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \vec{\tau}_{w_A} + \vec{\tau}_{w_B} = \vec{0}$$

η οποία γράφεται αλγεβρικά:

$$w_A x - w_B(L-x) = 0 \text{ ή } w_A x - 2w_A(L-x) = 0$$
$$\text{ή } x = 2(L-x)$$
$$\text{ή } x = 2L - 2x$$
$$\text{ή } x = 2L/3$$

Άρα, το κέντρο μάζας βρίσκεται πάνω στη ράβδο σε απόσταση $2L/3$ από το άκρο Α.

Για $L = 1{,}2$ m έχουμε:

$$x = \frac{2}{3}\cdot 1{,}2\text{ m} = 0{,}8\text{ m}$$

1.5 Νόμος Παγκόσμιας Έλξης

Ερωτήσεις

1. Ο ακριβής χαρακτηρισμός του δοκαριού θα ήταν «κατακόρυφο δοκάρι». Ο χαρακτηρισμός «κάθετο δοκάρι» είναι αδόκιμος, αφού δεν ορίζεται κάποια ευθεία αναφοράς στα λεγόμενα του εκφωνητή, ως προς την οποία το δοκάρι να είναι κάθετο.

2. Ας υποθέσουμε ότι οι δύο συμμαθητές έχουν μεγάλη μάζα, 100 κιλά έκαστος, και βρίσκονται δίπλα-δίπλα, ώστε τα κέντρα μάζας τους να απέχουν $0{,}5$ m. Από τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης για $m_1 = m_2 = 100$ kg και $r = 0{,}5$ m έχουμε:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \left(6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\right)\frac{(100\text{ kg})(100\text{ kg})}{(0{,}5\text{ m})^2}$$
$$= 1{,}67\cdot 10^{-7}\text{ N} \approx 0{,}2\cdot 10^{-6}\text{ N}$$

Άρα, ο ένας μαθητής έλκει τον άλλον με δύναμη μικρότερη από 0,2 εκατομμυριοστά του newton, ακόμη και αν είναι τόσο κοντά μεταξύ τους και τόσο μεγαλόσωμοι.

3. Ο όγκος σφαίρας ακτίνας R δίνεται από τη σχέση:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Η μάζα ενός σφαιρικού σώματος πυκνότητας d και όγκου V είναι:

$$m = dV = \frac{4}{3}\pi R^3 d$$

Οι πλανήτες Α και Β έχουν την ίδια πυκνότητα και την ίδια ακτίνα, οπότε θα έχουν την ίδια μάζα, δηλαδή $m_A = m_B$.

Έστω m η μάζα του διαστημικού οχήματος.

Σύμφωνα με τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης το διαστημικό όχημα δέχεται στον πλανήτη Α δύναμη:

$$F_A = G\frac{m_A m}{R_A^2} \quad (1)$$

και στον πλανήτη Β δύναμη:

$$F_B = G\frac{m_B m}{R_B^2} \quad (2)$$

Επειδή $m_A = m_B$ και $R_A = R_B$, συμπεραίνουμε ότι $F_A = F_B$, δηλαδή το διαστημικό όχημα δέχεται ίδια δύναμη στους δύο πλανήτες.

Εναλλακτικά, διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{G\dfrac{m_A m}{R_A^2}}{G\dfrac{m_B m}{R_B^2}} = \frac{m_A}{m_B}\frac{R_B^2}{R_A^2}$$

Επειδή $m_A = m_B$ και $R_A = R_B$, βρίσκουμε:

$$\frac{F_A}{F_B} = 1 \text{ ή } F_A = F_B$$

4. Έστω m η μάζα μας, $M_Γ$ η μάζα της Γης και $R_Γ$ η ακτίνα της.

Σύμφωνα με τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης το βάρος μας στην επιφάνεια της Γης δίνεται από τη σχέση:

$$w = G\frac{M_Γ m}{R_Γ^2} \quad (1)$$

ενώ σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης δίνεται από τη σχέση:

$$w_h = G\frac{M_Γ m}{(R_Γ + h)^2} \quad (2)$$

Διαιρώντας τις (1), (2) κατά μέλη και απαιτώντας το βάρος μας να υποδιπλασιάζεται σε ύψος h έχουμε:

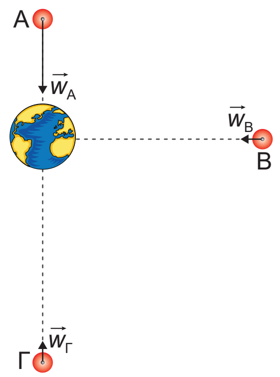
$$\frac{w}{w_h} = \frac{G\dfrac{M_Γ m}{R_Γ^2}}{G\dfrac{M_Γ m}{(R_Γ+h)^2}} \text{ ή } \frac{w}{\dfrac{w}{2}} = \frac{(R_Γ+h)^2}{R_Γ^2}$$
$$\text{ή } 2R_Γ^2 = (R_Γ + h)^2$$
$$\text{ή } \sqrt{2}R_Γ = \pm(R_Γ + h)$$

Η εξίσωση $\sqrt{2}R_\Gamma = +(R_\Gamma + h)$ γράφεται:

$$\sqrt{2}R_\Gamma - R_\Gamma = h \text{ ή } h = (\sqrt{2}-1)R_\Gamma = 0{,}4R_\Gamma$$

Η εξίσωση $\sqrt{2}R_\Gamma = -(R_\Gamma + h)$ δεν έχει φυσικό νόημα, αφού οι αποστάσεις είναι θετικοί αριθμοί.

5.



Δίνονται:

$$m_A = m_B = m_\Gamma = m \text{ και } r_A = r,\; r_B = r_\Gamma = 2r$$

Από τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης ισχύουν:

$$w_A = G\frac{M_\Gamma m_A}{r_A^2} = G\frac{M_\Gamma m}{r^2}$$

$$w_B = G\frac{M_\Gamma m_B}{r_B^2} = G\frac{M_\Gamma m}{(2r)^2} = \frac{1}{4}G\frac{M_\Gamma m}{r^2} = \frac{1}{4}w_A$$

$$w_\Gamma = G\frac{M_\Gamma m_\Gamma}{r_\Gamma^2} = G\frac{M_\Gamma m}{(2r)^2} = \frac{1}{4}G\frac{M_\Gamma m}{r^2} = \frac{1}{4}w_A$$

Άρα:

$$w_B = w_\Gamma = \frac{1}{4}w_A$$

Ασκήσεις

1. Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης.

α) Το βάρος του θαλαμίσκου στη Σελήνη είναι:

$$w_\Sigma = G\frac{M_\Sigma m}{R_\Sigma^2}$$

$$= \left(6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\right)\frac{(7{,}35\cdot 10^{22}\text{ kg})(100\text{ kg})}{(1{,}74\cdot 10^6\text{ m})^2}$$

$$= 162\text{ N}$$

β) Το βάρος του θαλαμίσκου στον Άρη είναι:

$$w_A = G\frac{M_A m}{R_A^2}$$

$$= \left(6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\right)\frac{(0{,}642\cdot 10^{24}\text{ kg})(100\text{ kg})}{(3{,}40\cdot 10^6\text{ m})^2}$$

$$= 370\text{ N}$$

2. α) Η απόσταση Γης-Ηλίου είναι:

$$r_{\Gamma,H} = 1\text{ AU} = 1{,}5\cdot 10^{11}\text{ m}$$

Από τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης έχουμε:

$$F_{\Gamma,H} = G\frac{M_\Gamma M_H}{r_{\Gamma,H}^2}$$

$$= \left(6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\right)\frac{(5{,}97\cdot 10^{24}\text{ kg})(1{,}99\cdot 10^{30}\text{ kg})}{(1{,}5\cdot 10^{11}\text{ m})^2}$$

$$= 3{,}52\cdot 10^{22}\text{ N}$$

β) Για να βρούμε τη ζητούμενη απόσταση θα αφαιρέσουμε τις αποστάσεις Δία και Άρη που αναγράφονται στον πίνακα.

$$r_{A,\Delta} = r_{\Delta,H} - r_{A,H} = (5{,}20 - 1{,}52)\text{ AU}$$

$$= 3{,}68\text{ AU} = 3{,}68\cdot(1{,}5\cdot 10^{11}\text{ m}) = 5{,}52\cdot 10^{11}\text{ m}$$

Από τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης έχουμε:

$$F_{A,\Delta} = G\frac{M_A M_\Delta}{r_{A,\Delta}^2}$$

$$= \left(6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\right)\frac{(0{,}642\cdot 10^{24}\text{ kg})(19{,}0\cdot 10^{26}\text{ kg})}{(5{,}52\cdot 10^{11}\text{ m})^2}$$

$$= 2{,}67\cdot 10^{17}\text{ N}$$

3. Από τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης έχουμε:

$$w = G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma^2} \text{ ή } M_\Gamma = \frac{wR_\Gamma^2}{Gm}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$\text{M}_\Gamma = \frac{(686\text{ N})(6.380\cdot 10^3\text{ m})^2}{\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\right)(70\text{ kg})} = 5{,}98\cdot 10^{24}\text{ kg}$$

4. Η μάζα ενός σφαιρικού σώματος πυκνότητας d, όγκου V και ακτίνας R είναι:

$$m = dV = \frac{4}{3}\pi R^3 d$$

Οι πλανήτες Α και Β έχουν την ίδια ακτίνα R και επειδή επιπλέον $d_A = 2d_B$, για τις μάζες τους θα ισχύει:

$$m_A = 2m_B$$

Έστω m η μάζα των διαστημικών οχημάτων.

Σύμφωνα με τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης το βάρος του διαστημικού οχήματος στον πλανήτη Α είναι:

$$w_A = G\frac{m_A m}{R^2} \quad (1)$$

και στον πλανήτη Β είναι:

$$w_B = G\frac{m_B m}{R^2} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{w_A}{w_B} = \frac{G\frac{m_A m}{R^2}}{G\frac{m_B m}{R^2}} = \frac{m_A}{m_B} = \frac{2m_B}{m_B} = 2$$

Άρα $w_A = 2w_B$.

5. Έστω m η μάζα του πυραύλου και x η απόσταση από τη Γη του σημείου όπου μηδενίζεται η συνολική βαρυτική έλξη. Η απόσταση του εν λόγω σημείου από τη Σελήνη θα είναι $r = 60R_\Gamma - x$.

Για τις βαρυτικές δυνάμεις $\vec{F}_\Gamma$, $\vec{F}_\Sigma$ που δέχεται ο πύραυλος από τη Γη και τη Σελήνη αντίστοιχα ισχύει:

$$F_\Gamma = F_\Sigma \text{ ή } G\frac{M_\Gamma m}{x^2} = G\frac{M_\Sigma m}{r^2}$$

$$\text{ή } \frac{81M_\Sigma}{x^2} = \frac{M_\Sigma}{(60R_\Gamma - x)^2}$$

$$\text{ή } \frac{81}{x^2} = \frac{1}{(60R_\Gamma - x)^2}$$

$$\text{ή } \left[9(60R_\Gamma - x)\right]^2 = x^2$$

$$\text{ή } x = \pm\left[9(60R_\Gamma - x)\right]$$

Η εξίσωση $x = +\left[9(60R_\Gamma - x)\right]$ γράφεται:

$$x = 540R_\Gamma - 9x \text{ ή } x + 9x = 540R_\Gamma \text{ ή } 10x = 540R_\Gamma \text{ ή } x = 54R_\Gamma$$

Η εξίσωση $x = -\left[9(60R_\Gamma - x)\right]$ γράφεται:

$$x = -540R_\Gamma + 9x \text{ ή } x - 9x = -540R_\Gamma \text{ ή } -8x = -540R_\Gamma \text{ ή } x = 67{,}5R_\Gamma$$

που είναι άτοπο, διότι $x > 60R_\Gamma$, οπότε το σημείο δεν είναι μεταξύ της Γης και της Σελήνης.

Άρα, το σημείο όπου μηδενίζεται η συνισταμένη βαρυτική δύναμη απέχει $54R_\Gamma$ από το κέντρο της Γης και $60R_\Gamma - 54R_\Gamma = 6R_\Gamma$ από το κέντρο της Σελήνης.

Προβλήματα

1. Αν οι κλίσεις σε δύο γραφήματα F-x ή x-F είναι ίσες, τότε τα δύο ελατήρια έχουν την ίδια σταθερά ελατηρίου, εφόσον οι άξονες του γραφήματος έχουν *ίδια διαστήματα αρίθμησης*. Επειδή οι άξονες των δύο γραφημάτων του προβλήματος έχουν διαφορετικά διαστήματα αρίθμησης, τα δύο ελατήρια δεν έχουν την ίδια σταθερά ελατηρίου.

Για το 1ο γράφημα έχουμε:

$$k_1 = \varepsilon\varphi\omega = \frac{10\ \text{N}}{5\ \text{cm}} = 2\ \text{N/cm}$$

Για το 2ο γράφημα έχουμε:

$$k_2 = \varepsilon\varphi\omega = \frac{20\ \text{N}}{4\ \text{cm}} = 5\ \text{N/cm}$$

Πράγματι, διαπιστώνουμε ότι $k_1 \neq k_2$.

2. α) Η διατύπωση του Hooke ισοδυναμεί με το συμπέρασμα ότι η *παραμόρφωση* x ενός ελατηρίου είναι *ανάλογη* της *εφαρμοζόμενης δύναμης* F. Παρατηρούμε ότι το γράφημα μήκος ελατηρίου-δύναμη είναι ευθεία (η επιμήκυνση είναι ανάλογη της δύναμης) για μήκος ελατηρίου από 3 cm έως 16 cm.

β) Θα μπορούσε να δοκιμάσει το ελατήριο και στην έκταση, αλλά πιθανότατα είναι ευκολότερος ο πειραματισμός κατά τη συμπίεση. Επίσης, θεωρεί ότι το πείραμα είναι καλό να αναπαράγει τη χρήση του ελατηρίου σύμφωνα με την κατασκευή του (στο στρώμα τα ελατήρια κατασκευάζονται με σκοπό να συμπιέζονται).

γ) Όταν το μήκος του ελατηρίου είναι 1 cm, το ελατήριο όχι μόνο έχει χάσει την ικανότητά του για ελαστική παραμόρφωση, αλλά δεν παραμορφώνεται καθόλου. Το ελατήριο έχει φτάσει στη μέγιστη συσπείρωση, γιατί οι σπείρες εφάπτονται. Παρατηρούμε ότι το μήκος του ελατηρίου παραμένει συνεχώς 1 cm για τιμές δύναμης μεγαλύτερες από 50 N.

δ) Η δύναμη των $300\ \text{N}$ που ασκεί η θήκη στο στρώμα μοιράζεται εξίσου στα 60 ελατήρια. Στο κάθε ελατήριο αντιστοιχεί δύναμη:

$$F = \frac{300\ \text{N}}{60} = 5\ \text{N}$$

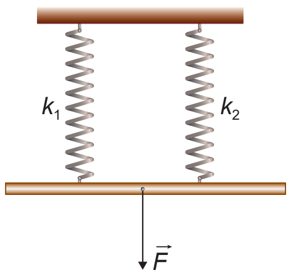
Από το γράφημα, διαπιστώνουμε ότι:

- για τιμή δύναμη $5\ \text{N}$ το μήκος του ελατηρίου είναι $14\ \text{cm}$,
- για τιμή δύναμης $0\ \text{N}$ το μήκος του ελατηρίου είναι $16\ \text{cm}$ (φυσικό μήκος).

Άρα, η παραμόρφωση κάθε ελατηρίου που αντιστοιχεί σε δύναμη 5 N, είναι:

$$16\ \text{cm} - 14\ \text{cm} = 2\ \text{cm}$$

3.



α) Η επιμήκυνση κάθε ελατηρίου είναι:

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 = 6\ \text{cm} = 6 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

Επομένως:

$$F_{\varepsilon\lambda,1} = k_1 \Delta L_1 = (100\ \text{N/m})(6 \cdot 10^{-2}\ \text{m}) = 6\ \text{N}$$

$$F_{\varepsilon\lambda,2} = k_2 \Delta L_2 = (200\ \text{N/m})(6 \cdot 10^{-2}\ \text{m}) = 12\ \text{N}$$

β) Η ράβδος ισορροπεί, οπότε από τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \ \text{ ή } \ \vec{F} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda,1} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda,2} = \vec{0} \ \text{ ή } \ -\vec{F} = \vec{F}_{\varepsilon\lambda,1} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda,2}$$

η οποία γράφεται αλγεβρικά:

$$-(-F) = F_{\varepsilon\lambda,1} + F_{\varepsilon\lambda,2} \ \text{ ή } \ F = F_{\varepsilon\lambda,1} + F_{\varepsilon\lambda,2}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$F = 6\ \text{N} + 12\ \text{N} = 18\ \text{N}$$

γ) Η σταθερά k ενός ελατηρίου, το οποίο επιμηκύνεται κατά 6 cm όταν του ασκηθεί δύναμη 18 N, υπολογίζεται από τον Νόμο του Hooke.

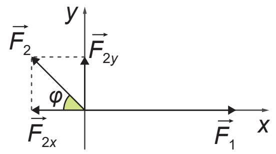
$$k = \frac{F_{\varepsilon\lambda}}{\Delta L} = \frac{18\ \text{N}}{6 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 300\ \text{N/m}$$

Παρατηρούμε πως η σταθερά ενός ελατηρίου που μπορεί να αντικαταστήσει τα δύο *παράλληλα ελατήρια* ισούται με το άθροισμα των σταθερών των παράλληλων ελατηρίων.

Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να γενικευτεί. Θα υπολογίσουμε τη σταθερά ενός ελατηρίου το οποίο αντικαθιστά δύο παράλληλα ελατήρια, ενώ έχει την ίδια επιμήκυνση με αυτά. Έχουμε:

$$F_{\varepsilon\lambda} = F_{\varepsilon\lambda,1} + F_{\varepsilon\lambda,2} \ \text{ ή } \ k\Delta L = k_1 \Delta L + k_2 \Delta L$$
$$\text{ή } \ k\Delta L = (k_1 + k_2)\Delta L$$
$$\text{ή } \ k = k_1 + k_2$$

4. Ονομάζουμε $\vec{F}_1$ τη δύναμη μέτρου $200\ \text{N}$ και $\vec{F}_2$ τη δύναμη μέτρου $100\ \text{N}$. Επιλέγουμε ένα σύστημα αξόνων έτσι, ώστε η $\vec{F}_1$ να βρίσκεται πάνω στον *x*-άξονα και η $\vec{F}_2$ σε γωνία $120°$ κατά την αντίθετη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.



Προφανώς είναι $\varphi = 180° - 120° = 60°$.

Αναλύουμε την $\vec{F}_2$ σε δύο συνιστώσες $\vec{F}_{2x}$ και $\vec{F}_{2y}$, για τις οποίες ισχύουν:

$$F_{2x} = F_2 \text{συν}\varphi \ \text{ και } \ F_{2y} = F_2 \text{ημ}\varphi$$

Έχουμε:

$$\Sigma F_x = F_1 - F_{2x} = F_1 - F_2 \text{συν}\varphi$$
$$= 200\ \text{N} - (100\ \text{N}) \cdot \frac{1}{2} = 150\ \text{N}$$

$$\Sigma F_y = F_{2y} = F_2 \text{ημ}\varphi = (100\ \text{N}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\ \text{N}$$

Επομένως:

$$\Sigma F = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} = \sqrt{(150\ \text{N})^2 + \left(50\sqrt{3}\ \text{N}\right)^2}$$
$$= \sqrt{(50 \cdot 3)^2 + \left(50\sqrt{3}\right)^2}\ \text{N} = \sqrt{50^2\left(3^2 + \sqrt{3}^2\right)}\ \text{N}$$
$$= 50\sqrt{12}\ \text{N} = 50\sqrt{2^2 \cdot 3}\ \text{N} = 100\sqrt{3}\ \text{N}$$

Για τη γωνία θ που σχηματίζει η συνισταμένη δύναμη με τον *x*-άξονα ισχύει:

$$\text{εφ}\theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = \frac{50\sqrt{3}\ \text{N}}{150\ \text{N}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

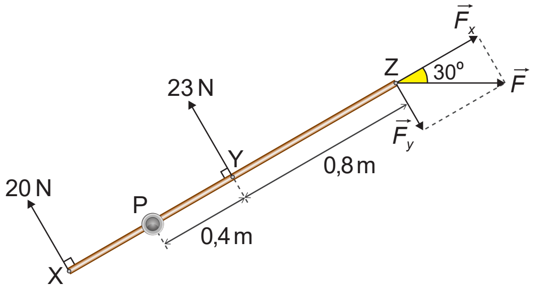
που αντιστοιχεί σε γωνία $\theta = 30°$.

Η γωνία που σχηματίζει η συνισταμένη δύναμη $\Sigma\vec{F}$ με τη δύναμη $\vec{F}_2$ είναι $120° - 30° = 90°$.

Άρα, η $\Sigma\vec{F}$ είναι κάθετη στην $\vec{F}_2$.

5. Ισχύουν:

$$(\mathrm{XP}) = (\mathrm{XZ}) - (\mathrm{PY}) - (\mathrm{YZ})$$
$$= 1{,}6\ \mathrm{m} - 0{,}4\ \mathrm{m} - 0{,}8\ \mathrm{m} = 0{,}4\ \mathrm{m}$$
$$(\mathrm{PZ}) = (\mathrm{PY}) + (\mathrm{YZ}) = 0{,}4\ \mathrm{m} + 0{,}8\ \mathrm{m} = 1{,}2\ \mathrm{m}$$



Ονομάζουμε:

- $\vec{F}_1$ τη δύναμη μέτρου 20 N και $\vec{\tau}_1$ τη ροπή που προκαλεί,
- $\vec{F}_2$ τη δύναμη μέτρου 23 N και $\vec{\tau}_2$ τη ροπή που προκαλεί,
- $\vec{\tau}$ τη ροπή που προκαλεί η $\vec{F}$.

Για να βρούμε τη ροπή της δύναμης $\vec{F}$, αναλύουμε τη δύναμη σε δύο συνιστώσες, την $\vec{F}_x$ κατά μήκος της ράβδου και την $\vec{F}_y$ κάθετη στη ράβδο. Ισχύουν:

$$F_x = F\text{συν}30^\circ \quad \text{και} \quad F_y = F\text{ημ}30^\circ$$

Μόνο η συνιστώσα $\vec{F}_y$ προκαλεί ροπή ως προς το P, οπότε για τη ροπή της $\vec{F}$ έχουμε:

$$\tau = \tau_{F_x} + \tau_{F_y} = \tau_{F_y} = -F_y(\mathrm{PZ}) = -F\text{ημ}30^\circ\cdot(\mathrm{PZ})$$

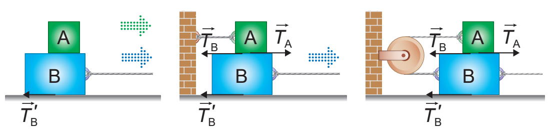
Για τη συνισταμένη ροπή ως προς το P ισχύει:

$$\Sigma\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau = -F_1(\mathrm{XP}) + F_2(\mathrm{PY}) - F\text{ημ}30^\circ\cdot(\mathrm{PZ})$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$-6{,}0\ \mathrm{N\cdot m} = -(20\ \mathrm{N})(0{,}4\ \mathrm{m}) + (23\ \mathrm{N})(0{,}4\ \mathrm{m}) - F\frac{1}{2}\cdot(1{,}2\ \mathrm{m})$$
$$-6{,}0\ \mathrm{N} = -8{,}0\ \mathrm{N} + 9{,}2\ \mathrm{N} - 0{,}6F$$
$$-7{,}2\ \mathrm{N} = -0{,}6F$$
$$F = 12\ \mathrm{N}$$

6.

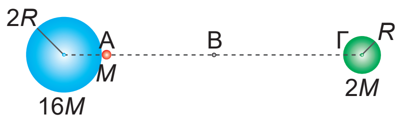


(1) (2) (3)

Σχέση δράσης-αντίδρασης έχει η δύναμη της τριβής που ασκείται από το σώμα A στο σώμα B με τη δύναμη της τριβής που ασκείται από το σώμα B στο σώμα A.

Επίσης, σχέση δράσης-αντίδρασης έχει η δύναμη της τριβής που ασκείται από το σώμα B στο έδαφος και η δύναμη της τριβής που ασκείται από το έδαφος στο σώμα B.

7.



(1) (2)

α) Το σημείο A απέχει από το κέντρο της σφαίρας (1) απόσταση $r_{A,1} = 2R$ και από το κέντρο της σφαίρας (2) απόσταση $r_{A,2} = 12R - 2R = 10R$. Για το μέτρο της συνισταμένης δύναμης στο σώμα μάζας M, όταν βρίσκεται στο A, έχουμε:

$$\Sigma F_A = F_{A,1} - F_{A,2}$$
$$= G\frac{16M\cdot M}{r_{A,1}^2} - G\frac{2M\cdot M}{r_{A,2}^2} = G\frac{16M^2}{(2R)^2} - G\frac{2M^2}{(10R)^2}$$
$$= \left(4 - \frac{1}{50}\right)G\frac{M^2}{R^2} = \frac{199}{50}G\frac{M^2}{R^2}$$

β) Το σημείο B απέχει από το κέντρο της σφαίρας (1) απόσταση $r_{B,1} = 12R/2 = 6R$ και από το κέντρο της σφαίρας (2) απόσταση $r_{B,2} = 12R/2 = 6R$. Για το μέτρο της συνισταμένης δύναμης στο σώμα μάζας M, όταν βρίσκεται στο B, έχουμε:

$$\Sigma F_B = F_{B,1} - F_{B,2}$$
$$= G\frac{16M\cdot M}{r_{B,1}^2} - G\frac{2M\cdot M}{r_{B,2}^2} = G\frac{16M^2}{(6R)^2} - G\frac{2M^2}{(6R)^2}$$
$$= \left(\frac{16}{36} - \frac{2}{36}\right)G\frac{M^2}{R^2} = \frac{7}{18}G\frac{M^2}{R^2}$$

γ) Το σημείο Γ απέχει από το κέντρο της σφαίρας (1) απόσταση $r_{\Gamma,1} = 12R - R = 11R$ και από το κέντρο της σφαίρας (2) απόσταση $r_{\Gamma,2} = R$. Για το μέτρο της συνισταμένης δύναμης στο σώμα μάζας M, όταν βρίσκεται στο Γ, έχουμε:

$$\Sigma F_\Gamma = F_{\Gamma,2} - F_{\Gamma,1}$$
$$= G\frac{2M\cdot M}{r_{\Gamma,2}^2} - G\frac{16M\cdot M}{r_{\Gamma,1}^2} = G\frac{2M^2}{R^2} - G\frac{16M^2}{(11R)^2}$$
$$= \left(2 - \frac{16}{121}\right)G\frac{M^2}{R^2} = \frac{226}{121}G\frac{M^2}{R^2}$$

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Από τη δύναμη στην κίνηση

2.1 Κινηματικά φυσικά μεγέθη

Ερωτήσεις

1. **α)** Η αθλήτρια εκτελεί περιστροφική κίνηση. Ισχύουν $v_A < v_B$, $v_{άξ} = 0$.

β) Η σκιέρ εκτελεί μεταφορική κίνηση. Ισχύει $v_A = v_B = v_Γ$.

2. **α)** Ένας παρατηρητής στο αερόστατο βλέπει το μήλο να πέφτει κατακόρυφα.

β) Ένας παρατηρητής στο έδαφος βλέπει το μήλο αρχικά να ανεβαίνει κατακόρυφα και στη συνέχεια να πέφτει ελεύθερα.

3. **α)** Ο καθήμενος επιβάτης βλέπει το τρένο να είναι ακίνητο και το περιβάλλον έξω από το τρένο να κινείται με ταχύτητα $602\ km/h$.

β) Ο παρατηρητής στο έδαφος βλέπει το τρένο να εκτελεί ΕΟΚ με ταχύτητα $602\ km/h$.

4. Η ένδειξη του χιλιομετρητή ήταν μεγαλύτερη από τη μετατόπιση, διότι η διαδρομή του λεωφορείου δεν ήταν ευθύγραμμη. Ο χιλιομετρητής μετρά το μήκος της διαδρομής (διάστημα) που διανύει ένα όχημα.

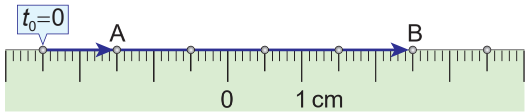
5. Για τα διαστήματα ισχύει $s_{400} > s_{100}$. Για τις μετατοπίσεις ισχύει $Δx_{100} > Δx_{400}$ (είναι $Δx_{400} = 0$).

6. Συμπληρωμένος πίνακας.

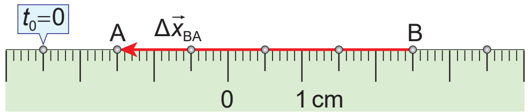
Σημείο	x / m		Δx / m	s / m
Α	44	Α→Β	26	26
Β	70	Β→Α	–26	26
Γ	22	Α→Γ	–22	22
		Α→Β→Γ	–22	74

7. **α)** $t_A = 0{,}01\ s$, $t_B = 0{,}05\ s$, $Δt = 0{,}04\ s$

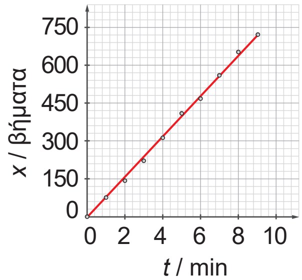
β) $x_A = -1{,}5\ cm$, $x_B = 2{,}5\ cm$



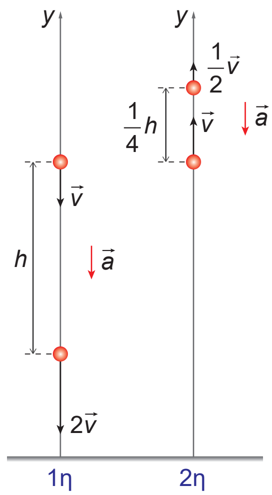
γ) $Δx_{BA} = x_A - x_B = (-1{,}5\ cm) - (2{,}5\ cm) = -4\ cm$



8. Γραφική παράσταση θέσης-χρόνου.



9. **α)** 1η και 2η ρίψη.



β) Για τις μέσες επιταχύνσεις έχουμε:

$$a_{μ1} = \frac{|Δv|}{Δt} = \frac{v}{Δt} \quad \text{και} \quad a_{μ2} = \frac{|Δv|}{Δt} = \frac{v/2}{Δt/2} = \frac{v}{Δt}$$

Άρα $a_{μ1} = a_{μ2}$. Για τις μέσες ταχύτητες έχουμε:

$$v_{μ1} = \frac{h}{Δt} \quad \text{και} \quad v_{μ2} = \frac{h/4}{Δt/2} = \frac{h}{2Δt}$$

Άρα $v_{μ1} = 2v_{μ2}$.

Ασκήσεις

1. **α)** $\Delta t = (6\text{ min } 41{,}66\text{ s}) - (6\text{ min } 40{,}45\text{ s}) = 1{,}21\text{ s}$

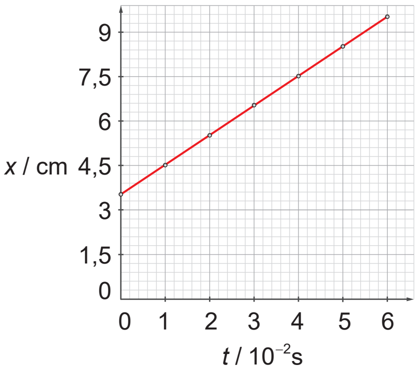
β) $v_\mu = \dfrac{2\text{ km}}{6\text{ min } 40{,}45\text{ s}} = \dfrac{2000\text{ m}}{400{,}45\text{ s}} = 4{,}99\text{ m/s}$

γ) Πρακτικά μηδέν.

2. Συμπληρωμένος πίνακας.

Κουκ.	Κ1	Κ2	Κ3	Κ4	Κ5	Κ6	Κ7
t / s	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
x / cm	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5

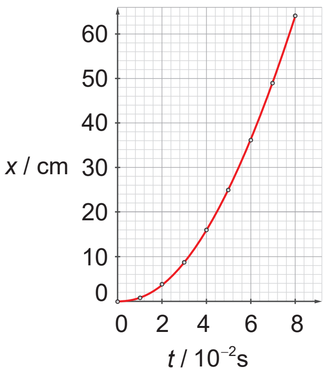
Γραφική παράσταση θέσης-χρόνου.



3. Συμπληρωμένος πίνακας.

Κουκ.	Κ1	Κ2	Κ3	Κ4	Κ5	Κ6	Κ7	Κ8	Κ9
t / s	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
x / cm	0	1	4	9	16	25	36	49	64

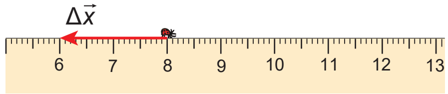
Γραφική παράσταση θέσης-χρόνου.



4. **α)** Η μετατόπιση είναι:

$$\Delta x = (6\text{ cm}) - (8\text{ cm}) = -2\text{ cm}$$

με μέτρο 2 cm.



β) $s = (4\text{ cm}) + (6\text{ cm}) = 10\text{ cm}$

γ) $\Delta t = \dfrac{s}{v_\mu} = \dfrac{10\text{ cm}}{0{,}4\text{ cm/s}} = 25\text{ s}$

5. **α)** $v_{\mu 1} = \dfrac{s}{\Delta t_1} = \dfrac{50\text{ m}}{40\text{ s}} = 1{,}25\text{ m/s}$

β) $v_{\mu 2} = \dfrac{s}{\Delta t_2} = \dfrac{50\text{ m}}{50\text{ s}} = 1\text{ m/s}$

γ) $v_\mu = \dfrac{2s}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \dfrac{2(50\text{ m})}{(40\text{ s}) + (50\text{ s})} = 1{,}11\text{ m/s}$

6. **α)** Η ταχύτητα απογείωσης είναι:

$$v_\alpha = 198\frac{\text{km}}{\text{h}} = 198 \cdot \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}} = 55\text{ m/s}$$

Η μέση ταχύτητα στη διάρκεια της απογείωσης είναι:

$$v_\mu = \frac{v_\alpha}{2} = \frac{55\text{ m/s}}{2} = 27{,}5\text{ m/s}$$

Επομένως:

$$\Delta t = \frac{s}{v_\mu} = \frac{275\text{ m}}{27{,}5\text{ m/s}} = 10\text{ s}$$

β) Η μέση επιτάχυνση στη διάρκεια της απογείωσης είναι:

$$a_\mu = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(55\text{ m/s}) - (0\text{ m/s})}{10\text{ s}} = 5{,}5\text{ m/s}^2$$

2.2 Μελέτη υλικού σημείου χωρίς την επίδραση δυνάμεων – Ισορροπία άκαμπτου σώματος

Ερωτήσεις

1. Η αδράνεια δεν είναι δύναμη· είναι η ιδιότητα της ύλης να τείνει να διατηρεί την κινητική της κατάσταση. Έτσι, ο επιβάτης τείνοντας να διατηρήσει την κινητική του κατάσταση, δηλαδή να κινείται με την ταχύτητα που είχε το λεωφορείο ακριβώς πριν φρενάρει, κινείται προς τα εμπρός μετά το φρενάρισμα.

2. Δεν απαιτούνται καύσιμα, διότι στο διαστημόπλοιο δεν ασκείται κάποια δύναμη, ώστε να μεταβάλει την κινητική του κατάσταση (θεωρούμε ότι δεν ασκούνται ούτε βαρυτικές δυνάμεις ούτε δυνάμεις τριβής).

3. Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα για το $Σ_2$:

$$ΣF = 0 \ \text{ή} \ T_2 - w_2 = 0 \ \text{ή} \ T_2 = w_2$$

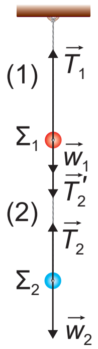
Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα για το νήμα (2):

$$ΣF = 0 \ \text{ή} \ T_2' - T_2 = 0 \ \text{ή} \ T_2' = T_2$$

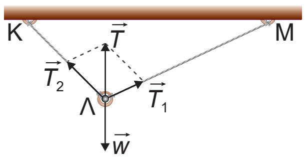
Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα για το $Σ_1$:

$$ΣF = 0 \ \text{ή} \ T_1 - w_1 - T_2' = 0$$
$$\text{ή} \ T_1 = w_1 + T_2'$$
$$\text{ή} \ T_1 = w_1 + T_2$$

Άρα $T_1 > T_2$.



4. Μεγαλύτερη τάση ασκεί το νήμα μήκους (ΚΛ). Αφού η ακροβάτισσα ισορροπεί, σχεδιάζουμε τη δύναμη $\vec{T}$ έτσι, ώστε να είναι αντίθετη του βάρους $\vec{w}$. Στην συνέχεια, εφαρμόζουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου για να προσδιορίσουμε, ακολουθώντας τη γραφική μέθοδο, τις τάσεις των νημάτων $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ και τη σχέση που συνδέει τα μέτρα τους.



5. Οι παραμορφώσεις είναι ίσες. Και στις δύο περιπτώσεις η δύναμη του ελατηρίου είναι αντίθετη της x-συνιστώσας του βάρους. Πράγματι:

$$ΣF_x = 0 \ \text{ή} \ wημφ = F_{ελ} \ \text{ή} \ wημφ = kΔl$$

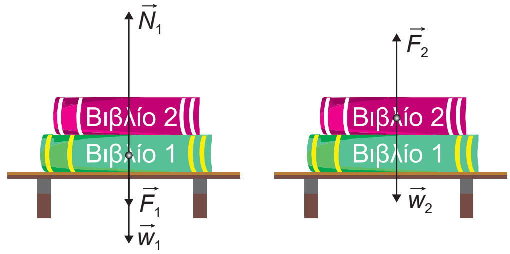
6. **α)** $\vec{w}_1$: η δύναμη που ασκεί η Γη στο βιβλίο 1

$\vec{N}_1$: η κάθετη δύναμη στήριξης από το τραπέζι στο βιβλίο 1

$\vec{F}_1$: η δύναμη από το βιβλίο 2 στο βιβλίο 1

$\vec{F}_2$: η δύναμη από το βιβλίο 1 στο βιβλίο 2

$\vec{w}_2$: η δύναμη που ασκεί η Γη στο βιβλίο 2



β) Βιβλίο 1:

$$Σ\vec{F} = \vec{0} \ \text{ή} \ \vec{w}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_1 = \vec{0}$$

Θεωρώντας θετική φορά την κατακόρυφη προς τα κάτω, έχουμε:

$$w_1 + F_1 - N_1 = 0 \ \text{ή} \ N_1 = w_1 + F_1$$

Βιβλίο 2:

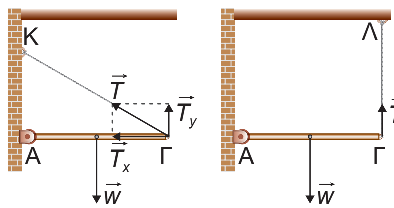
$$Σ\vec{F} = \vec{0} \ \text{ή} \ \vec{w}_2 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

Θεωρώντας θετική φορά την κατακόρυφη προς τα κάτω, έχουμε:

$$w_2 - F_2 = 0 \ \text{ή} \ w_2 = F_2$$

γ) Οι αντίθετες δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ έχουν σχέση δράσης-αντίδρασης και για τα μέτρα τους ισχύει $F_1 = F_2$.

7. Μεγαλύτερη είναι η τάση όταν το σκοινί είναι πλάγιο. Η ράβδος ισορροπεί ακίνητη και στις δύο περιπτώσεις, οπότε η συνολική ροπή ως προς οποιοδήποτε σημείο της είναι μηδενική.



Στην πρώτη περίπτωση του πλάγιου σχοινιού, όπως φαίνεται στο σχήμα, η ροπή της συνιστώσας της τάσης $\vec{T}_y$ είναι αντίθετη της ροπής του βάρους της ράβδου ως προς το άκρο Α.

Στη δεύτερη περίπτωση του κατακόρυφου σχοινιού, η ροπή της τάσης $\vec{T}'$ είναι αντίθετη της ροπής του βάρους της ράβδου ως προς το άκρο Α.

Άρα $T_y = T'$, οπότε $T > T'$.

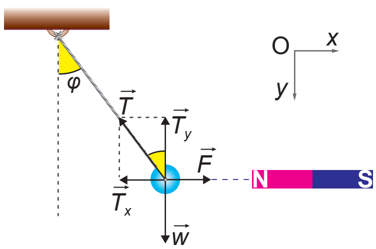
8. Συμπληρωμένος πίνακας.

Σημείο προσάρτησης σφαιριδίου	Β	Γ	Δ	Ε
Βάρος σφαιριδίου	w	$\frac{w}{2}$	$\frac{w}{3}$	$\frac{w}{4}$
Μέτρο δύναμης στήριξης	$2w$	$\frac{3w}{2}$	$\frac{4w}{3}$	$\frac{5w}{4}$

Ασκήσεις

1. Λόγω της ισορροπίας του σφαιριδίου ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$$



Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα σε κάθε άξονα:

$$\Sigma F_y = 0 \text{ ή } w - T_y = 0$$
$$\text{ή } w - T\sigma\upsilon\nu\varphi = 0$$
$$\text{ή } T = \frac{w}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

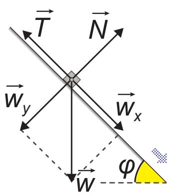
οπότε $T = 15$ N

και

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ή } F - T_x = 0$$
$$\text{ή } F - T\eta\mu\varphi = 0$$
$$\text{ή } F = T\eta\mu\varphi$$

οπότε $F = 9$ N.

2. Αναλύουμε το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες, μια συνιστώσα $\vec{w}_x$ παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και μια συνιστώσα $\vec{w}_y$ κάθετη σε αυτό.



Ισχύουν:

$$w_x = w\eta\mu\varphi \text{ και } w_y = w\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα σε κάθε άξονα:

$$\Sigma F_y = 0 \text{ ή } N - w_y = 0$$
$$\text{ή } N - w\sigma\upsilon\nu\varphi = 0$$
$$\text{ή } N = w\sigma\upsilon\nu\varphi$$

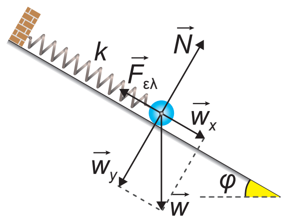
και

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ή } w_x - T = 0$$
$$\text{ή } w\eta\mu\varphi - T = 0$$
$$\text{ή } T = w\eta\mu\varphi$$

Από τον Νόμο της τριβής έχουμε:

$$T = \mu N \text{ ή } w\eta\mu\varphi = \mu w\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή } \mu = \varepsilon\varphi\varphi$$

3. Αναλύουμε το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες, μια συνιστώσα $\vec{w}_x$ παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και μια συνιστώσα $\vec{w}_y$ κάθετη σε αυτό.



Ισχύουν:

$$w_x = w\eta\mu\varphi \text{ και } w_y = w\sigma\upsilon\nu\varphi$$

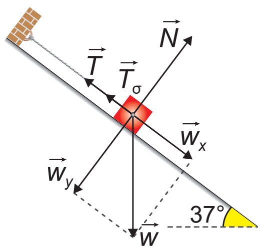
Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα στον x-άξονα:

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ή } w_x - F_{\varepsilon\lambda} = 0$$
$$\text{ή } w\eta\mu\varphi = k\Delta l$$
$$\text{ή } \Delta l = \frac{w\eta\mu\varphi}{k}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$\Delta l = \frac{(20\text{ N})(0{,}5)}{100\text{ N/m}} = 0{,}1\text{ m}$$

4. Αναλύουμε το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες, μια συνιστώσα $\vec{w}_x$ παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και μια συνιστώσα $\vec{w}_y$ κάθετη σε αυτό.



Ισχύουν:

$$w_x = w\eta\mu\varphi = (100\text{ N})(0{,}6) = 60\text{ N}$$

$$w_y = w\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα στον x-άξονα:

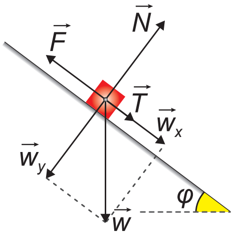
$$\Sigma F_x = 0 \ \text{ή} \ w_x + T_\sigma + T = 0$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$(-60\ \text{N}) + T_\sigma + (50\ \text{N}) = 0 \ \text{ή} \ T_\sigma = +10\ \text{N}$$

ομόρροπη της τάσης του νήματος.

5. α) Αναλύουμε το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες, μια συνιστώσα $\vec{w}_x$ παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και μια συνιστώσα $\vec{w}_y$ κάθετη σε αυτό.



Ισχύουν:

$$w_x = w\eta\mu\varphi = 60\ \text{N}$$

$$w_y = w\sigma\upsilon\nu\varphi = 80\ \text{N}$$

Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα σε κάθε άξονα:

$$\Sigma F_y = 0 \ \text{ή} \ N - w_y = 0 \ \text{ή} \ N = w_y$$

οπότε $N = 80\ \text{N}$

και

$$\Sigma F_x = 0 \ \text{ή} \ T + w_x - F = 0$$

$$\text{ή} \ F = T + w_x \quad (1)$$

Από τον Νόμο της τριβής έχουμε:

$$T = \mu N = (0,5)(80\ \text{N}) = 40\ \text{N}$$

Από την (1) βρίσκουμε $F = 100\ \text{N}$.

β) Η τριβή αλλάζει φορά, αλλά όχι μέτρο. Επομένως:

$$\Sigma F_x = 0 \ \text{ή} \ T + w_x - F' = 0$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$(-40\ \text{N}) + (60\ \text{N}) - F' = 0 \ \text{ή} \ F' = 20\ \text{N}$$

γ) Από τον Νόμο της τριβής έχουμε:

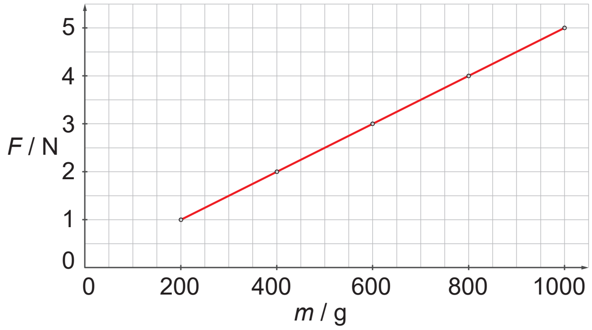
$$T' = \mu N' = \mu w = (0,5)(100\ \text{N}) = 50\ \text{N}$$

Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα στον άξονα της κίνησης:

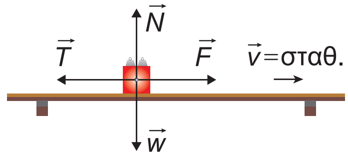
$$\Sigma F_x = 0 \ \text{ή} \ F'' = T'$$

Άρα $F'' = 50\ \text{N}$.

6. α) Γραφική παράσταση της δύναμης σε συνάρτηση με τη συνολική μάζα.



β) Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα σε κάθε άξονα:



$$\Sigma F_y = 0 \ \text{ή} \ N - w = 0 \ \text{ή} \ N = mg$$

$$\Sigma F_x = 0 \ \text{ή} \ F - T = 0 \ \text{ή} \ F = T$$

Ξεκινώντας από τον Νόμο της τριβής καταλήγουμε στη συνάρτηση που συνδέει τη δύναμη $\vec{F}$ και τη μάζα m, τη γραφική παράσταση της οποίας κατασκευάσαμε στο ερώτημα α.

$$T = \mu N \ \text{ή} \ F = \mu mg \quad (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι η κλίση της γραφικής παράστασης είναι μg. Μέσω της κλίσης θα υπολογίσουμε τον συντελεστή τριβής.

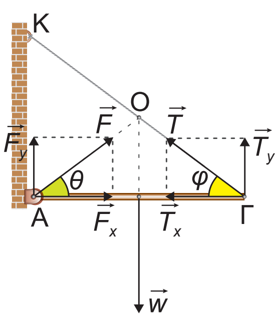
$$\text{Κλίση} = \frac{\Delta F}{\Delta m} = \frac{(4{,}90\ \text{N}) - (0{,}98\ \text{N})}{(1000\ \text{g}) - (200\ \text{g})}$$

$$= \frac{3{,}92\ \text{N}}{800\ \text{g}} = 0{,}0049\ \text{N/g}$$

Άρα $\mu g = 4{,}9\ \text{N/kg}$ και έχουμε:

$$\mu = \frac{4{,}9\ \text{N/kg}}{9{,}81\ \text{N/kg}} = 0{,}50$$

7. α) Όπως φαίνεται στο σχήμα οι φορείς των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο θα πρέπει να συντρέχουν σε ένα σημείο Ο, για να έχουμε ισορροπία. Στην περίπτωση που συνέτρεχαν οι φο-



ρείς των δύο αλλά όχι της τρίτης δύναμης, τότε αυτή θα προκαλούσε την περιστροφή της ράβδου αφού η ροπή της ως προς το σημείο Ο θα ήταν μη μηδενική.

β) Αναλύουμε τις δυνάμεις $\vec{T}$ και $\vec{F}$ στις συνιστώσες $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$ και $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Προσοχή! Οι γωνίες θ και φ δεν είναι ίσες.

Για τις συνιστώσες της τάσης $\vec{T}$ ισχύουν:

$$T_y = T\eta\mu\varphi \;\; \text{και} \;\; T_x = T\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, πρέπει:

$$\Sigma\vec{\tau} = \vec{0} \;\; \text{και} \;\; \Sigma\vec{F} = \vec{0} \;\; (\Sigma F_x = 0 \text{ και } \Sigma F_y = 0)$$

Επομένως:

$$\Sigma\tau_A = 0 \;\; \text{ή} \;\; \tau_w = \tau_T \;\; \text{ή} \;\; w\frac{L}{2} = T_y L$$

$$\text{ή} \;\; \frac{1}{2}w = T\eta\mu\varphi \;\; \text{ή} \;\; T = \frac{w}{2\eta\mu\varphi}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$T = \frac{60 \text{ N}}{2(0{,}6)} = 50 \text{ N}$$

γ) Έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \;\; \text{ή} \;\; F_x = T_x \;\; \text{ή} \;\; F_x = T\sigma\upsilon\nu\varphi$$

οπότε:

$$F_x = (50 \text{ N})(0{,}8) = 40 \text{ N}$$

και

$$\Sigma F_y = 0 \;\; \text{ή} \;\; F_y + T_y = w \;\; \text{ή} \;\; F_y = w - T\eta\mu\varphi$$

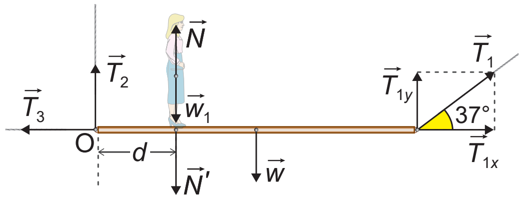
οπότε:

$$F_y = (60 \text{ N}) - (50 \text{ N})(0{,}6) = 30 \text{ N}$$

Άρα, για τη δύναμη $\vec{F}$ έχουμε:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 50 \text{ N} \;\; \text{και} \;\; \varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{3}{4}$$

8. Η κυρία βάρους $\vec{w}_1$ ισορροπεί.



Από τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \;\; \text{ή} \;\; w_1 - N = 0 \;\; \text{ή} \;\; N = w_1$$

οπότε η κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}$ που ασκεί η ράβδος στην κυρία έχει μέτρο $N = 500$ N.

Από τον 3ο Νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι το μέτρο της αντίδρασης $\vec{N}'$ στην κάθετη δύναμη στήριξης (ασκείται από την κυρία στη ράβδο) θα είναι:

$$N' = N$$

οπότε $N' = 500$ N.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι το βάρος της $\vec{w}$, η $\vec{N}'$ και οι τάσεις των νημάτων $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{T}_3$. Αναλύουμε την $\vec{T}_1$ σε δύο συνιστώσες $\vec{T}_{1x}$ και $\vec{T}_{1y}$, για τις οποίες ισχύουν:

$$T_{1x} = T_1\sigma\upsilon\nu 37° = 0{,}8T_1$$

$$T_{1y} = T_1\eta\mu 37° = 0{,}6T_1$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, πρέπει:

$$\Sigma\vec{\tau} = \vec{0} \;\; \text{και} \;\; \Sigma\vec{F} = \vec{0} \;\; (\Sigma F_x = 0 \text{ και } \Sigma F_y = 0)$$

Επομένως:

$$\Sigma\tau_O = 0 \;\; \text{ή} \;\; \tau_w + \tau_{N'} = \tau_{T_{1y}} \;\; \text{ή} \;\; w\frac{L}{2} + N'd = T_{1y}L$$

Με αντικατάσταση των τιμών προκύπτει:

$$(400 \text{ N})(2 \text{ m}) + (500 \text{ N})(1 \text{ m}) = 0{,}6T_1(4 \text{ m})$$

οπότε:

$$T_1 = \frac{1300 \text{ N}\cdot\text{m}}{2{,}4 \text{ m}} = 542 \text{ N}$$

Επίσης:

$$\Sigma F_x = 0 \;\; \text{ή} \;\; T_3 = T_{1x} \;\; \text{ή} \;\; T_3 = 0{,}8T_1$$

οπότε $T_3 = 433$ N

και

$$\Sigma F_y = 0 \;\; \text{ή} \;\; w + N' = T_{1y} + T_2$$

$$\text{ή} \;\; T_2 = w + N' - 0{,}6T_1$$

οπότε $T_2 = 575$ N.

2.3 Μελέτη υλικού σημείου υπό την επίδραση δυνάμεων – Ισορροπία άκαμπτου σώματος

Ερωτήσεις

1. Η μάζα του κιβωτίου υπολογίζεται από την κλίση της γραφικής παράστασης ως εξής:

$$\text{Κλίση} = \frac{\Delta a}{\Delta \Sigma F} = \frac{(4\ \text{m/s}^2)-(0\ \text{m/s}^2)}{(40\ \text{N})-(0\ \text{N})} = 0{,}1\ \text{kg}^{-1}$$

Σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = ma \ \text{ ή } \ m = \frac{\Sigma F}{a}$$

Άρα:

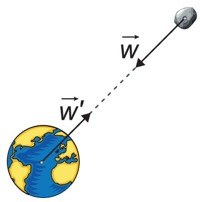
$$m = (\text{Κλίση})^{-1} = \frac{1}{0{,}1\ \text{kg}^{-1}} = 10\ \text{kg}$$

2. Σύμφωνα με το 2ο Νόμο του Νεύτωνα ισχύει:

$$\Sigma F = m_\text{ν} a$$

όπου $m_\text{ν}$ η μάζα του νήματος.
Αφού το νήμα είναι αβαρές $(m_\text{ν} = 0)$, θα ισχύει $\Sigma F = 0$. Άρα, οι τάσεις στα άκρα του πρέπει να έχουν το ίδιο μέτρο.

3. Στο διπλανό σχήμα η Γη και η πέτρα έχουν σχεδιαστεί εκτός κλίμακας.



Η δύναμη $\vec{w}$ που ασκεί η Γη στην πέτρα και η δύναμη $\vec{w}'$ που ασκεί η πέτρα στη Γη ικανοποιούν τον 3ο Νόμο του Νεύτωνα, οπότε είναι αντίρροπες και έχουν ίσα μέτρα.
Κατά την πρόσκρουση της πέτρας στην επιφάνεια της Γης ισχύει ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα τόσο για τη Γη (Γ) όσο και για την πέτρα (π), οπότε:

$$w = w' \ \text{ ή } \ M_\Gamma a_\Gamma = m_\pi a_\pi \ \text{ ή } \ \frac{M_\Gamma}{m_\pi} = \frac{a_\pi}{a_\Gamma}$$

Επειδή $M_\Gamma \gg m_\pi$, θα ισχύει $a_\Gamma \ll a_\pi$.

Άρα, η επιτάχυνση της Γης είναι πρακτικά μηδενική.

4. **α)** Λόγω δράσης αντίδρασης, η δύναμη $\vec{F}_{\varphi\alpha}$ που ασκεί το φορτηγό στο αυτοκίνητο και η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\varphi}$ που ασκεί το αυτοκίνητο στο φορτηγό είναι αντίρροπες και έχουν ίσα μέτρα.

$$\vec{F}_{\varphi\alpha} = -\vec{F}_{\alpha\varphi} \ \text{ και } \ F_{\varphi\alpha} = F_{\alpha\varphi}$$

β) Κατά τη σύγκρουση ισχύει ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα τόσο για το φορτηγό όσο και για το αυτοκίνητο.

Για το φορτηγό: $F_{\alpha\varphi} = m_\varphi a_\varphi$

Για το αυτοκίνητο: $F_{\varphi\alpha} = m_\alpha a_\alpha$

Επομένως:

$$F_{\alpha\varphi} = F_{\varphi\alpha} \ \text{ ή } \ m_\varphi a_\varphi = m_\alpha a_\alpha \ \text{ ή } \ \frac{m_\varphi}{m_\alpha} = \frac{a_\alpha}{a_\varphi}$$

Επειδή $m_\varphi > m_\alpha$, θα είναι $a_\alpha > a_\varphi$.
Να συζητηθεί το αποτέλεσμα στην τάξη.

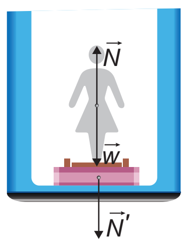
5. Σωστή απάντηση είναι η Α.
Σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = ma \ \text{ ή } \ a = \frac{\Sigma F}{m}$$

Η συνισταμένη δύναμη παραμένει σταθερή, αλλά η μάζα του φορτηγού αυξάνεται. Άρα, θα έχουμε μείωση της επιτάχυνσης.

6. Η δύναμη που είναι υπεύθυνη για τη μη μετακίνηση των κιβωτίων, αλλά και για την επιτάχυνσή τους είναι η δύναμη της στατικής τριβής.

7. **α)** Η γυναίκα βάρους $\vec{w}$ ισορροπεί, οπότε από τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε:



$$\Sigma F = 0 \ \text{ ή } \ w - N = 0 \ \text{ ή } \ w = N$$

όπου $\vec{N}$ η κάθετη δύναμη στήριξης που ασκεί η ζυγαριά στη γυναίκα.
Από τον 3ο Νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι $N = N'$ (μέτρα), όπου $\vec{N}'$ η αντίδραση στην κάθετη δύναμη στήριξης που ασκείται από τη γυναίκα στη ζυγαριά. Η ζυγαριά σε κάθε περίπτωση (κίνησης ή μη του ασανσέρ) μετρά την N'. Άρα, όταν το ασανσέρ είναι ακίνητο, ισχύει $w = N = N'$.
Σε όλες τις περιπτώσεις της άσκησης ισχύει $N = N'$.

β) Για το μέτρο της $\vec{N}'$ ισχύει:

$$N' = w + \frac{10}{100} w = 1{,}1w$$

οπότε $N = 1{,}1w$.
Όταν το ασανσέρ επιταχύνεται προς τα πάνω, με την ίδια επιτάχυνση κινείται και η γυναίκα. Λαμβάνουμε ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης και εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα για τη γυναίκα:

$$\Sigma F = ma \ \text{ ή } \ N - w = ma \ \text{ ή } \ 1{,}1w - w = ma$$
$$\text{ή } \ 0{,}1mg = ma \ \text{ ή } \ a = 0{,}1g$$

γ) Λαμβάνουμε ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης και έχουμε:

$$w - N = ma \quad \text{ή} \quad w - N = m\frac{g}{20}$$

$$\text{ή} \quad N = w - \frac{mg}{20}$$

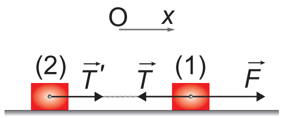
$$\text{ή} \quad N = \frac{19}{20}w$$

Άρα $N' = 19w/20$.

8. Λόγω αβαρούς, μη εκτατού και τεντωμένου νήματος, ισχύουν:

$$T = T' \quad \text{και} \quad a_{1x} = a_{2x} = a_x$$

Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα.



Σώμα (1): $\Sigma F_x = ma_x$ ή $F - T = ma_x$

$$\text{ή} \quad a_x = \frac{F - T}{m} \qquad (1)$$

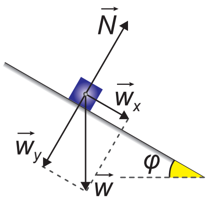
Σώμα (2): $\Sigma F_x = ma_x$ ή $T' = ma_x$

$$\text{ή} \quad a_x = \frac{T}{m} \qquad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει:

$$F - T = T \quad \text{ή} \quad F = 2T$$

9. Αναλύουμε το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες, μια συνιστώσα $\vec{w}_x$ παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και μια συνιστώσα $\vec{w}_y$ κάθετη σε αυτό.



Ισχύουν:

$$w_x = w\eta\mu\varphi \quad \text{και} \quad w_y = w\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα στον x-άξονα (άξονας κίνησης) για μία παγοκολόνα:

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \text{ή} \quad w_x = ma_x$$

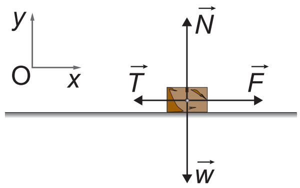
$$\text{ή} \quad mg\eta\mu\varphi = ma_x$$

$$\text{ή} \quad a_x = g\eta\mu\varphi$$

Η επιτάχυνση δεν εξαρτάται από τη μάζα του σώματος. Άρα, οι παγοκολόνες επιταχύνονται με ίσες επιταχύνσεις.

Ασκήσεις

1. Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα στον x-άξονα (άξονας κίνησης).



$$\Sigma F_x = ma_x \quad \text{ή} \quad F - T = ma_x \quad \text{ή} \quad T = F - ma_x$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$T = (69\ \text{N}) - (20\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) = 49\ \text{N}$$

Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα στον y-άξονα (κατακόρυφος):

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N - w = 0 \quad \text{ή} \quad N = mg$$

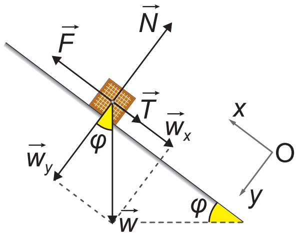
Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$N = (20\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2) = 196\ \text{N}$$

Εφαρμόζουμε τον Νόμο της τριβής:

$$\mu = \frac{T}{N} = \frac{49\ \text{N}}{196\ \text{N}} = 0{,}25$$

2. Αναλύουμε το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες, μια συνιστώσα $\vec{w}_x$ παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και μια συνιστώσα $\vec{w}_y$ κάθετη σε αυτό.



Ισχύουν:

$$w_x = w\eta\mu\varphi = mg\eta\mu\varphi$$

$$= (10\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}6)$$

$$= 58{,}8\ \text{N}$$

και

$$w_y = w\sigma\upsilon\nu\varphi = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$= (10\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}8)$$

$$= 78{,}4\ \text{N}$$

Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα στον y-άξονα:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N - w_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = w_y = 78{,}4\ \text{N}$$

Από τον νόμο της τριβής έχουμε:

$$T = \mu N = (0{,}5)(78{,}4\ \text{N}) = 39{,}2\ \text{N}$$

α) Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα στον x-άξονα, όταν το κιβώτιο ανεβαίνει με επιτάχυνση $a_x = +1\ \text{m/s}^2$:

$$\Sigma F_x = ma_x \ \text{ ή } \ F - w_x - T = ma_x$$

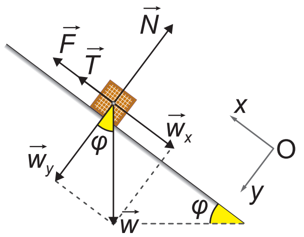
$$\text{ή } \ F = ma_x + w_x + T$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$F = (10\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) + (58{,}8\ \text{N}) + (39{,}2\ \text{N})$$

$$= 108\ \text{N}$$

β) Σε σχέση με την περίπτωση α) η τριβή ολίσθησης άλλαξε φορά, αλλά όχι μέτρο.



Η συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι $a_x = -1\ \text{m/s}^2$. Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα στον x-άξονα, όταν το κιβώτιο κατεβαίνει.

$$\Sigma F_x = ma_x \ \text{ ή } \ F - w_x + T = ma_x$$

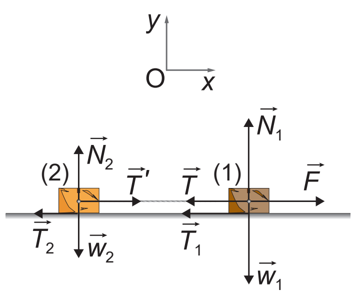
$$\text{ή } \ F = ma_x + w_x - T$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$F = (10\ \text{kg})(-1\ \text{m/s}^2) + (58{,}8\ \text{N}) - (39{,}2\ \text{N})$$

$$= 9{,}6\ \text{N}$$

3. α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στα κουτιά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



β) Για την τριβή σε κάθε κουτί έχουμε:

$$T_1 = \mu N_1 = \mu m_1 g$$

$$= (0{,}1)(20\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2) = 19{,}6\ \text{N}$$

και

$$T_2 = \mu N_2 = \mu m_2 g$$

$$= (0{,}1)(10\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2) = 9{,}8\ \text{N}$$

γ) Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα στον x-άξονα για το κουτί (2):

$$\Sigma F_x = m_2 a_x \ \text{ ή } \ T' - T_2 = m_2 a_x$$

$$\text{ή } \ T' = m_2 a_x + T_2$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$T' = (10\ \text{kg})(0{,}5\ \text{m/s}^2) + (9{,}8\ \text{N}) = 14{,}8\ \text{N}$$

δ) Επειδή το νήμα είναι αβαρές, τεντωμένο και μη εκτατό, ισχύει:

$$T = T' = 14{,}8\ \text{N}$$

Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα στον x-άξονα για το κουτί (1):

$$\Sigma F_x = m_1 a_x \ \text{ ή } \ F - T - T_1 = m_1 a_x$$

$$\text{ή } \ F = m_1 a_x + T + T_1$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$F = (20\ \text{kg})(0{,}5\ \text{m/s}^2) + (14{,}8\ \text{N}) + (19{,}6\ \text{N})$$

$$= 44{,}4\ \text{N}$$

ε) Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα στον x-άξονα για το σύστημα που αποτελείται από τα σώματα (1), (2) και το αβαρές νήμα:

$$\Sigma F_x = (m_1 + m_2)a_x \ \text{ ή } \ F - T_1 - T_2 = (m_1 + m_2)a_x$$

$$\text{ή } \ a_x = \frac{F - T_1 - T_2}{m_1 + m_2}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$a_x = \frac{(44{,}4\ \text{N}) - (19{,}6\ \text{N}) - (9{,}8\ \text{N})}{(20\ \text{kg}) + (10\ \text{kg})} = 0{,}5\ \text{m/s}^2$$

Άρα, η επιτάχυνση δεν αλλάζει, αφού οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι οι ίδιες σε μέτρο και κατεύθυνση.

Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα στον x-άξονα για το σώμα (1) που τώρα βρίσκεται πίσω από το σώμα (2).

$$\Sigma F_x = m_1 a_x \ \text{ ή } \ T' - T_1 = m_1 a_x \ \text{ ή } \ T' = m_1 a_x + T_1$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$T' = (20\ \text{kg})(0{,}5\ \text{m/s}^2) + (19{,}6\ \text{N}) = 29{,}6\ \text{N}$$

Άρα, η τάση του νήματος αυξάνεται.

4. Η μοναδική εξωτερική δύναμη στον άξονα της κίνησης είναι το βάρος $\vec{w}$ του σώματος μάζας m.

Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα των δύο σωμάτων και του νήματος:

$$\Sigma F = (M+m)a \quad \acute{\eta} \quad w = (M+m)a \quad \acute{\eta} \quad a = \frac{w}{M+m}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$a = \frac{1\ \text{N}}{0{,}5\ \text{kg}} = 2\ \text{m/s}^2$$

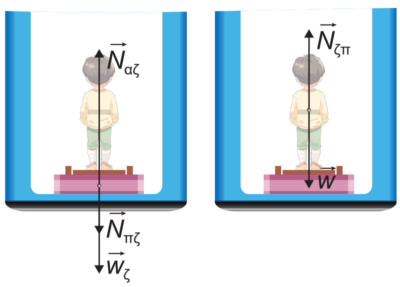
5. Έστω $\vec{F}$ η δύναμη που ασκεί ο γερανός στην παλέτα με τα τούβλα. Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα στον άξονα της κίνησης για την παλέτα:

$$\Sigma F = ma \quad \acute{\eta} \quad F - mg = ma \quad \acute{\eta} \quad F = ma + mg$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$F = (100\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) + (100\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)$$
$$= 1080\ \text{N}$$

6. α) Στο παιδί ασκείται το βάρος $\vec{w}$ από τη Γη και η κάθετη δύναμη επαφής $\vec{N}_{\zeta\pi}$ από τη ζυγαριά. Στη ζυγαριά ασκείται το βάρος $\vec{w}_{\zeta}$ από τη Γη, η κάθετη δύναμη επαφής $\vec{N}_{\pi\zeta}$ από το παιδί και η κάθετη δύναμη επαφής $\vec{N}_{\alpha\zeta}$ από τον ανελκυστήρα.



Το ζεύγος των δυνάμεων $\vec{N}_{\pi\zeta}$ και $\vec{N}_{\zeta\pi}$ ικανοποιεί τον 3ο Νόμο του Νεύτωνα.

β) **i)** Ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \quad \acute{\eta} \quad N_{\zeta\pi} - w = 0 \quad \acute{\eta} \quad N_{\zeta\pi} = mg$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε $N_{\zeta\pi} = 500$ N.

ii) Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα για το παιδί, λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$\Sigma F_y = ma_y \quad \acute{\eta} \quad N_{\zeta\pi} - w = ma_y$$
$$\acute{\eta} \quad N_{\zeta\pi} = mg + ma_y$$

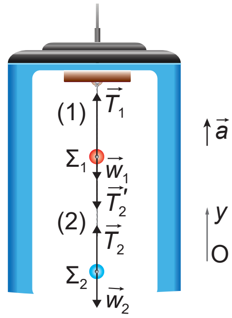
Με αντικατάσταση βρίσκουμε $N_{\zeta\pi} = 550$ N.

iii) Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα για το παιδί, λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$\Sigma F_y = ma_y \quad \acute{\eta} \quad w - N_{\zeta\pi} = ma_y$$
$$\acute{\eta} \quad N_{\zeta\pi} = mg - ma_y$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε $N_{\zeta\pi} = 450$ N.

7. α) Επειδή το νήμα είναι αβαρές, τεντωμένο και μη εκτατό, ισχύει:



$$T_2 = T_2'$$

Σφαίρα Σ_2:

$$\Sigma F_y = m_2 a_y$$
$$\acute{\eta} \quad T_2 - m_2 g = m_2 a$$
$$\acute{\eta} \quad T_2 = m_2 g + m_2 a$$

οπότε:

$$T_2 = (20\ \text{N}) + (5\ \text{N}) = 25\ \text{N}$$

Σφαίρα Σ_1:

$$\Sigma F_y = m_1 a_y \quad \acute{\eta} \quad T_1 - T_2' - m_1 g = m_1 a$$
$$\acute{\eta} \quad T_1 = T_2 + m_1 g + m_1 a$$

οπότε:

$$T_1 = (25\ \text{N}) + (20\ \text{N}) + (5\ \text{N}) = 50\ \text{N}$$

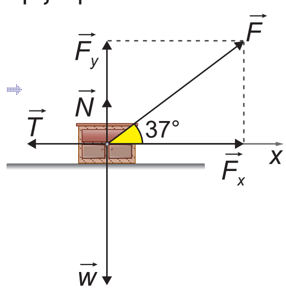
β) Από το ερώτημα α για τη σφαίρα Σ_1 έχουμε:

$$T_1 = T_2 + m_1 g + m_1 a = m_2 g + m_2 a + m_1 g + m_1 a$$

Επομένως:

$$a = \frac{T_1}{m_1 + m_2} - g$$
$$= \frac{60\ \text{N}}{(2\ \text{kg}) + (2\ \text{kg})} - (10\ \text{m/s}^2)$$
$$= 5\ \text{m/s}^2$$

8. Αναλύουμε την $\vec{F}$ σε δύο συνιστώσες τις οποίες υπολογίζουμε.



$$F_y = F\eta\mu 37° = (10\ \text{N})(0{,}6) = 6\ \text{N}$$
$$F_x = F\sigma\upsilon\nu 37° = (10\ \text{N})(0{,}8) = 8\ \text{N}$$

Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα στον *y*-άξονα:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N + F_y = w \quad \text{ή} \quad N = mg - F_y$$

οπότε:

$$N = (10\ \text{N}) - (6\ \text{N}) = 4\ \text{N}$$

Υπολογίζουμε την τριβή:

$$T = \mu N = (0{,}5)(4\ \text{N}) = 2\ \text{N}$$

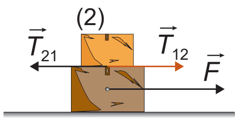
Τέλος, εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα στον *x*-άξονα:

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \text{ή} \quad F_x - T = ma_x \quad \text{ή} \quad a_x = \frac{F_x - T}{m}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$a_x = \frac{(8\ \text{N}) - (2\ \text{N})}{1\ \text{kg}} = 6\ \text{m/s}^2$$

9. Για λόγους απλότητας στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί μόνο οι δυνάμεις που ασκούνται κατά μήκος του άξονα της κίνησης. Αξιοσημείωτο είναι ότι η στατική τριβή $\vec{T}_{12}$ που ασκείται από το κιβώτιο (1) στο κιβώτιο (2) είναι υπεύθυνη για την επιτάχυνση του (2).



α) Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο Νεύτωνα για το σύστημα των δύο κιβωτίων στον άξονα της κίνησης:

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \text{ή} \quad F = (m_1 + m_2)a_x \quad \text{ή} \quad a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$a_x = \frac{90\ \text{N}}{(20\ \text{kg}) + (10\ \text{kg})} = 3\ \text{m/s}^2$$

β) Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο Νεύτωνα στο κιβώτιο (2):

$$\Sigma F_x = m_2 a_x \quad \text{ή} \quad T_{12} = m_2 a_x$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$T_{12} = (10\ \text{kg})(3\ \text{m/s}^2) = 30\ \text{N}$$

2.4 Ευθύγραμμες κινήσεις

Ερωτήσεις

1. Για τη μετατόπιση ισχύει:

$$\Delta x = v_{0,x}\Delta t + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2$$

Για τη μέση ταχύτητα έχουμε:

$$v_\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_{0,x}\Delta t + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$\text{ή} \quad v_\mu = v_{0,x} + \frac{1}{2}a_x\Delta t \quad (1)$$

Αν γράψουμε την (1) στη μορφή:

$$v_\mu = v_{0,x} + a_x\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$$

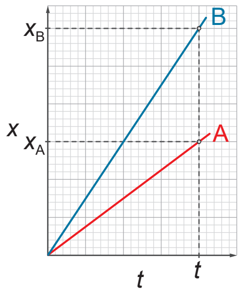
αντιλαμβανόμαστε ότι η μέση ταχύτητα ισούται με τη στιγμιαία στο μέσο του χρονικού διαστήματος. Για την τελική ταχύτητα ισχύει:

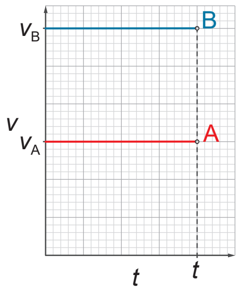
$$v_{\tau,x} = v_{0,x} + a_x\Delta t$$

Άρα, η (1) γράφεται:

$$v_\mu = \frac{2v_{0,x} + a_x\Delta t}{2} = \frac{v_{0,x} + v_{0,x} + a_x\Delta t}{2} = \frac{v_{0,x} + v_{\tau,x}}{2}$$

2. Την ίδια χρονική στιγμή *t* βρίσκουμε τις θέσεις x_A και x_B των αυτοκινήτων Α και Β αντίστοιχα.





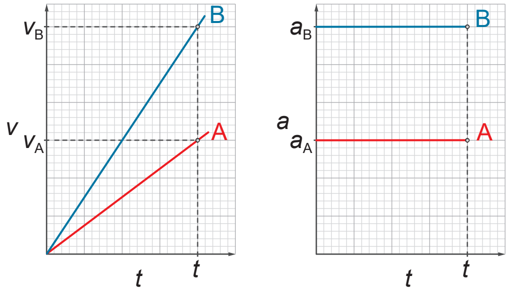
Παρατηρούμε ότι $x_B = 2x_A$. Ισχύουν:

$$v_A = \frac{x_A}{t} \quad \text{και} \quad v_B = \frac{x_B}{t}$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{x_B/t}{x_A/t} = \frac{x_B}{x_A} = \frac{2x_A}{x_A} = 2$$

3. Την ίδια χρονική στιγμή t βρίσκουμε τις ταχύτητες v_A και v_B των αυτοκινήτων Α και Β αντίστοιχα.



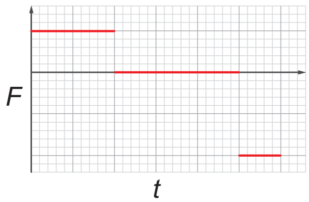
Παρατηρούμε ότι $v_B = 2v_A$. Ισχύουν:

$$a_A = \frac{v_A}{t} \quad \text{και} \quad a_B = \frac{v_B}{t}$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

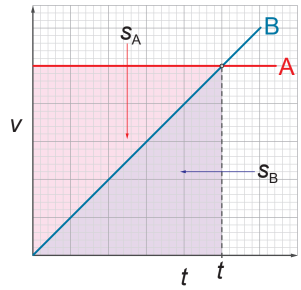
$$\frac{a_B}{a_A} = \frac{v_B/t}{v_A/t} = \frac{v_B}{v_A} = \frac{2v_A}{v_A} = 2$$

4. Προφανώς έχουμε τρία είδη κίνησης.



Η κλίση της γραφικής παράστασης ταχύτητας-χρόνου είναι ίση με την επιτάχυνση του σώματος που κινείται. Στο πρώτο χρονικό διάστημα έχουμε κίνηση με σταθερή θετική επιτάχυνση, άρα και σταθερή συνισταμένη δύναμη μέτρου F προς τη θετική φορά. Στο δεύτερο χρονικό διάστημα η ταχύτητα είναι σταθερή, άρα η επιτάχυνση και η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν. Στο τρίτο χρονικό διάστημα η επιτάχυνση, άρα και η F, έχουν αντίθετη φορά από την κίνηση.
Επίσης, παρατηρώντας την κλίση διαπιστώνουμε ότι η επιτάχυνση στο τρίτο χρονικό διάστημα της κίνησης είναι κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από την επιτάχυνση στο πρώτο. Συνεπώς, θα ισχύει το ίδιο και για το μέτρο F της συνισταμένης δύναμης.

5. Μπορούμε να υπολογίσουμε το διάστημα που διάνυσε κάθε όχημα από το εμβαδόν του διαγράμματος ταχύτητας-χρόνου.



Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν (άρα και το διάστημα) που αντιστοιχεί στην κίνηση του οχήματος Α είναι διπλάσιο από αυτό του οχήματος Β μέχρι τη χρονική στιγμή που αποκτούν την ίδια ταχύτητα. Επομένως:

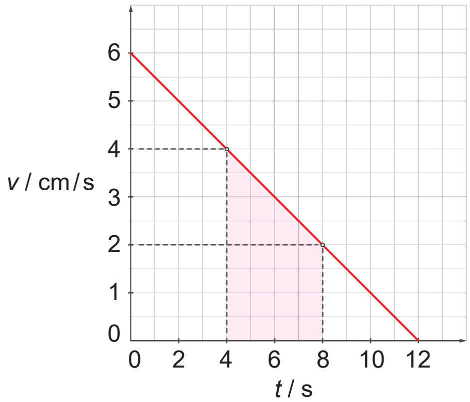
$$\frac{s_A}{s_B} = 2$$

6. Από την πρώτη στήλη $(t_0 = 0)$ βρίσκουμε $v_{0,x} = 10\ \text{m/s}$ και $x_0 = 50\ \text{m}$, ενώ από την τέταρτη στήλη $(t = 3\ \text{s})$ βρίσκουμε $a = 2\ \text{m/s}^2$. Συμπληρώνουμε τον πίνακα λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις:

$$\Delta t = t - t_0 = t \quad \text{(SI)}$$
$$\Delta x = x - x_0 = x - 50 \quad \text{(SI)}$$
$$v = v_{0,x} + a\Delta t = 10 + 2\Delta t \quad \text{(SI)}$$
$$x = x_0 + v_{0,x}\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 = 50 + 10\Delta t + (\Delta t)^2 \quad \text{(SI)}$$

t / s	0	1	2	3	5
x_0 / m	50	50	50	50	50
$v_{0,x}$ / ms^{-1}	10	10	10	10	10
a / ms^{-2}	2	2	2	2	2
v / ms^{-1}	10	12	14	16	20
Δx / m	0	11	24	39	75
x / m	50	66	74	89	164

7. Η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη με αρνητική συνιστώσα επιτάχυνσης. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μετατόπιση του κινητού από το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση, τον t-άξονα και τις ευθείες $t = 4\ \text{s}$ και $t = 8\ \text{s}$.



Παρατηρούμε ότι το χωρίο είναι τραπέζιο. Επομένως:

$$\Delta x=\frac{(4\ \text{cm/s})+(2\ \text{cm/s})}{2}(4\ \text{s})=12\ \text{cm}$$

8. **α)** Από $t=0$ s έως $t=5$ s η κίνηση είναι ευθύγραμμα ομαλά μεταβαλλόμενη με αυξανόμενη ταχύτητα και επιτάχυνση:

$$a_1=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{(5\ \text{cm/s})-(0\ \text{cm/s})}{5\ \text{s}-0\ \text{s}}=+1\ \text{cm/s}^2$$

Από $t=5$ s έως $t=10$ s η κίνηση είναι ευθύγραμμα ομαλά μεταβαλλόμενη με μειούμενη ταχύτητα και επιτάχυνση:

$$a_2=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{(0\ \text{cm/s})-(5\ \text{cm/s})}{10\ \text{s}-5\ \text{s}}=-1\ \text{cm/s}^2$$

Άρα, τα μέτρα των επιταχύνσεων είναι ίσα.

β) Για να συγκρίνουμε τις μετατοπίσεις, συγκρίνουμε τα εμβαδά.

Από $t=0$ s έως $t=5$ s έχουμε:

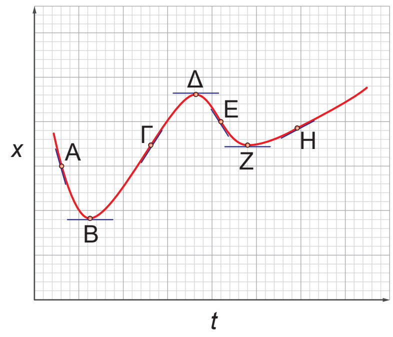
$$\Delta x_1=\frac{(5\ \text{cm/s})(5\ \text{s})}{2}=12{,}5\ \text{cm}$$

Από $t=5$ s έως $t=10$ s έχουμε:

$$\Delta x_2=\frac{(5\ \text{cm/s})(10\ \text{s}-5\ \text{s})}{2}=12{,}5\ \text{cm}$$

Άρα, οι μετατοπίσεις είναι ίσες.

9. **α)** Η κλίση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση θέσης-χρόνου είναι ίση με την ταχύτητα του σώματος που κινείται.



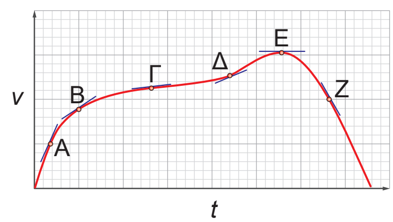
i) Η ταχύτητα είναι μηδέν στα Β, Δ, Ζ, όπου η εφαπτομένη έχει μηδενική κλίση.

ii) Η ταχύτητα είναι θετική στα Γ, Η, όπου η εφαπτομένη έχει θετική κλίση.

iii) Η ταχύτητα είναι αρνητική στα Α, Ε, όπου η εφαπτομένη έχει αρνητική κλίση.

β) Μεγαλύτερο μέτρο έχει η ταχύτητα στο Α, αφού η απόλυτη τιμή της κλίσης της εφαπτομένης σε αυτό το σημείο είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή στα υπόλοιπα σημεία.

10. **α)** Η κλίση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου είναι ίση με την επιτάχυνση του σώματος που κινείται.



i) Η επιτάχυνση είναι μηδέν στο Ε, όπου η εφαπτομένη έχει μηδενική κλίση.

ii) Η επιτάχυνση είναι θετική στα Α, Β, Γ, Δ, όπου η εφαπτομένη έχει θετική κλίση.

iii) Η επιτάχυνση είναι θετική στο Ζ, όπου η εφαπτομένη έχει αρνητική κλίση.

β) Μεγαλύτερο μέτρο έχει η επιτάχυνση στο Ζ, αφού η απόλυτη τιμή της κλίσης της εφαπτομένης σε αυτό το σημείο είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή στα υπόλοιπα σημεία.

11. Από τη σχέση:

$$\Delta x=\frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2$$

προκύπτει ότι η κλίση της δοθείσας γραφικής παράστασης ισούται με το μισό της επιτάχυνσης. Επομένως, με αντικατάσταση έχουμε:

$$\text{Κλίση} = \frac{\Delta(\Delta x)}{\Delta(t^2)} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}a_x = \frac{(4\ \text{m})-(0\ \text{m})}{(4\ \text{s}^2)-(0\ \text{s}^2)}$$

$$\text{ή} \quad a_x = 2\ \text{m/s}^2$$

12. Ένα δευτερόλεπτο μετά το στιγμιότυπο οι ταχύτητες είναι:

$$-1{,}8\ \text{m/s},\ \ +0{,}2\ \text{m/s},\ \ +2{,}2\ \text{m/s}$$

για τις σφαίρες 1, 2 και 3 αντίστοιχα.

Η επιτάχυνση της βαρύτητας κάθε $1\ \text{s}$ μεταβάλλει την ταχύτητα κατά $9{,}8\ \text{m/s}$. Η μεταβολή της ταχύτητας είναι ανεξάρτητη από τη μάζα των σφαιρών.

13. Έστω $v_{1,y}$ η συνιστώσα της ταχύτητας με την οποία φτάνει στο έδαφος η πέτρα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα κάτω και $v_{2,y}$ η συνιστώσα της ταχύτητας με την οποία φτάνει στο έδαφος η πέτρα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω.

Θεωρώντας θετική τη φορά της επιτάχυνσης της βαρύτητας $\vec{g}$, η εξίσωση ταχύτητας:

$$v_y^2 = v_{0,y}^2 + 2a_y y$$

για την πρώτη πέτρα γράφεται:

$$v_{1,y}^2 = v_{0,y}^2 + 2gh \quad \text{ή} \quad v_{1,y} = \sqrt{v_{0,y}^2 + 2gh}$$

και για τη δεύτερη πέτρα γράφεται:

$$v_{2,y}^2 = (-v_{0,y})^2 + 2gh \quad \text{ή} \quad v_{2,y} = \sqrt{v_{0,y}^2 + 2gh}$$

Άρα, οι ταχύτητες με τις οποίες οι πέτρες φτάνουν στο έδαφος είναι ίσες.

14. Οι δύο μπίλιες εκτελούν ελεύθερη πτώση. Για την ξύλινη (1) και τη σιδερένια (2) μπίλια ισχύουν αντίστοιχα:

$$h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \quad \text{και} \quad h_2 = \frac{1}{2}gt_2^2$$

Επειδή $h_1 = 4h_2$, έχουμε:

$$\frac{1}{2}gt_1^2 = 4\cdot\frac{1}{2}gt_2^2 \quad \text{ή} \quad t_1 = \pm 2t_2$$

Αποδεκτή είναι μόνο η θετική λύση. Στην ελεύθερη πτώση ο χρόνος πτώσης δεν εξαρτάται από τη μάζα του σώματος.

15. Για την ελεύθερη πτώση στη Γη και στη Σελήνη ισχύουν αντίστοιχα:

$$h_\Gamma = \frac{1}{2}g_\Gamma t_\Gamma^2 \quad \text{και} \quad h_\Sigma = \frac{1}{2}g_\Sigma t_\Sigma^2$$

Είναι $t_\Gamma = t_\Sigma$ και $g_\Gamma = 6g_\Sigma$. Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{h_\Gamma}{h_\Sigma} = \frac{\frac{1}{2}g_\Gamma t_\Gamma^2}{\frac{1}{2}g_\Sigma t_\Sigma^2} = \frac{6g_\Sigma t_\Sigma^2}{g_\Sigma t_\Sigma^2} = 6$$

16. α) Στη γενική περίπτωση η εξίσωση κίνησης στον y-άξονα δίνεται από τη σχέση:

$$y = y_0 + v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

και το λογισμικό την προσεγγίζει σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$y = \text{C} + \text{B}t + \text{A}t^2$$

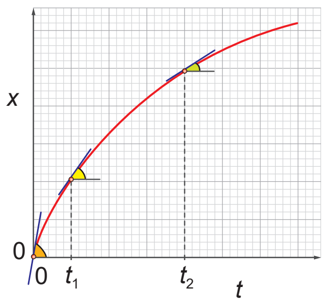
Ο πειραματιστής, όταν αφήνει την μπίλια, μπορεί να της δώσει μια ελάχιστη αρχική ταχύτητα, ώστε η παράμετρος B να μην είναι μηδέν ή να μην τοποθετήσει ακριβώς την αρχή του y-άξονα στην αρχή των αξόνων, ώστε η παράμετρος C να μην είναι ακριβώς μηδέν.

β) Συγκρίνοντας τη συνάρτηση με την εξίσωση κίνησης, η παράμετρος A είναι ίση με $g/2$. Άρα, η πειραματική τιμή του g θα ισούται με το διπλάσιο της παραμέτρου A που θα αναγραφεί από το λογισμικό.

17. Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέγιστο ύψος στο οποίο θα ανέλθει η πέτρα από το εμβαδόν του διαγράμματος ταχύτητας-χρόνου. Έχουμε:

$$h_{\text{max}} = \frac{(10\ \text{m/s})(1\ \text{s})}{2} = 5\ \text{m}$$

18. α) Από την κλίση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση τη χρονική στιγμή $0\ \text{s}$ διαπιστώνουμε ότι υπάρχει αρχική ταχύτητα.



β) Συγκρίνοντας την κλίση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση τη χρονική στιγμή t_1 με την κλίση τη χρονική στιγμή t_2 διαπιστώνουμε ότι $v_1 > v_2$.

19. Από την εξίσωση $y = y_0 + v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2$ βρίσκουμε:

$$y = 20 + 10t - 4{,}9t^2 \quad (\text{SI})$$

20. Ισχύει $v_{B,x} = v_{A,x} + a_x\Delta t$. Για τη μέση ταχύτητα έχουμε:

$$v_\mu = \frac{(A\Gamma)}{2\Delta t} = \frac{v_{A,x}2\Delta t + \frac{1}{2}a_x(2\Delta t)^2}{2\Delta t}$$
$$= v_{A,x} + a_x\Delta t = v_{B,x}$$

Ασκήσεις

1. α) Μελέτη κινήσεων.

- Από 0 s έως 10 s η μοτοσικλέτα εκτελεί ΕΟΜΚ στην οποία η ταχύτητα αυξάνεται. Είναι:

$$v_{0,x} = 0\ \text{m/s} \quad \text{και} \quad v_{10,x} = 10\ \text{m/s}$$

Έχουμε:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{10,x} - v_{0,x}}{t_{10} - t_0}$$
$$= \frac{(10\ \text{m/s}) - (0\ \text{m/s})}{(10\ \text{s}) - (0\ \text{s})} = 1\ \text{m/s}^2$$

και

$$\Delta x = \frac{(10\ \text{m/s})(10\ \text{s})}{2} = 50\ \text{m}$$

Υπολογίζουμε τη θέση x_{10} τη χρονική στιγμή 10 s από τη μετατόπιση:

$$\Delta x = x_{10} - x_0 \ \text{ ή } \ x_{10} = \Delta x$$

οπότε $x_{10} = 50$ m.

- Από 10 s έως 20 s η μοτοσικλέτα εκτελεί ΕΟΚ και ισχύουν:

$$v_{10,x} = 10\ \text{m/s} \quad \text{και} \quad v_{20,x} = 10\ \text{m/s}$$

Έχουμε:

$$\Delta x = (10\ \text{m/s})(10\ \text{s}) = 100\ \text{m}$$

Υπολογίζουμε τη θέση x_{20} τη χρονική στιγμή 20 s από τη μετατόπιση:

$$\Delta x = x_{20} - x_{10} \ \text{ ή } \ x_{20} = x_{10} + \Delta x$$

οπότε:

$$x_{20} = (50\ \text{m}) + (100\ \text{m}) = 150\ \text{m}$$

- Από 20 s έως 25 s η μοτοσικλέτα εκτελεί ΕΟΜΚ στην οποία η ταχύτητα μειώνεται. Είναι:

$$v_{20,x} = 10\ \text{m/s} \quad \text{και} \quad v_{25,x} = 0\ \text{m/s}$$

Έχουμε:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{25,x} - v_{20,x}}{t_{25} - t_{20}}$$
$$= \frac{(0\ \text{m/s}) - (10\ \text{m/s})}{(25\ \text{s}) - (20\ \text{s})} = -2\ \text{m/s}^2$$

και

$$\Delta x = \frac{(10\ \text{m/s})(5\ \text{s})}{2} = 25\ \text{m}$$

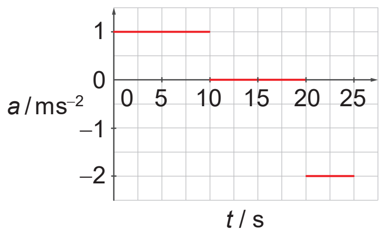
Υπολογίζουμε τη θέση x_{25} τη χρονική στιγμή 25 s από τη μετατόπιση:

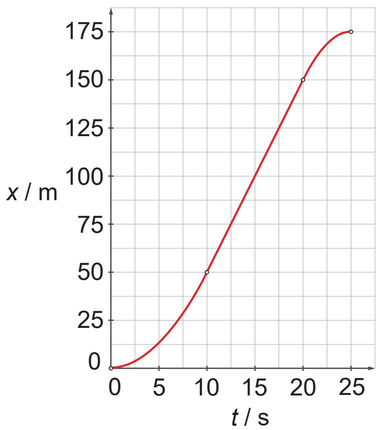
$$\Delta x = x_{25} - x_{20} \ \text{ ή } \ x_{25} = x_{20} + \Delta x$$

οπότε:

$$x_{25} = (150\ \text{m}) + (25\ \text{m}) = 175\ \text{m}$$

β) Διαγράμματα επιτάχυνσης-χρόνου και θέσης-χρόνου.





γ) Μπορούμε να υπολογίσουμε το διάστημα που διάνυσε η μοτοσικλέτα από το εμβαδόν του διαγράμματος ταχύτητας-χρόνου (εμβαδόν τραπεζίου):

$$s = \frac{(25\ \mathrm{m/s}) + (10\ \mathrm{m/s})}{2}(10\ \mathrm{s}) = 175\ \mathrm{m}$$

Η μέση ταχύτητα της μοτοσικλέτας στο χρονικό διάστημα από $0\ \mathrm{s}$ έως $25\ \mathrm{s}$ είναι:

$$v_\mu = \frac{s}{\Delta t} = \frac{175\ \mathrm{m}}{25\ \mathrm{s}} = 7\ \mathrm{m/s}$$

2. α) Από $0\ \mathrm{s}$ έως $10\ \mathrm{s}$ το αυτοκίνητο εκτελεί ΕΟΚ με ταχύτητα:

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{10} - x_0}{t_{10} - t_0} = \frac{(200\ \mathrm{m}) - (0\ \mathrm{m})}{(10\ \mathrm{s}) - (0\ \mathrm{s})} = 20\ \mathrm{m/s}$$

Από $10\ \mathrm{s}$ έως $20\ \mathrm{s}$ το αυτοκίνητο είναι ακίνητο:

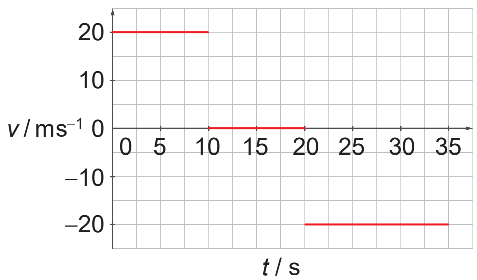
$$v_2 = 0\ \mathrm{m/s}$$

Από $20\ \mathrm{s}$ έως $35\ \mathrm{s}$ το αυτοκίνητο εκτελεί ΕΟΚ με ταχύτητα:

$$v_3 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{35} - x_{20}}{t_{35} - t_{20}}$$

$$= \frac{(-100\ \mathrm{m}) - (200\ \mathrm{m})}{(35\ \mathrm{s}) - (20\ \mathrm{s})} = -20\ \mathrm{m/s}$$

β) Διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου.



3. • 1ο αυτοκίνητο

Διάστημα που διάνυσε στα πρώτα $15\ \mathrm{min}$:

$$s_1 = \left(80\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)\left(\frac{15}{60}\ \mathrm{h}\right) = 20\ \mathrm{km}$$

Διάστημα που διάνυσε στα επόμενα $15\ \mathrm{min}$:

$$s_1' = \left(90\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)\left(\frac{15}{60}\ \mathrm{h}\right) = 22{,}5\ \mathrm{km}$$

Επομένως, η μέση αριθμητική ταχύτητα του 1ου είναι:

$$v_1 = \frac{(20\ \mathrm{km}) + (22{,}5\ \mathrm{km})}{0{,}5\ \mathrm{h}} = 85\ \mathrm{km/h}$$

• 2ο αυτοκίνητο

Χρόνος για τα πρώτα $60\ \mathrm{km}$:

$$t_2 = \frac{60\ \mathrm{km}}{80\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = \frac{3}{4}\ \mathrm{h} = 0{,}75\ \mathrm{h}$$

Χρόνος για τα επόμενα $60\ \mathrm{km}$:

$$t_2' = \frac{60\ \mathrm{km}}{60\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = 1\ \mathrm{h}$$

Επομένως, η μέση αριθμητική ταχύτητα του 2ου είναι:

$$v_2 = \frac{120\ \mathrm{km}}{(0{,}75\ \mathrm{h}) + (1\ \mathrm{h})} = 68{,}6\ \mathrm{km/h}$$

4. Έστω ότι το όχημα κινείται κατά μήκος του x-άξονα. Ισχύει:

$$v_x = v_{0,x} + a_x \Delta t \quad \text{ή} \quad 2v_{0,x} = v_{0,x} + a_x \Delta t$$

οπότε:

$$a_x = \frac{v_{0,x}}{\Delta t} = \frac{10\ \mathrm{m/s}}{5\ \mathrm{s}} = 2\ \mathrm{m/s^2}$$

Επομένως, το διάστημα που διάνυσε το όχημα στα $5\ \mathrm{s}$ είναι:

$$s = v_{0,x} t + \frac{1}{2} a_x (\Delta t)^2$$

$$= (10\ \mathrm{m/s})(5\ \mathrm{s}) + \frac{1}{2}(2\ \mathrm{m/s^2})(5\ \mathrm{s})^2$$

$$= 75\ \mathrm{m}$$

5. Έστω ότι το αυτοκίνητο φρενάρει κατά μήκος του x-άξονα.
Η αρχική του ταχύτητα είναι:

$$72\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 72 \cdot \frac{1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Ισχύει:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{(0\ \mathrm{m/s}) - (20\ \mathrm{m/s})}{10\ \mathrm{s}} = -2\ \mathrm{m/s^2}$$

Θα υπολογίσουμε τη μετατόπιση από τη σχέση ταχύτητας-μετατόπισης:

$$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2a_x \Delta x \quad \text{ή} \quad \Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0,x}^2}{2a_x}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$\Delta x = \frac{(0\ \text{m/s})^2 - (20\ \text{m/s})^2}{2(-2\ \text{m/s}^2)} = 100\ \text{m}$$

6. α) Για την επιταχυνόμενη κίνηση ισχύει:

$$v_{1,x} = a_{1,x}\Delta t_1 \ \ \text{ή}\ \ \Delta t_1 = \frac{v_{1,x}}{a_{1,x}}$$

και με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$\Delta t_1 = \frac{20\ \text{m/s}}{2\ \text{m/s}^2} = 10\ \text{s}$$

Για την επιβραδυνόμενη κίνηση ισχύει:

$$v_{3,x} = v_{2,x} - a_{3,x}\Delta t_3 \ \ \text{ή}\ \ \Delta t_3 = \frac{v_{3,x} - v_{2,x}}{a_{3,x}}$$

και με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$\Delta t_3 = \frac{(0\ \text{m/s}) - (20\ \text{m/s})}{-2{,}5\ \text{m/s}^2} = 8\ \text{s}$$

Από τον συνολικό χρόνο κίνησης υπολογίζουμε τη χρονική διάρκεια της ΕΟΚ:

$$\Delta t_2 = (30\ \text{s}) - (10\ \text{s}) - (8\ \text{s}) = 12\ \text{s}$$

β) Έχουμε:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}a_{1,x}(\Delta t_1)^2 = \frac{1}{2}(2\ \text{m/s}^2)(10\ \text{s})^2 = 100\ \text{m}$$

$$\Delta x_2 = v_{1,x}\Delta t_2 = (20\ \text{m/s})(12\ \text{s}) = 240\ \text{m}$$

$$\Delta x_3 = v_{1,x}\Delta t_3 + \frac{1}{2}a_{3,x}(\Delta t_3)^2$$

$$= (20\ \text{m/s})(8\ \text{s}) + \frac{1}{2}(-2{,}5\ \text{m/s}^2)(8\ \text{s})^2$$

$$= 80\ \text{m}$$

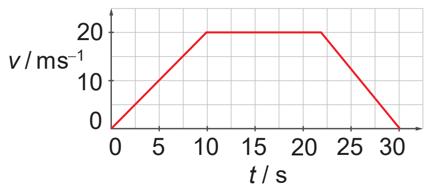
Επομένως:

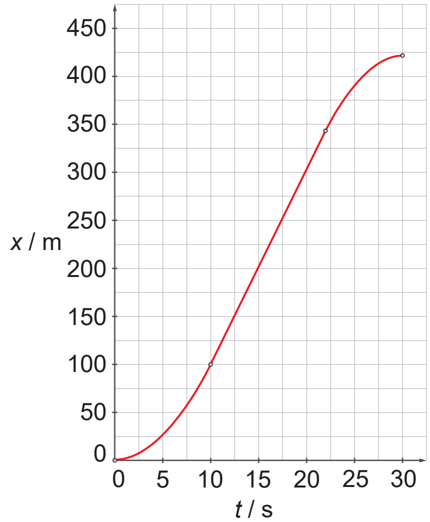
$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$$

$$= (100 + 240 + 80)\ \text{m}$$

$$= 420\ \text{m}$$

γ) Διαγράμματα επιτάχυνσης, ταχύτητας και θέσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.





7. α) Οι εξισώσεις κίνησης των δύο αμαξιδίων είναι:

$$x_1 = \frac{1}{2}a_{1,x}t^2 = \frac{1}{2}\cdot 2t^2 \ \ \text{ή}\ \ x_1 = t^2 \ \ (\text{SI}) \quad (1)$$

$$x_2 = x_{0,2} + v_{2,x}t \ \ \text{ή}\ \ x_2 = x_{0,2} - 5t \ \ (\text{SI}) \quad (2)$$

Για $t = 1\ \text{s}$ δίνεται ότι $x_2 = 31\ \text{m}$. Επομένως, από τη (2) προκύπτει $x_{0,2} = 36\ \text{m}$, οπότε η εξίσωση κίνησης του δεύτερου αμαξιδίου γράφεται:

$$x_2 = 36 - 5t \ \ (\text{SI}) \quad (2')$$

β) Τη στιγμή της συνάντησης ισχύει:

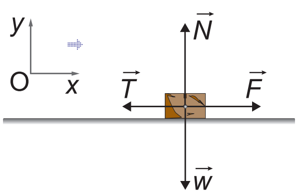
$$x_1 = x_2 \ \ \text{ή}\ \ t^2 = 36 - 5t \ \ \text{ή}\ \ t^2 + 5t - 36 = 0 \ \ (\text{SI})$$

Επιλύοντας βρίσκουμε διακρίνουσα ίση με 169 και ρίζες 4, –9.

Η αρνητική τιμή απορρίπτεται, οπότε $t = 4$ s.

Από την (1) ή τη (2′) για $t = 4$ s προκύπτει ότι η συνάντηση συμβαίνει στη θέση $x_1 = x_2 = 16$ m.

8. α) Πριν από την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$.



Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα στον y-άξονα:

$$\Sigma F_y = 0 \text{ ή } N - w = 0 \text{ ή } N = mg$$

Από τον Νόμο της τριβής έχουμε:

$$T = \mu N = \mu mg = (0{,}2)(10\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2) = 20\ \text{N}$$

Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα στον x-άξονα:

$$\Sigma F_x = ma_x \text{ ή } F - T = ma_x \text{ ή } a_x = \frac{F-T}{m}$$

Με αντικατάσταση των τιμών βρίσκουμε τελικά $a_x = 1\ \text{m/s}^2$.

Για τη χρονική στιγμή της κατάργησης, από τη σχέση $\Delta x = \frac{1}{2}a_x t^2$ προκύπτει:

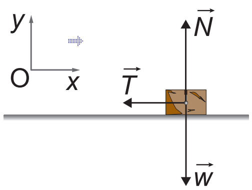
$$8\ \text{m} = \frac{1}{2}(1\ \text{m/s}^2)t^2$$

από την οποία βρίσκουμε $t = 4$ s.

Η ταχύτητα εκείνη τη χρονική στιγμή είναι:

$$v_x = a_x t = (1\ \text{m/s}^2)(4\ \text{s}) = 4\ \text{m/s}$$

β) Μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$.



Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα στον x-άξονα:

$$\Sigma F_x = ma_x \text{ ή } -T = ma'_x \text{ ή } a'_x = -\frac{T}{m}$$

Με αντικατάσταση των τιμών βρίσκουμε τελικά $a'_x = -2\ \text{m/s}^2$.

Θα υπολογίσουμε τη μετατόπιση από τη σχέση ταχύτητας-μετατόπισης:

$$v'^2_x = v^2_x + 2a'_x\Delta x' \text{ ή } \Delta x' = \frac{v'^2_x - v^2_x}{2a_x}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$\Delta x' = \frac{(0\ \text{m/s})^2 - (4\ \text{m/s})^2}{2(-2\ \text{m/s}^2)} = 4\ \text{m}$$

Άρα, το συνολικό διάστημα είναι:

$$s = (8\ \text{m}) + (4\ \text{m}) = 12\ \text{m}$$

9. α) Ένα παράδειγμα είναι όταν πετάμε ένα μπαλάκι κατακόρυφα προς τα πάνω. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι σταθερή με κατεύθυνση κατακόρυφη προς το κέντρο της Γης, ενώ η ταχύτητα κατά την άνοδο έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα κατά την κάθοδο.

β) Η ταχύτητα αλλάζει κατεύθυνση τη χρονική στιγμή 5 s. Η επιτάχυνση υπολογίζεται από την κλίση της γραφικής παράστασης:

$$\text{Κλίση} = a_x = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{10} - v_0}{t_{10} - t_0}$$

$$= \frac{(-10\ \text{m/s}) - (10\ \text{m/s})}{(10\ \text{s}) - (0\ \text{s})} = -2\ \text{m/s}^2$$

γ) Τα τρίγωνα που σχηματίζονται είναι ίσα και έχουν «εμβαδόν»:

$$\frac{1}{2}(5\ \text{s})(10\ \text{m/s}) = 25\ \text{m}$$

Από αυτό θα υπολογίσουμε τη μετατόπιση στο χρονικό διάστημα 0 s - 10 s:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = (+25\ \text{m}) + (-25\ \text{m}) = 0\ \text{m}$$

Το διάστημα είναι:

$$s = s_1 + s_2 = (25\ \text{m}) + (25\ \text{m}) = 50\ \text{m}$$

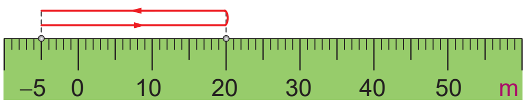
δ) Την τυχαία χρονική στιγμή t είναι $\Delta t = t - 0 = t$, οπότε η εξίσωση της τροχιάς γράφεται:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

και βρίσκουμε:

$$x = -5 + 10t - t^2 \quad \text{(SI)}$$

Για $t = 0$ είναι $x = -5$ m, για $t = 5$ s προκύπτει $x = 20$ m και για $t = 10$ s προκύπτει $x = -5$ m.



Δηλαδή το σώμα στο δοθέν χρονικό διάστημα μετακινήθηκε από τη θέση -5 m στη θέση 20 m όπου άλλαξε φορά κίνησης και επέστρεψε στην αρχική του θέση.

10. α) Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το μήκος της γέφυρας είναι 2700 m και ότι η συνάντηση πραγματοποιείται τη χρονική στιγμή $t = 5$ min στη θέση $x = 1800$ m.

Το διάστημα που διανύει ο πρώτος ποδηλάτης είναι:

$$s_1 = |\Delta x_1| = |x_{1,\tau\varepsilon\lambda} - x_{1,\alpha\rho\chi}|$$
$$= |1800 - 0|\ \text{m} = 1800\ \text{m}$$

Το διάστημα που διανύει ο δεύτερος ποδηλάτης είναι:

$$s_2 = |\Delta x_2| = |x_{2,\tau\varepsilon\lambda} - x_{2,\alpha\rho\chi}|$$
$$= |1800 - 2700|\ \text{m} = 900\ \text{m}$$

β) Είναι $5\ \text{min} = 300\ \text{s}$. Για τις ταχύτητες έχουμε:

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = \frac{1800\ \text{m}}{300\ \text{s}} = 6\ \text{m/s}$$

$$v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t} = \frac{-900\ \text{m}}{300\ \text{s}} = -3\ \text{m/s}$$

Οι εξισώσεις θέσης είναι:

$$x_1 = 6t\ \ (\text{SI})\ \ \text{και}\ \ x_2 = 2700 - 3t\ \ (\text{SI})$$

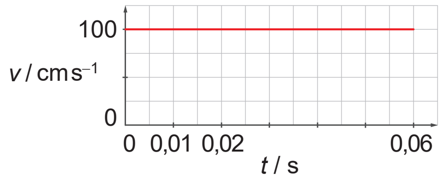
γ) Για $x_1 = 2700\ \text{m}$ από την εξίσωση θέσης βρίσκουμε $t_1 = 450\ \text{s}$, που είναι ο χρόνος κίνησης του πρώτου ποδηλάτη πάνω στη γέφυρα. Για $x_2 = 0\ \text{m}$ από την εξίσωση θέσης βρίσκουμε $t_2 = 900\ \text{s}$, που είναι ο χρόνος κίνησης του δεύτερου ποδηλάτη πάνω στη γέφυρα.

11. α) Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή. Αφού οι κουκκίδες ισαπέχουν, το σώμα που κινείται διανύει σε ίσους χρόνους ίσα διαστήματα.

β) Συμπληρωμένος πίνακας.

t / s	x / cm	Δt / s	Δx / cm	v / cms^{-1}
0	0,5			
0,01	1,5	0,01 – 0 = 0,01	1,5 – 0,5 = 1	100
0,02	2,5	0,02 – 0,01 = 0,01	2,5 – 1,5 = 1	100
0,03	3,5	0,03 – 0,02 = 0,01	3,5 – 2,5 = 1	100
0,04	4,5	0,04 – 0,03 = 0,01	4,5 – 3,5 = 1	100
0,05	5,5	0,05 – 0,04 = 0,01	5,5 – 4,5 = 1	100
0,06	6,5	0,06 – 0,05 = 0,01	6,5 – 5,5 = 1	100

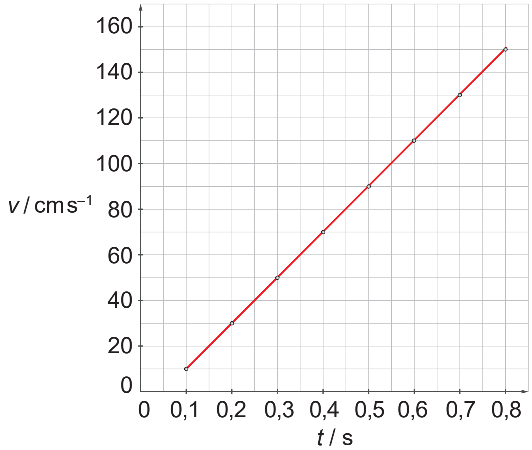
γ) Διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου.



12. α) Συμπληρωμένος πίνακας.

t / s	x / cm	Δt / s	Δx / cm	v / cms^{-1}	Δv / cms^{-1}	a / cms^{-2}
0	0			10		
0,1	1	0,1 – 0 = 0,1	1 – 0 = 1	30	30 – 10 = 20	200
0,2	4	0,2 – 0,1 = 0,1	4 – 1 = 3	50	50 – 30 = 20	200
0,3	9	0,3 – 0,2 = 0,1	9 – 4 = 5	70	70 – 50 = 20	200
0,4	16	0,4 – 0,3 = 0,1	16 – 9 = 7	90	90 – 70 = 20	200
0,5	25	0,5 – 0,4 = 0,1	25 – 16 = 9	110	110 – 90 = 20	200
0,6	36	0,6 – 0,5 = 0,1	36 – 25 = 11	130	150 – 130 = 20	200

β) Διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου.



γ) Η επιτάχυνση υπολογίζεται από την κλίση της γραφικής παράστασης:

$$\text{Κλίση} = a_x = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$= \frac{(150\ \text{cm/s}) - (10\ \text{cm/s})}{(0{,}8\ \text{s}) - (0{,}1\ \text{s})} = 200\ \text{cm/s}^2$$

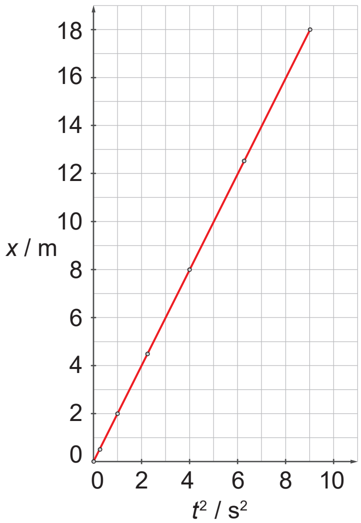
Γράφουμε τώρα τις εξισώσεις κίνησης:

$$v = 2\Delta t\ \ (\text{SI}) \quad \text{και} \quad \Delta x = (\Delta t)^2\ \ (\text{SI})$$

13. α) Συμπληρωμένος πίνακας.

t / s	t^2 / s^2	x / m
0	0,00	0,0
0,5	0,25	0,5
1,0	1,00	2,0
1,5	2,25	4,5
2,0	4,00	8,0
2,5	6,25	12,5
3,0	9,00	18,0
3,5	12,25	23,0
4,0	16,00	28,0
4,5	20,25	33,0
5,0	25,00	38,0

Διάγραμμα θέσης-τετραγώνου χρόνου.



β) Από τη σχέση:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_x (\Delta t)^2$$

προκύπτει ότι η κλίση της δοθείσας γραφικής παράστασης ισούται με το μισό της επιτάχυνσης. Επομένως, με αντικατάσταση έχουμε:

$$\text{Κλίση} = \frac{\Delta x}{\Delta (t^2)} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} a_x = \frac{(18\ \text{m}) - (0\ \text{m})}{(9\ \text{s}^2) - (0\ \text{s}^2)}$$

και βρίσκουμε $a_x = 4\ \text{m/s}^2$.

γ) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\ \text{s}$ η κίνηση είναι ΕΟΜΚ, οπότε ο αθλητής έχει ταχύτητα:

$$v_1 = a_x t_1 = (4\ \text{m/s}^2)(2\ \text{s}) = 8\ \text{m/s}$$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 3\ \text{s}$ ο αθλητής έχει ταχύτητα:

$$v_2 = a_x t_2 = (4\ \text{m/s}^2)(3\ \text{s}) = 12\ \text{m/s}$$

και στη συνέχεια, όπως φαίνεται από τα δεδομένα, η κίνησή του είναι ΕΟΚ.

Άρα, τη χρονική στιγμή $t_3 = 4\ \text{s}$ ο αθλητής έχει ταχύτητα $12\ \text{m/s}$.

14. α) Από τη δοθείσα προκύπτουν:

$x_0 = 30\ \text{cm}$, $v_{0,x} = 10\ \text{cm/s}$ και $a_x = -5\ \text{cm/s}^2$

Η εξίσωση ταχύτητας $v = v_{0,x} + a_x t$ γράφεται:

$$v = 10 - 5t \quad (v \text{ σε cm/s και } t \text{ σε s})$$

Για $v = 0$ βρίσκουμε $t = 2\ \text{s}$, που είναι η χρονική στιγμή στην οποία το αυτοκινητάκι αλλάζει κατεύθυνση. Εκείνη τη χρονική στιγμή η θέση είναι:

$$x = (30 + 10 \cdot 2 - 2{,}5 \cdot 2^2)\ \text{cm} = 40\ \text{cm}$$

β) Η εξίσωση θέσης για $x = x_0 = 30\ \text{cm}$ γράφεται:

$$30 = 30 + 10t - 2{,}5t^2$$

$$2{,}5t(4 - t) = 0$$

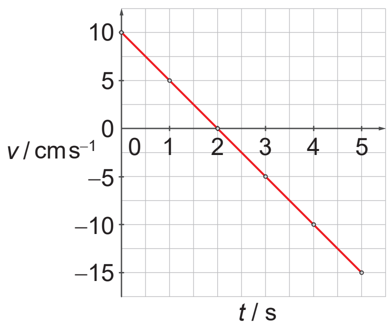
και βρίσκουμε:

$$t = 0\ \text{s} \quad \text{ή} \quad t = 4\ \text{s}$$

Από την αρχική θέση θα περάσει ξανά τη χρονική στιγμή $t = 4\ \text{s}$ με ταχύτητα:

$$v = (10 - 5 \cdot 4)\ \text{cm/s} = -10\ \text{cm/s}$$

γ) Διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου.



15. Στη μελέτη των επιμέρους κινήσεων, από την κλίση της γραφικής παράστασης υπολογίζουμε την επιτάχυνση και από το εμβαδόν υπολογίζουμε τη μετατόπιση του σώματος. Στη συνέχεια, με εφαρμογή του 2ου Νόμου του Νεύτωνα υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη στο x-άξονα.

- Από $0\ \text{s}$ έως $5\ \text{s}$ το σώμα εκτελεί ΕΟΜΚ κατά την οποία η ταχύτητα αυξάνεται. Είναι:

  $$v_{0,x} = 5\ \text{m/s} \quad \text{και} \quad v_{5,x} = 10\ \text{m/s}$$

  Η επιτάχυνση είναι:

  $$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{5,x} - v_{0,x}}{t_5 - t_0} = \frac{(10\ \text{m/s}) - (5\ \text{m/s})}{(5\ \text{s}) - (0\ \text{s})} = 1\ \text{m/s}^2$$

  οπότε:

  $$\Sigma F_x = ma_x = (1\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) = 1\ \text{N}$$

  Η μετατόπιση είναι:

  $$\Delta x_1 = \frac{(10\ \text{m/s}) + (5\ \text{m/s})}{2}(5\ \text{s}) = 37{,}5\ \text{m}$$

  οπότε:

  $$s_1 = \Delta x_1 = 37{,}5\ \text{m}$$

- Από $5\ \text{s}$ έως $10\ \text{s}$ το σώμα εκτελεί ΕΟΚ και είναι:

  $$v_{5,x} = 10\ \text{m/s} \quad \text{και} \quad v_{10,x} = 10\ \text{m/s}$$

  Η επιτάχυνση είναι $a_x = 0\ \text{m/s}^2$, οπότε:

  $$\Sigma F_x = 0\ \text{N}$$

  Η μετατόπιση είναι:

  $$\Delta x_2 = (10\ \text{m/s})(5\ \text{s}) = 50\ \text{m}$$

  οπότε:

  $$s_2 = \Delta x_2 = 50\ \text{m}$$

- Από $10\ \text{s}$ έως $15\ \text{s}$ το σώμα εκτελεί ΕΟΜΚ κατά την οποία η ταχύτητα μειώνεται και τη χρονική στιγμή $15\ \text{s}$ μηδενίζεται στιγμιαία. Είναι:

  $$v_{10,x} = 10\ \text{m/s} \quad \text{και} \quad v_{15,x} = 0\ \text{m/s}$$

  Η επιτάχυνση είναι:

  $$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{15,x} - v_{10,x}}{t_{15} - t_{10}} = \frac{(0\ \text{m/s}) - (10\ \text{m/s})}{(15\ \text{s}) - (10\ \text{s})} = -2\ \text{m/s}^2$$

  οπότε:

  $$\Sigma F_x = ma_x = (1\ \text{kg})(-2\ \text{m/s}^2) = -2\ \text{N}$$

  Η μετατόπιση είναι:

  $$\Delta x_3 = \frac{(10\ \text{m/s})(5\ \text{s})}{2} = 25\ \text{m}$$

  οπότε:

  $$s_3 = \Delta x_3 = 25\ \text{m}$$

- Από $15\ \text{s}$ έως $20\ \text{s}$ το σώμα εκτελεί ΕΟΜΚ προς την αρνητική φορά του x-άξονα με το μέτρο της ταχύτητας να αυξάνεται. Είναι:

  $$v_{15,x} = 0\ \text{m/s} \quad \text{και} \quad v_{20,x} = -10\ \text{m/s}$$

  Η επιτάχυνση είναι:

  $$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{20,x} - v_{15,x}}{t_{20} - t_{15}} = \frac{(-10\ \text{m/s}) - (0\ \text{m/s})}{(20\ \text{s}) - (15\ \text{s})} = -2\ \text{m/s}^2$$

  οπότε:

  $$\Sigma F_x = ma_x = (1\ \text{kg})(-2\ \text{m/s}^2) = -2\ \text{N}$$

  Η μετατόπιση είναι:

  $$\Delta x_4 = \frac{(-10\ \text{m/s})(5\ \text{s})}{2} = -25\ \text{m}$$

  οπότε:

  $$s_4 = |\Delta x_4| = 25\ \text{m}$$

α) Βρήκαμε $\Delta x_1 = 37{,}5\ \text{m}$.

β) Η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι:

$$v_\mu = \frac{s_{ολ}}{\Delta t} = \frac{(37{,}5 + 50 + 25 + 25)\ \text{m}}{(20 - 0)\ \text{s}} = 6{,}875\ \text{m/s}$$

γ) Έχει απαντηθεί κατά τη μελέτη των επιμέρους κινήσεων.

16. α) Έστω ότι το σκάφος κινείται κατά μήκος του x-άξονα.
Με αντικατάσταση των τιμών στο SI η εξίσωση μετατόπισης:

$$\Delta x = v_{0,x}\Delta t + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2$$

για $\Delta t = t$ γράφεται:

$$84 = 20t + \frac{1}{2}(-2)t^2 \quad \text{ή} \quad t^2 - 20t + 84 = 0 \ \ (\text{SI})$$

Επιλύοντας βρίσκουμε διακρίνουσα ίση με 64 και ρίζες 6, 14.
Δεχόμαστε ως λύση την $t = 6\ \text{s}$, καθώς η $t = 14\ \text{s}$ αντιπροσωπεύει τη χρονική στιγμή που το σκάφος, κινούμενο προς τα πίσω, ξαναπερνά (2η φορά) από τη σημαδούρα.

β) Η ταχύτητα του σκάφους τη χρονική στιγμή $6\ \text{s}$ είναι:

$$v = v_{0,x} + a_x t$$
$$= (20\ \text{m/s}) + (-2\ \text{m/s}^2)(6\ \text{s}) = 8\ \text{m/s}$$

γ) Θα υπολογίσουμε τη ζητούμενη απόσταση από τη σχέση ταχύτητας-μετατόπισης:

$$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2a_x \Delta x \ \text{ ή } \ \Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0,x}^2}{2a_x}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$\Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0,x}^2}{2a_x} = \frac{-(20\ \text{m/s})^2}{2(-2\ \text{m/s}^2)} = 100\ \text{m}$$

17. Θεωρούμε ότι το σώμα κάνει ελεύθερη πτώση από ύψος H πάνω από την κορυφή του παραθύρου. Με αντικατάσταση των τιμών στην εξίσωση μετατόπισης:

$$\Delta y = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$$

θα υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_0$ που έχει το σώμα στην κορυφή του παραθύρου:

$$2\ \text{m} = v_0 (0{,}4\ \text{s}) + (4{,}9\ \text{m/s}^2)(0{,}4\ \text{s})^2$$

από την οποία βρίσκουμε $v_0 = 3{,}04\ \text{m/s}$.
Ο χρόνος καθόδου t του σώματος από το σημείο εκκίνησης μέχρι την κορυφή του παράθυρου υπολογίζεται από την εξίσωση ταχύτητας $v = g \cdot \Delta t$ για $v = v_0$ και $\Delta t = t$:

$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{3{,}04\ \text{m/s}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 0{,}31\ \text{s}$$

Επομένως:

$$H = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} (9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}31\ \text{s})^2$$
$$= 0{,}471\ \text{m} = 47{,}1\ \text{cm}$$

18. Αν h το ύψος του βράχου και t ο χρόνος πτώσης της πέτρας, έχουμε:

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \ \text{ ή } \ t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Ο χρόνος ανόδου του ήχου είναι:

$$t' = \frac{h}{v}$$

Το άθροισμα των δύο χρονικών διαστημάτων είναι ίσο με $2{,}1\ \text{s}$. Επομένως:

$$\sqrt{\frac{2h}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} + \frac{h}{340\ \text{m/s}} = 2{,}1\ \text{s}$$

Βρίσκουμε τελικά $h = 20{,}4\ \text{m}$.

19. Θεωρούμε ως αρχή του y-άξονα, που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το ελικόπτερο, ένα σημείο του εδάφους και θετική φορά προς τα πάνω.
α) Από την εξίσωση ταχύτητας $v_y = v_{0,y} - gt$ για $v_y = 0$ υπολογίζουμε τον χρόνο ανόδου t_α:

$$0 = v_{0,y} - g t_\alpha \ \text{ ή } \ t_\alpha = \frac{v_{0,y}}{g}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$t_\alpha = \frac{9{,}8\ \text{m/s}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 1\ \text{s}$$

Από την εξίσωση θέσης $y = y_0 + v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2$ για $t = t_\alpha$ υπολογίζουμε το μέγιστο ύψος h:

$$h = y_0 + v_{0,y} t_\alpha - \frac{1}{2} g t_\alpha^2$$
$$= (4{,}9\ \text{m}) + (9{,}8\ \text{m/s})(1\ \text{s}) - \frac{1}{2}(9{,}8\ \text{m/s}^2)(1\ \text{s})^2$$
$$= 9{,}8\ \text{m}$$

β) Από την εξίσωση ταχύτητας $v_y = v_{0,y} - gt$ για $v_y = -9{,}8\ \text{m/s}$ υπολογίζουμε τη ζητούμενη χρονική στιγμή t_1:

$$t_1 = \frac{v_{0,y} - v_y}{g} = \frac{(9{,}8\ \text{m/s}) - (-9{,}8\ \text{m/s})}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 2\ \text{s}$$

γ) Μπορούμε να θεωρήσουμε κάθοδο του σώματος ως ελεύθερη πτώση από το μέγιστο ύψος. Για τον χρόνο καθόδου t_κ έχουμε:

$$h = \frac{1}{2} g t_\kappa^2 \ \text{ ή } \ t_\kappa = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Με αντικατάσταση των τιμών βρίσκουμε τελικά $t_\kappa = \sqrt{2}\ \text{s} \approx 1{,}41\ \text{s}$, οπότε:

$$v_y = g t_\kappa = 13{,}9\ \text{m/s}$$

Εναλλακτικά, υπολογίζουμε τον ολικό χρόνο πτήσης $t_{ολ}$ θέτοντας $y = 0\ \text{m}$ στην αρχική εξίσωση $y = y_0 + v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2$. Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$(4{,}9\ \text{m}) + (9{,}8\ \text{m/s}) t - \frac{1}{2}(9{,}8\ \text{m/s}^2) t^2 = 0\ \text{m}$$
$$t^2 - 2t - 1 = 0 \ \ (\text{SI})$$

Επιλύοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση, δεχόμαστε τη θετική λύση, οπότε $t_{ολ} = (1 + \sqrt{2})\ \text{s} \approx 2{,}41\ \text{s}$.

Θέτουμε αυτήν τη λύση στην εξίσωση ταχύτητας και έχουμε:

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0,y} - g t_{ολ} \\ &= (9{,}8\ \mathrm{m/s}) - (9{,}8\ \mathrm{m/s^2})(2{,}41\ \mathrm{s}) \\ &= 13{,}9\ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

20. Από την εξίσωση $h = \frac{1}{2}gt^2$ υπολογίζουμε τον χρόνο πτώσης:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(3000\ \mathrm{m})}{9{,}8\ \mathrm{m/s^2}}} = 24{,}74\ \mathrm{s}$$

Η ταχύτητα προσγείωσης είναι:

$$v = gt = (9{,}8\ \mathrm{m/s^2})(24{,}74\ \mathrm{s}) = 242{,}5\ \mathrm{m/s}$$

$$= \left(242{,}5 \cdot \frac{3600}{1000}\right) \mathrm{km/h} = 873\ \mathrm{km/h}$$

21. α) Ο χρόνος πτώσης του πρώτου χαλικιού είναι:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(78{,}4)}{9{,}8\ \mathrm{m/s^2}}} = 4\ \mathrm{s}$$

Η ταχύτητα προσγείωσης είναι:

$$v_1 = g t_1 = (9{,}8\ \mathrm{m/s^2})(4\ \mathrm{s}) = 39{,}2\ \mathrm{m/s}$$

β) Ο χρόνος κίνησης του δεύτερου χαλικιού είναι $t_2 = 3\ \mathrm{s}$, οπότε η μετατόπισή του είναι:

$$y_2 = \frac{1}{2} g t_2^2 = \frac{1}{2}(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})(3\ \mathrm{s})^2 = 44{,}1\ \mathrm{m}$$

Άρα, το ύψος από το έδαφος είναι:

$$h = (78{,}4\ \mathrm{m}) - (44{,}1\ \mathrm{m}) = 34{,}3\ \mathrm{m}$$

22. Με αντικατάσταση των τιμών στην εξίσωση κίνησης $\Delta y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ θα υπολογίσουμε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας:

$$39{,}6\ \mathrm{m} = v_0 (2\ \mathrm{s}) + \frac{1}{2}(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})(2\ \mathrm{s})^2$$

$$v_0 = 10\ \mathrm{m/s}$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας $v = v_0 + gt$ έχουμε:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + gt \\ &= (10\ \mathrm{m/s}) + (9{,}8\ \mathrm{m/s^2})(2\ \mathrm{s}) = 29{,}6\ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

23. α) Θεωρούμε ως αρχή του y-άξονα, που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με την μπίλια, ένα σημείο του εδάφους και θετική φορά προς τα πάνω.

Οι εξισώσεις κίνησης της μπίλιας είναι:

- $v_y = v_{0,y} - gt$ και με αντικατάσταση προκύπτει:

$$v_y = 20 - 10t\ \ (\mathrm{SI}) \quad (1)$$

- $\Delta y = v_{0,y} t - \frac{1}{2}gt^2$ και με αντικατάσταση προκύπτει:

$$\Delta y = 20t - 5t^2\ \ (\mathrm{SI}) \quad (2)$$

Στο μέγιστο ύψος ισχύει $v_y = 0\ \mathrm{m/s}$ και αντικαθιστώντας στην (1) υπολογίζουμε τον χρόνο ανόδου:

$$0 = 20 - 10 t_α \ \text{ ή } \ t_α = 2\ \mathrm{s}$$

Από τη (2) για $t = t_α = 2\ \mathrm{s}$ υπολογίζουμε το μέγιστο ύψος:

$$h_{max} = (20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2)\ \mathrm{m} = 20\ \mathrm{m}$$

β) Από τη (2) για $\Delta y = 0$ υπολογίζουμε τον ολικό χρόνο πτήσης:

$$0 = 20t - 5t^2 \ \text{ ή } \ 5t(t - 4) = 0$$

Προκύπτουν οι λύσεις $t = 0\ \mathrm{s}$ (η χρονική στιγμή της εκτόξευσης) και $t = 4\ \mathrm{s}$ που είναι ο ολικός χρόνος πτήσης, δηλαδή $t_{ολ} = 4\ \mathrm{s}$.

Αντικαθιστούμε το $t_{ολ} = 4\ \mathrm{s}$ στην εξίσωση (1) και έχουμε:

$$v_y = (20 - 10 \cdot 4)\ \mathrm{m/s} = -20\ \mathrm{m/s}$$

γ) Από τη (2) για $\Delta y = 15\ \mathrm{m}$ υπολογίζουμε τις χρονικές στιγμές στις οποίες η μπίλια βρίσκεται σε ύψος $15\ \mathrm{m}$:

$$15 = 20t - 5t^2 \ \text{ ή } \ t^2 - 4t + 3 = 0$$

Επιλύοντας βρίσκουμε $t_1 = 1\ \mathrm{s}$ και $t_2 = 3\ \mathrm{s}$.

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (1) υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές της ταχύτητας.

Για $t_1 = 1\ \mathrm{s}$ έχουμε:

$$v_1 = 20 - 10 \cdot 1 = 10\ \mathrm{m/s}$$

Για $t_2 = 3\ \mathrm{s}$ έχουμε:

$$v_2 = 20 - 10 \cdot 3 = -10\ \mathrm{m/s}$$

2.5 Περιοδικές κινήσεις – Ομαλή κυκλική κίνηση

Ερωτήσεις

1. Παραδείγματα.

- Μηδενική επιτάχυνση και ταχύτητα σταθερού μέτρου: Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ευθεία με σταθερή ταχύτητα.
- Μη μηδενική επιτάχυνση και ταχύτητα σταθερού μέτρου: Ένα αυτοκίνητο κινείται σε κυκλικό κόμβο με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα.
- Δεν υπάρχει καμπυλόγραμμη κίνηση με μηδενική επιτάχυνση. Στις καμπυλόγραμμες κινήσεις αλλάζει οπωσδήποτε η διεύθυνση της ταχύτητας, οπότε υπάρχει πάντα επιτάχυνση.

2. **α)** Η κλίση της γραφικής παράστασης είναι σταθερή και ίση με τη γωνιακή ταχύτητα. Αφού η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ είναι σταθερή, η κίνηση είναι ομαλή κυκλική.

β) Έχουμε:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{(30-0)\ \text{rad}}{(10-0)\ \text{s}} = 3\ \text{rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}\ \text{s} \approx 2{,}1\ \text{s}$$

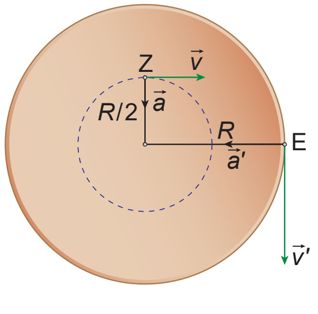
$$f = \frac{1}{T} = \frac{3}{2\pi}\ \text{Hz} \approx 0{,}48\ \text{Hz}$$

$$v_\varepsilon = \omega R = (3\ \text{rad/s})(0{,}5\ \text{m}) = 1{,}5\ \text{m/s}$$

$$a_\kappa = \frac{v_\varepsilon^2}{R} = \frac{(1{,}5\ \text{m/s})^2}{0{,}5\ \text{m}} = 4{,}5\ \text{m/s}^2$$

3. **α)** Ο Δημήτρης (Δ) σχεδίασε σωστά τα διανύσματα.

β) Στο σχήμα φαίνεται η επιτρόχια ταχύτητα και η κεντρομόλος επιτάχυνση στα σημεία Ζ και Ε.



4. Ισχύουν:

$$v_\lambda = \omega_\lambda R_\lambda \ \text{ και } \ v_\omega = \omega_\omega R_\omega$$

Διαιρώντας κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη πως $R_\lambda = 2R_\omega$, έχουμε:

$$\frac{v_\lambda}{v_\omega} = \frac{\omega_\lambda R_\lambda}{\omega_\omega R_\omega} = \frac{\frac{2\pi}{T_\lambda}2R_\omega}{\frac{2\pi}{T_\omega}R_\omega} = \frac{2T_\omega}{T_\lambda}$$

Είναι $T_\omega = 12$ h και $T_\lambda = 1$ h. Άρα:

$$\frac{v_\lambda}{v_\omega} = \frac{2\cdot 12\ \text{h}}{1\ \text{h}} = 24$$

5. Όλα τα σημεία της αλυσίδας πρέπει να έχουν την ίδια ταχύτητα. Επομένως:

$$v_A = v_B \ \text{ ή } \ \omega_A 3R = \omega_B R \ \text{ ή } \ \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{1}{3}$$

και έχουμε:

$$\frac{a_{\kappa(A)}}{a_{\kappa(B)}} = \frac{\frac{v_A^2}{3R}}{\frac{v_B^2}{R}} = \frac{1}{3}$$

6. Όπως στο παράδειγμα 6 βρίσκουμε:

α) $v_B > v_A$ **β)** $\omega_B = \omega_A$ **γ)** $a_{\kappa(B)} > a_{\kappa(A)}$

7. Η συνισταμένη των δυνάμεων που δρουν στον άνθρωπο παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, καθώς αυτός περιστρέφεται μαζί με τη Γη. Στον άνθρωπο δρουν η βαρυτική έλξη $\vec{w}$ και η αντίδραση $\vec{F}$ της ζυγαριάς. Πρέπει:

$$\Sigma F = m\frac{v^2}{R} \ \text{ ή } \ w - F = m\frac{v^2}{R} \ \text{ ή } \ F = w - m\frac{v^2}{R}$$

Στην υποθετική περίπτωση που η Γη ήταν ακίνητη, θα έπρεπε:

$$\Sigma F = 0 \ \text{ ή } \ F = w$$

Άρα, η ένδειξη της ζυγαριάς θα ήταν μεγαλύτερη στη δεύτερη περίπτωση.

8. Σε μια τέτοια στροφή η στατική τριβή έχει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Ισχύει:

$$F_\kappa = m\frac{v^2}{R} \ \text{ ή } \ T_\sigma = m\frac{v^2}{R}$$

Μειώνοντας την ακτίνα για δεδομένη ταχύτητα, αυξάνεται η απαιτούμενη δύναμη, οπότε μπορεί

να ξεπεραστεί η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής και να εμφανιστεί ολίσθηση.
Άρα, το μπλε αυτοκίνητο κινδυνεύει να ολισθήσει και να εκτραπεί από τον δρόμο.

9. Σε μια τέτοια στροφή η στατική τριβή έχει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Ισχύει:

$$F_\kappa = m\frac{v^2}{R} \text{ ή } T_\sigma = m\frac{v^2}{R}$$

Αυξάνοντας την ταχύτητα για δεδομένη ακτίνα, αυξάνεται η απαιτούμενη δύναμη, οπότε μπορεί να ξεπεραστεί η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής και να εμφανιστεί ολίσθηση.

10. Τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης παίζει η βαρυτική έλξη που ασκεί ο Ήλιος στη Γη. Ισχύει:

$$G\frac{M_\Gamma M_H}{R^2} = M_\Gamma \frac{v^2}{R} \text{ ή } G\frac{M_H}{R} = v^2$$

$$\text{ή } G\frac{M_H}{R} = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2$$

$$\text{ή } G\frac{M_H}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2}$$

$$\text{ή } \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_H} = \text{σταθ.}$$

11. α) Η συνισταμένη των δυνάμεων στο σύστημα σταθμός-αστροναύτης παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης:

$$F_\kappa = ma_\kappa$$

Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι το βάρος. Άρα:

$$w = ma_\kappa \text{ ή } mg = ma_\kappa \text{ ή } a_\kappa = g$$

β) Ο σταθμός εκτελεί κάθε στιγμή ελεύθερη πτώση. Για αυτόν τον λόγο έχουμε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας. Πράγματι, αν ο αστροναύτης μάζας m_α σταθεί στη ζυγαριά, αυτή του ασκεί δύναμη μέτρου F και ισχύει:

$$\Sigma F = m_\alpha a_\kappa \text{ ή } m_\alpha g - F = m_\alpha a_\kappa$$

Αφού $a_\kappa = g$, προκύπτει ότι $F = 0$.

Ασκήσεις

1. Έχουμε:

$$v_\varepsilon = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{800\text{ m}}{125\text{ s}} = 6{,}4\text{ m/s}$$

Επομένως:

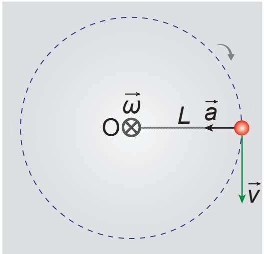
$$\omega = \frac{v_\varepsilon}{R} = \frac{6{,}4\text{ m/s}}{50\text{ m}} = 0{,}128\text{ rad/s}$$

2. α) Έχουμε:

$$v_\varepsilon = \frac{2\pi}{T}L = \frac{2\pi}{2\text{ s}}(0{,}2\text{ m}) = 0{,}2\pi\text{ m/s}$$

$$\omega = \frac{v_\varepsilon}{L} = \frac{0{,}2\pi\text{ m/s}}{0{,}2\text{ m}} = \pi\text{ rad/s}$$

$$a_\kappa = \omega^2 L = (\pi\text{ rad/s})^2(0{,}2\text{ m}) = 0{,}2\pi^2\text{ m/s}^2$$



β) Ρόλο κεντρομόλου παίζει η τάση του νήματος $\vec{F}$, η οποία έχει φορά προς το κέντρο O της κυκλικής τροχιάς. Ισχύει:

$$F = ma_\kappa = (0{,}1\text{ kg})(0{,}2\pi^2\text{ m/s}^2) = 0{,}02\pi^2\text{ N}$$

3. Στον ζητούμενο χρόνο Δt η γωνία που διαγράφει ο λεπτοδείκτης είναι μεγαλύτερη κατά 2π από τη γωνία που διαγράφει ο ωροδείκτης.
Επομένως:

$$\varphi_\lambda - \varphi_\lambda = 2\pi \text{ ή } \omega_\lambda \Delta t - \omega_\omega \Delta t = 2\pi$$

$$\text{ή } \frac{2\pi}{T_\lambda}\Delta t - \frac{2\pi}{T_\omega}\Delta t = 2\pi$$

$$\text{ή } \frac{\Delta t}{T_\lambda} - \frac{\Delta t}{T_\omega} = 1$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των περιόδων έχουμε:

$$\frac{\Delta t}{1\text{ h}} - \frac{\Delta t}{12\text{ h}} = 1 \text{ ή } \Delta t = \frac{12}{11}\text{ h} = 1\text{ h } 5\text{ min } 27\text{ s}$$

4. Από το παράδειγμα 10 η επιτρόχια ταχύτητα του δορυφόρου είναι:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

όπου M η μάζα της Γης και r η ακτίνα της τροχιάς. Είναι $r = R + h$ και ισχύει:

$$v=\frac{2\pi r}{T} \text{ ή } \sqrt{\frac{GM}{R+h}}=\frac{2\pi(R+h)}{T}$$

$$\text{ή } \frac{GM}{R+h}=\frac{4\pi^2(R+h)^2}{T^2}$$

$$\text{ή } M=\frac{4\pi^2(R+h)^3}{GT^2}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$M=\frac{4(3{,}14)^2(6400\cdot10^3+600\cdot10^3)^3\ \text{m}^3}{(6{,}67\cdot10^{-11})(1{,}5\cdot3600)^2\ \text{m}^3/\text{kg}}$$

$$\approx 7\cdot10^{23}\ \text{kg}$$

5. Από τη σχέση $F=ma_\kappa$ υπολογίζουμε το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης:

$$a_\kappa=\frac{F}{m}=\frac{8{,}2\cdot10^{-8}\ \text{N}}{9{,}1\cdot10^{-31}\ \text{kg}}=0{,}9\cdot10^{23}\ \text{m/s}^2$$

Ισχύει:

$$a_\kappa=\frac{v_\varepsilon^2}{R} \text{ ή } v_\varepsilon=\sqrt{a_\kappa R}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$v_\varepsilon=\sqrt{(0{,}9\cdot10^{23}\ \text{m/s}^2)(5{,}3\cdot10^{-11}\ \text{m})}=2{,}2\cdot10^6\ \text{m/s}$$

Η περίοδος περιφοράς του ηλεκτρονίου είναι:

$$T=\frac{2\pi R}{v_\varepsilon}=\frac{2(3{,}14)(5{,}3\cdot10^{-11}\ \text{m})}{2{,}2\cdot10^6\ \text{m/s}}=15{,}3\cdot10^{-17}\ \text{s}$$

Επομένως, ο αριθμός των περιφορών ανά δευτερόλεπτο είναι:

$$N=\frac{1}{15{,}3\cdot10^{-17}\ \text{s}}=6{,}5\cdot10^{15}\ \text{περιφορές / s}$$

6. Έχουμε:

$$f=\frac{30}{60\ \text{s}}=0{,}5\ \text{Hz}$$

$$\omega=2\pi f=2\pi(0{,}5\ \text{Hz})=\pi\ \text{rad/s}$$

$$a_\kappa=\omega^2 r=(\pi\ \text{rad/s})^2(0{,}2\ \text{m})\approx 2\ \text{m/s}^2$$

Η στατική τριβή έχει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Επομένως:

$$T_\sigma=ma_\kappa \text{ ή } \mu mg=ma_\kappa \text{ ή } \mu=\frac{a_\kappa}{g}$$

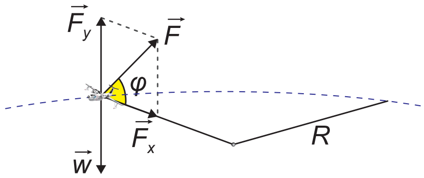
Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$\mu=\frac{2\ \text{m/s}^2}{9{,}8\ \text{m/s}^2}\approx 0{,}2$$

7. Η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι:

$$v_\varepsilon=360\frac{\text{km}}{\text{h}}=360\cdot\frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}}=100\ \text{m/s}$$

Αναλύουμε την $\vec{F}$ σε δύο συνιστώσες, μια κατακόρυφη $\vec{F}_y$ που αντισταθμίζει το βάρος και μια οριζόντια $\vec{F}_x$ που έχει ρόλο κεντρομόλου δύναμης.



Για τις συνιστώσες ισχύουν:

$$F_y=F\eta\mu\varphi=F\eta\mu45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}F$$

$$F_x=F\sigma\upsilon\nu\varphi=F\sigma\upsilon\nu45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}F$$

Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα στον κατακόρυφο άξονα και τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα στον οριζόντιο άξονα:

$$F_y=mg \quad \text{και} \quad F_x=m\frac{v_\varepsilon^2}{R}$$

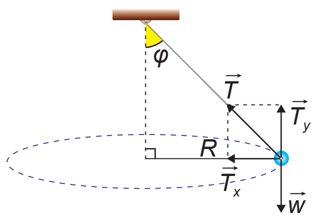
Επειδή $F_y=F_x$, θα ισχύει:

$$mg=m\frac{v_\varepsilon^2}{R} \text{ ή } R=\frac{v_\varepsilon^2}{g}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$R=\frac{(100\ \text{m/s})^2}{10\ \text{m/s}^2}=10^3\ \text{m}$$

8. Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{T}$ από το νήμα σε δύο συνιστώσες, μια κατακόρυφη $\vec{T}_y$ που αντισταθμίζει το βάρος και μια οριζόντια $\vec{T}_x$ που έχει ρόλο κεντρομόλου δύναμης.



Για τις συνιστώσες ισχύουν:

$$T_y=T\sigma\upsilon\nu\varphi=T\sigma\upsilon\nu45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}T$$

$$T_x = T\eta\mu\varphi = T\eta\mu 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}T$$

Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα στον κατακόρυφο άξονα και τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα στον οριζόντιο άξονα:

$$T_y = mg \quad \text{και} \quad T_x = m\frac{v_\varepsilon^2}{R}$$

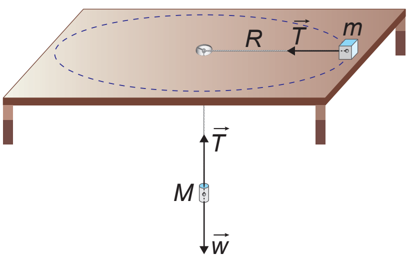
Επειδή $T_y = T_x$, θα ισχύει:

$$mg = m\frac{v_\varepsilon^2}{R} \quad \text{ή} \quad v_\varepsilon = \sqrt{gR}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$v_\varepsilon = \sqrt{(10\ \text{m/s}^2)(0{,}9\ \text{m})} = 3\ \text{m/s}$$

9. Ο κύλινδρος ισορροπεί.



Συνεπώς, η τάση του νήματος είναι αντίθετη του βάρους:

$$Mg = T \quad (1)$$

Στον κύβο ρόλο κεντρομόλου δύναμης έχει η τάση του νήματος. Επομένως:

$$T = \frac{mv^2}{R} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$Mg = \frac{mv^2}{R} \quad \text{ή} \quad Mg = m\omega^2 R$$

$$\text{ή} \quad Mg = m(2\pi f)^2 R$$

$$\text{ή} \quad f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Mg}{\pi^2 mR}}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(4\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{(9{,}8)(1\ \text{kg})(1\ \text{m})}} = 1\ \text{Hz}$$

10. α) Η μέση επιτρόχια ταχύτητα είναι:

$$v_\varepsilon = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2(3{,}14)(3{,}8\cdot 10^8\ \text{m})}{27{,}3\cdot 24\cdot 3600\ \text{s}} = 10{,}1\cdot 10^2\ \text{m/s}$$

β) Η γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2(3{,}14)}{27{,}3\cdot 24\cdot 3600\ \text{s}} = 2{,}7\cdot 10^{-6}\ \text{rad/s}$$

γ) Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι:

$$a_\kappa = \omega^2 r$$
$$= (2{,}7\cdot 10^{-6}\ \text{rad/s})^2 (3{,}8\cdot 10^8\ \text{m})$$
$$= 2{,}8\cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

11. α) Στον δορυφόρο ρόλο κεντρομόλου δύναμης έχει το βάρος. Επομένως:

$$F_\kappa = \frac{mv_\varepsilon^2}{r} \quad \text{ή} \quad mg = \frac{mv_\varepsilon^2}{r} \quad \text{ή} \quad g = \frac{v_\varepsilon^2}{r}$$

$$\text{ή} \quad G\frac{M}{r^2} = \frac{v_\varepsilon^2}{r} \quad \text{ή} \quad v_\varepsilon = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

β) Για τις επιτρόχιες ταχύτητες των δορυφόρων ισχύουν:

$$v_A = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \text{και} \quad v_B = \sqrt{\frac{GM}{2r}}$$

Επομένως:

$$\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{2} \quad \text{ή} \quad v_B = \frac{\sqrt{2}}{2}v_A$$

Με αντικατάσταση της v_A έχουμε:

$$v_B = \frac{\sqrt{2}}{2}(9000\ \text{m/s}) = 6360\ \text{m/s}$$

Προβλήματα

1. α) Δίνονται για το αυτοκίνητο $v_1 = 55\ \text{km/h}$ και για τον πεζό $v_2 = 5\ \text{km/h}$.

Ο χρόνος ταξιδιού του αυτοκινήτου είναι $\Delta t_1 = (AB)/v_1$ και ο χρόνος ταξιδιού του πεζού, αν δεν έμπαινε στο αυτοκίνητο, είναι $\Delta t_2 = (AB)/v_2$. Το αυτοκίνητο ξεκίνησε μία ώρα αργότερα από τον πεζό και ο πεζός κέρδισε μία ώρα ταξιδιού, οπότε:

$$\Delta t_2 - \Delta t_1 = 2\ \text{h} \quad \text{ή} \quad \frac{(AB)}{v_2} - \frac{(AB)}{v_1} = 2\ \text{h}$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε $(AB) = 11\ \text{km}$.
Επομένως:

$$\Delta t_1 = \frac{(AB)}{v_1} = \frac{11\ \text{km}}{55\ \text{km/h}} = 0{,}2\ \text{h}$$

$$\Delta t_2 = (2\text{ h}) + (0{,}2\text{ h}) = 2{,}2\text{ h}$$

β) Αν η συνάντηση έγινε στο σημείο Ο, ο πεζός κινήθηκε στο τμήμα ΑΟ επί χρόνο t_{AO} με ταχύτητα v_2 και στο υπόλοιπο τμήμα ΟΒ κινήθηκε μαζί με το αυτοκίνητο επί χρόνο t_{OB} με ταχύτητα v_1. Το ταξίδι του πεζού είχε διάρκεια:

$$(2{,}2\text{ h}) - (1\text{ h}) = 1{,}2\text{ h}$$

οπότε:

$$t_{AO} + t_{OB} = 1{,}2\text{ h} \quad \text{ή} \quad \frac{(AO)}{v_2} + \frac{(AB)-(AO)}{v_1} = 1{,}2\text{ h}$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε $(AO) = 5{,}5\text{ km}$.
Επομένως:

$$t_{AO} = \frac{5{,}5\text{ km}}{5\text{ km/h}} = 1{,}1\text{ h} = 1\text{ h}\ \ 6\text{ min}$$

Άρα, η συνάντηση έγινε στις 08.06.

2. Η κίνηση θα είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη και στις δύο περιπτώσεις, οπότε θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$v_x = v_{0,x} + a_x t \quad (1)$$

$$\Delta x = v_{0,x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (2)$$

Δίνεται $v_{0,x} = 72\text{ km/h} = 20\text{ m/s}$.

- Αν ο οδηγός φρενάρει, από την (1) για $v_x = 0$ υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης t_1:

$$t_1 = \frac{v_x - v_{0,x}}{a_1} = \frac{(0\text{ m/s}) - (20\text{ m/s})}{-4\text{ m/s}^2} = 5\text{ s}$$

και αντικαθιστώντας στη (2) έχουμε:

$$\Delta x_1 = v_{0,x} t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$
$$= (20\text{ m/s})(5\text{ s}) + \frac{1}{2}(-4\text{ m/s}^2)(5\text{ s})^2$$
$$= 50\text{ m}$$

Δηλαδή το αυτοκίνητο σταματά ακριβώς στο φανάρι.

- Αν ο οδηγός πατήσει γκάζι, από τη (2) για $t_2 = 3\text{ s}$ έχουμε:

$$\Delta x_2 = v_{0,x} t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2$$
$$= (20\text{ m/s})(3\text{ s}) + \frac{1}{2}(1\text{ m/s}^2)(3\text{ s})^2$$
$$= 64{,}5\text{ m}$$

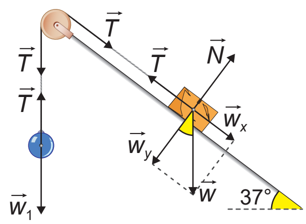
Δηλαδή το αυτοκίνητο βρίσκεται μέσα στη διασταύρωση.

Άρα, η καλύτερη επιλογή είναι το φρενάρισμα.

3. Στη σφαίρα ασκείται το βάρος της $\vec{w}_1$ και η δύναμη $\vec{T}$ από το νήμα. Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα για τη σφαίρα στον κατακόρυφο άξονα με θετική φορά προς τα κάτω:

$$\Sigma F = m_1 a \quad \text{ή} \quad m_1 g - T = m_1 a \quad (1)$$

α) Θεωρούμε την περίπτωση του λείου κεκλιμένου επιπέδου.



Στο κιβώτιο ασκείται κατά τη διεύθυνση του άξονα της κίνησης (τον οποίον θεωρούμε ως *x*-άξονα) η δύναμη $\vec{T}$ από το νήμα και η *x*-συνιστώσα του βάρους του με μέτρο $w_x = mg\,\text{ημ}37°$.

i) Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για το κιβώτιο στον άξονα της κίνησης, λαμβάνοντας υπόψη ότι η επιτάχυνση κατά μέτρο είναι ίδια και για τα δύο σώματα:

$$\Sigma F_x = ma \quad \text{ή} \quad T - mg\,\text{ημ}37° = ma \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$m_1 g - mg\,\text{ημ}37° = (m_1 + m)a$$

$$a = \frac{m_1 - m\,\text{ημ}37°}{m_1 + m} g$$

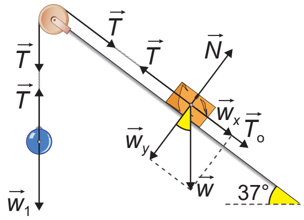
Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$a = \frac{(3\text{ kg}) - (1\text{ kg})(0{,}6)}{(3\text{ kg}) + (1\text{ kg})}(10\text{ m/s}^2) = 6\text{ m/s}^2$$

ii) Από την (1) προκύπτει:

$$T = m_1 g - m_1 a$$
$$= (3\text{ kg})(10\text{ m/s}^2) - (3\text{ kg})(6\text{ m/s}^2)$$
$$= 12\text{ N}$$

β) Στην περίπτωση που έχουμε τριβή, η εξίσωση (1) θα ισχύει και πάλι για τη σφαίρα.



Για $a = 5\ \text{m/s}^2$ υπολογίζουμε την τάση του νήματος:

$$T = m_1 g - m_1 a$$
$$= (3\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2) - (3\ \text{kg})(5\ \text{m/s}^2)$$
$$= 15\ \text{N}$$

Στο κιβώτιο θα έχουμε επιπλέον την τριβή ολίσθησης $\vec{T}_o$, η οποία έχει κατεύθυνση αντίθετη από αυτήν της κίνησης.
Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για το κιβώτιο στον άξονα της κίνησης, λαμβάνοντας υπόψη ότι η επιτάχυνση κατά μέτρο είναι ίδια και για τα δύο σώματα:

$$\Sigma F_x = ma \text{ ή } T - mg\,\text{ημ}37° - T_o = ma$$
$$\text{ή } T_o = T - mg\,\text{ημ}37° - ma$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$T_o = (15\ \text{N}) - (1\ \text{kg})\left(10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0{,}6) - (1\ \text{kg})\left(5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$
$$= 4\ \text{N}$$

Κατά μήκος του y-άξονα, που είναι κάθετος στο κεκλιμένο επίπεδο, στο κιβώτιο ασκείται η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ και η συνιστώσα του βάρους σε αυτόν τον άξονα. Από την ισορροπία στον y-άξονα προκύπτει:

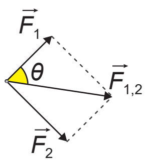
$$N = mg\,\text{συν}37° = (1\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)(0{,}8) = 8\ \text{N}$$

Από τον Νόμο της τριβής, $T_o = \mu N$, έχουμε:

$$\mu = \frac{T_o}{N} = \frac{4\ \text{N}}{8\ \text{N}} = 0{,}5$$

4. **α)** Οι δυνάμεις είναι κάθετες, οπότε το μέτρο της συνισταμένης δύναμης είναι:

$$F_{1,2} = \left(\sqrt{600^2 + 800^2}\right)\text{N} = 1000\ \text{N}$$



Η γωνία θ μεταξύ της συνισταμένης $\vec{F}_{1,2}$ και της $\vec{F}_1$ έχει εφαπτομένη:

$$\text{εφ}\theta = \frac{F_2}{F_1} = \frac{800\ \text{N}}{600\ \text{N}} = \frac{4}{3}$$

β) Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = ma = (200\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) = 200\ \text{N} < F_{1,2}$$

Άρα, υπάρχει τριβή $\vec{T}$ αντίρροπη της $\vec{F}_{1,2}$.
Επομένως:

$$\Sigma F = ma \text{ ή } F_{1,2} - T = ma \text{ ή } T = F_{1,2} - ma$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$T = (1000\ \text{N}) - (200\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) = 800\ \text{N}$$

γ) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4\ \text{s}$ η δεξαμενή αποκτά ταχύτητα:

$$v_1 = at_1 = (1\ \text{m/s}^2)(4\ \text{s}) = 4\ \text{m/s}$$

και η μετατόπισή της είναι:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}(1\ \text{m/s}^2)(4\ \text{s})^2 = 8\ \text{m}$$

Όταν οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ παύουν να ασκούνται στη δεξαμενή, τότε ασκείται σε αυτήν μόνο η τριβή και έτσι αποκτά αρνητική επιτάχυνση. Πράγματι, ισχύει:

$$\Sigma F = ma \text{ ή } -T = ma' \text{ ή } a' = \frac{-T}{m}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$a' = \frac{-800\ \text{N}}{200\ \text{kg}} = -4\ \text{m/s}^2$$

Για τη νέα κίνηση της δεξαμενής ισχύουν:

$$v_x = v_1 + a'\Delta t \quad (1)$$
$$\Delta x_2 = v_1\Delta t + \frac{1}{2}a'(\Delta t)^2 \quad (2)$$

Η δεξαμενή ακινητοποιείται, όταν μηδενίζεται η ταχύτητα. Από την (1) υπολογίζουμε το χρονικό διάστημα της νέας κίνησης:

$$\Delta t = \frac{-v_1}{a'} = \frac{-(4\ \text{m/s})}{-4\ \text{m/s}^2} = 1\ \text{s}$$

Άρα, ακινητοποιείται τη χρονική στιγμή:

$$t_2 = t_1 + \Delta t = (4\ \text{s}) + (1\ \text{s}) = 5\ \text{s}$$

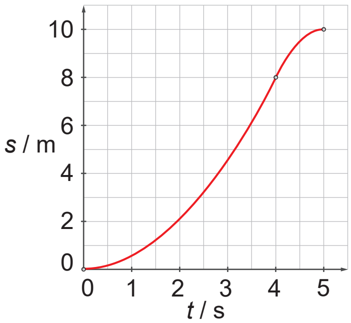
Από τη (2) υπολογίζουμε τη μετατόπιση στη νέα κίνηση:

$$\Delta x_2 = (4\ \text{m/s})(1\ \text{s}) + \frac{1}{2}(-4\ \text{m/s}^2)(1\ \text{s})^2 = 2\ \text{m}$$

Άρα, το συνολικό διάστημα είναι:

$$s = \Delta x_1 + \Delta x_2 = (8\ \text{m}) + (2\ \text{m}) = 10\ \text{m}$$

δ) Διάγραμμα διαστήματος-χρόνου.



5. Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα ισχύει:

$$\Delta x = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \quad \text{ή} \quad a = \frac{2\Delta x}{(\Delta t)^2}$$

Στο πρόβλημα έχουμε ίσες δυνάμεις και τον ίδιο χρόνο κίνησης, οπότε ισχύει:

$$F_1 = F_2 \quad \text{ή} \quad m_1 a_1 = m_2 a_2$$

Επομένως, ο λόγος των μαζών είναι:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\dfrac{2\Delta x_2}{(\Delta t)^2}}{\dfrac{2\Delta x_1}{(\Delta t)^2}} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{\dfrac{2d}{3}}{\dfrac{d}{3}} = 2$$

6. Θεωρούμε τον κατακόρυφο πίδακα του νερού ως y-άξονα με θετική φορά προς τα πάνω και αρχή το σημείο του λάστιχου από το οποίο εξέρχεται το νερό.

Για $t = 1{,}5\ \text{s}$ είναι $y = -1\ \text{m}$, οπότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ έχουμε:

$$-1\ \text{m} = v_0(1{,}5\ \text{s}) - \frac{1}{2}(9{,}8\ \text{m/s}^2)(1{,}5\ \text{s})^2$$

$$v_0 = 6{,}7\ \text{m/s}$$

7. Το βλήμα εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω. Από την εξίσωση κίνησης:

$$y = v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

θα υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή στην οποία το βλήμα χτυπά το αεροπλάνο. Με αντικατάσταση προκύπτει:

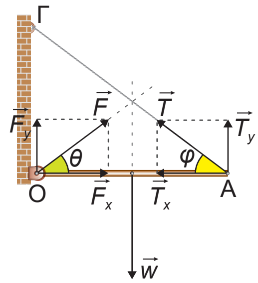
$$780\ \text{m} = (400\ \text{m/s})t - \frac{1}{2}(10\ \text{m/s}^2)t^2$$

οπότε βρίσκουμε $t = 2\ \text{s}$.

Στον ίδιο χρόνο, η μετατόπιση του αεροπλάνου (το οποίο εκτελεί ΕΟΚ) είναι:

$$\Delta x = v_x t = (300\ \text{m/s})(2\ \text{s}) = 600\ \text{m}$$

8. **α)** Αναλύουμε τις δυνάμεις $\vec{T}$ (από το νήμα) και $\vec{F}$ (από την άρθρωση) σε συνιστώσες $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$ και $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Για τις συνιστώσες της τάσης $\vec{T}$ ισχύουν:

$$T_y = T\eta\mu\varphi = 0{,}6T \quad \text{και} \quad T_x = T\sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}8T$$

Αφού η ράβδος ισορροπεί, πρέπει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0}$$

και

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0$$

Επομένως:

$$\Sigma\tau_O = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_w = \tau_T \quad \text{ή} \quad w\frac{L}{2} = T_y L$$

$$\text{ή} \quad w\frac{L}{2} = 0{,}6TL \quad \text{ή} \quad T = \frac{w}{1{,}2}$$

και αντικαθιστώντας βρίσκουμε $T = 200\ \text{N}$.

β) Έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ή} \quad T_x = F_x \quad \text{ή} \quad F_x = 0{,}8T$$

οπότε:

$$F_x = 0{,}8(200\ \text{N}) = 160\ \text{N}$$

και

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_y + T_y = w \quad \text{ή} \quad F_y = w - 0{,}6T$$

οπότε:

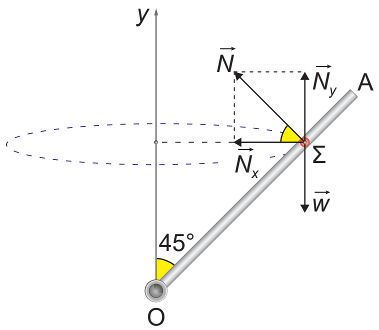
$$F_y = (240\ \text{N}) - 0{,}6(200\ \text{N}) = 120\ \text{N}$$

Επομένως, για το μέτρο και την κατεύθυνση της $\vec{F}$ έχουμε:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(160\ \text{N})^2 + (120\ \text{N})^2} = 200\ \text{N}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{120}{160} = \frac{3}{4}$$

9. Αναλύουμε τη δύναμη στήριξης $\vec{N}$ της ράβδου στη μικρή σφαίρα σε δύο συνιστώσες, μια κατακόρυφη $\vec{N}_y$ που αντισταθμίζει το βάρος και μια οριζόντια $\vec{N}_x$ που έχει τον ρόλο της κεντρομόλου.



Για τις συνιστώσες ισχύουν:

$$N_x = N\sigma\upsilon\nu 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}N$$

$$N_y = N\eta\mu 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}N$$

Εφαρμόζουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα στον κατακόρυφο άξονα και τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα στον οριζόντιο άξονα:

$$N_y = mg$$

$$N_x = m\omega^2 R$$

Επειδή $N_y = N_x$, ισχύει:

$$mg = m\omega^2 R$$

οπότε προκύπτει:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$\omega = \sqrt{\frac{10\ \text{m/s}^2}{0{,}4\ \text{m}}} = 5\ \text{rad/s}$$

10. **α)** Η συχνότητα του προσομοιωτή είναι:

$$f = \frac{N}{t} = \frac{30}{1\ \text{min}} = \frac{30}{60\ \text{s}} = 0{,}5\ \text{Hz}$$

Επομένως, η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι:

$$a_\kappa = \omega^2 L = 4\pi^2 f^2 L$$
$$= 4(10)(0{,}5\ \text{Hz})^2(6\ \text{m})$$
$$= 60\ \text{m/s}^2 = 6g$$

β) Ισχύει:

$$\frac{a'_\kappa}{a_\kappa} = \frac{f'^2}{f^2} \ \text{ή}\ \sqrt{\frac{a'_\kappa}{a_\kappa}} = \frac{f'}{f} \ \text{ή}\ f' = \sqrt{\frac{a'_\kappa}{a_\kappa}}f$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$f' = \sqrt{\frac{9g}{6g}}(30\ \pi\varepsilon\rho./\text{min})$$
$$= 15\sqrt{6}\ \pi\varepsilon\rho./\text{min} \approx 37\ \pi\varepsilon\rho./\text{min}$$

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Από τη δύναμη στην ενέργεια

3.1 Το φυσικό μέγεθος ενέργεια συστήματος

Ερωτήσεις

1. Μονωμένο, γιατί όλες οι ανταλλαγές μάζας και ενέργειας γίνονται στο εσωτερικό του.

2. **Α)** Ανοικτό **Β)** Κλειστό **Γ)** Κλειστό
Δ) Ανοικτό **Ε)** Ανοικτό

3. Το δεμένο μπαλόνι είναι κλειστό, ενώ το μπαλόνι που δεν είναι δεμένο είναι ανοικτό σύστημα.

4. Όχι. Μπορεί να μην ανταλλάσσει ύλη, αλλά ανταλλάσσει ενέργεια (υπό μορφή θερμότητας) με το περιβάλλον.

3.2 Αποθήκευση της ενέργειας

Ερωτήσεις

1. **α)** $U = 0$ **β)** $U = mgh_2$ **γ)** $U = -mgh_1$

2. Για το αυτοκίνητο είναι $m_\alpha = 900\ \text{kg}$, για το φορτηγό $m_\varphi = 2\ \text{t} = 2000\ \text{kg}$ και για το βλήμα $m_\beta = 25\ \text{g} = 0{,}025\ \text{kg}$.

Οι αντίστοιχες ταχύτητες είναι:

$$v_\alpha = 72\frac{\text{km}}{\text{h}} = 72\cdot\frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 20\ \text{m/s}$$

$$v_\varphi = 36\frac{\text{km}}{\text{h}} = 36\cdot\frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 10\ \text{m/s}$$

$$v_\beta = 400\ \text{m/s}$$

Οι αντίστοιχες κινητικές ενέργειες θα είναι:

$$K_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}(900\ \text{kg})(20\ \text{m/s})^2 = 180.000\ \text{J}$$

$$K_\varphi = \frac{1}{2}m_\varphi v_\varphi^2 = \frac{1}{2}(2000\ \text{kg})(10\ \text{m/s})^2 = 100.000\ \text{J}$$

$$K_\beta = \frac{1}{2}m_\beta v_\beta^2 = \frac{1}{2}(0{,}025)(400\ \text{m/s})^2 = 2000\ \text{J}$$

Άρα, τελικά ισχύει:

$$K_\beta < K_\varphi < K_\alpha$$

3. Σωστό διάγραμμα είναι το Β, αφού:

$$U = mgh$$

4. Σωστό διάγραμμα είναι το Γ, διότι:

$$K = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m(gt)^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2 = ct^2$$

όπου αντικαταστήσαμε το $mg^2/2$ με τη σταθερά c.

5. Η χημική ενέργεια του παιδιού γίνεται δυναμική ενέργεια στο λάστιχο της σφεντόνας. Η δυναμική ενέργεια στο λάστιχο της σφεντόνας μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια στην πέτρα. Η κινητική ενέργεια της πέτρας μετατρέπεται σε βαρυτική δυναμική ενέργεια κατά την άνοδο του σώματος, η οποία ξαναγίνεται κινητική κατά την κάθοδο. Τέλος, η κινητική ενέργεια γίνεται θερμική μετά την πρόσκρουση της πέτρας στο έδαφος.

6. Έχουμε:

$$K_A = K_B \ \text{ή}\ \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 = \frac{1}{2}I_B\omega_B^2 \ \text{ή}\ \frac{\omega_A^2}{\omega_B^2} = \frac{I_B}{I_A}$$

Οι τροχοί έχουν την ίδια μάζα, αλλά ο τροχός Α έχει όλη τη μάζα συγκεντρωμένη στην περιφέρεια, οπότε:

$$I_A > I_B \ \text{ή}\ \frac{I_B}{I_A} < 1$$

Επομένως:

$$\frac{\omega_A^2}{\omega_B^2} < 1 \ \text{ή}\ \omega_A^2 < \omega_B^2$$

Άρα $\omega_A < \omega_B$, δηλαδή ο τροχός Β περιστρέφεται με μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα από τον τροχό Α.

7. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα της κινητικής και της ελαστικής δυναμικής ενέργειας. Επομένως, για καθένα από τα στιγμιότυπα, ξεκινώντας από πάνω, ισχύει:

$$E_{μηχ,I} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$E_{μηχ,II} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}k\left(\Delta L_1\right)^2$$

$$E_{μηχ,III} = \frac{1}{2}k\left(\Delta L_{max}\right)^2$$

8. **α)** Η μηχανική ενέργεια του βαριδίου πριν αφεθεί ελεύθερο είναι:

$$E_{μηχ} = mgH$$

Η μηχανική ενέργεια του βαριδίου ακριβώς πριν προσκρούσει στο έμβολο είναι:

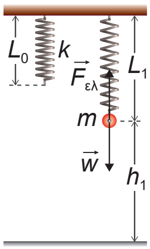
$$E'_{μηχ} = mg\left(H-h\right) + \frac{1}{2}mv^2$$

όπου v η ταχύτητά του εκείνη τη χρονική στιγμή.

β) Μεγαλύτερη θερμική ενέργεια έχει το αέριο μετά την κρούση.

Ασκήσεις

1. **α)** Στη θέση ισορροπίας του συστήματος ελατήριο-σφαίρα ισχύει:



$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \;\; ή \;\; \vec{w} + \vec{F}_{ελ} = \vec{0}$$

$$ή \;\; \vec{w} = -\vec{F}_{ελ}$$

οπότε για τα μέτρα των δυνάμεων ισχύει:

$$w = F_{ελ} \;\; ή \;\; w = k\Delta L \;\; ή \;\; \Delta L = \frac{w}{k}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$\Delta L = \frac{5\ \text{N}}{200\ \text{N/m}} = 0{,}025\ \text{m} = 2{,}5\ \text{cm}$$

Το μήκος του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας είναι:

$$L_1 = L_0 + \Delta L = \left(0{,}20\ \text{m}\right) + \left(0{,}025\ \text{m}\right)$$
$$= 0{,}225\ \text{m} = 22{,}5\ \text{cm}$$

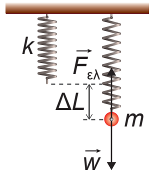
β) Η ελαστική δυναμική ενέργεια είναι:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k\left(\Delta L\right)^2 = \frac{1}{2}\left(200\ \text{N/m}\right)\left(0{,}025\ \text{m}\right)^2$$
$$= 0{,}0625\ \text{J}$$

γ) Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$U = U_{βαρ} + U_{ελ} = mgh_1 + U_{ελ} = wh_1 + U_{ελ}$$
$$= \left(5\ \text{N}\right)\left(2\ \text{m}\right) + \left(0{,}0625\ \text{J}\right) = 10{,}0625\ \text{J}$$

2. Στη θέση ισορροπίας του συστήματος ελατήριο-σφαίρα ισχύει:



$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \;\; ή \;\; \vec{w} + \vec{F}_{ελ} = \vec{0}$$

$$ή \;\; \vec{w} = -\vec{F}_{ελ}$$

οπότε για τα μέτρα των δυνάμεων ισχύει:

$$w = F_{ελ} \;\; ή \;\; w = k\Delta L \;\; ή \;\; k = \frac{w}{\Delta L}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$k = \frac{10\ \text{N}}{0{,}2\ \text{m}} = 50\ \text{N/m}$$

Η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι:

$$\Delta U_{βαρ} = U_{βαρ,τελ} - U_{βαρ,αρχ} = w\Delta L - 0$$
$$= \left(10\ \text{N}\right)\left(0{,}2\ \text{m}\right) = 2\ \text{J}$$

και η μεταβολή της ελαστικής δυναμικής ενέργειας είναι:

$$\Delta U_{ελ} = U_{ελ,τελ} - U_{ελ,αρχ} = 0 - \frac{1}{2}k\left(\Delta L\right)^2$$
$$= -\frac{1}{2}\left(50\ \text{N/m}\right)\left(0{,}2\ \text{m}\right)^2 = -1\ \text{J}$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας (ΑΔΕ) θα υπολογίσουμε την ενέργεια $E_{πρ}$ (προσφερόμενη ενέργεια) που κατανάλωσε ο μαθητής:

$$U_{βαρ,αρχ} + U_{ελ,αρχ} + E_{πρ} = U_{βαρ,τελ} + U_{ελ,τελ}$$
$$ή \;\; E_{πρ} = U_{βαρ,τελ} - U_{βαρ,αρχ} + U_{ελ,τελ} - U_{ελ,αρχ}$$
$$ή \;\; E_{πρ} = \Delta U_{βαρ} + \Delta U_{ελ}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$E_{πρ} = \left(2\ \text{J}\right) + \left(-1\ \text{J}\right) = 1\ \text{J}$$

3. **α)** Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είναι:

$$\omega = \frac{v_ε}{R}$$

οπότε η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής είναι:

$$K_π = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v_ε}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}mv_ε^2$$
$$= \frac{1}{4}\left(4\ \text{kg}\right)\left(10\ \text{m/s}\right)^2 = 100\ \text{J}$$

β) Έχουμε:

$$K_μ = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 = \frac{1}{2}\left(4\ \text{kg}\right)\left(10\ \text{m/s}\right)^2 = 200\ \text{J}$$

4. Η κινητική ενέργεια της μπάλας είναι:

$$K = \frac{40}{100}E_{μηχ} = \frac{40}{100}(50\ \text{J}) = 20\ \text{J}$$

Είναι $m = 400\ \text{g} = 0{,}4\ \text{kg}$. Από τον ορισμό της κινητικής ενέργειας $\left(K = \frac{1}{2}mv^2\right)$ θα υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας:

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(20\ \text{J})}{0{,}4\ \text{kg}}} = 10\ \text{m/s}$$

Η δυναμική ενέργεια της μπάλας είναι:

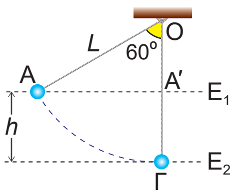
$$U = E_{μηχ} - K = (50\ \text{J}) - (20\ \text{J}) = 30\ \text{J}$$

Από τον τύπο $U = mgh$ της δυναμικής ενέργειας θα υπολογίσουμε το ύψος:

$$h = \frac{U}{mg} = \frac{30\ \text{J}}{(0{,}4\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)} = 7{,}5\ \text{m}$$

5. α) Είναι $m = 100\ \text{g} = 0{,}1\ \text{kg}$.

Έστω Ο το σημείο στο οποίο στερεώνεται το νήμα και Α′ η προβολή του Α πάνω στην κατακόρυφο που διέρχεται από το Ο.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΑ′ έχουμε:

$$συν60° = \frac{(ΟΑ')}{(ΟΑ)} \text{ ή } (ΟΑ') = Lσυν60°$$

Επομένως:

$$h = (ΟΓ) - (ΟΑ') = L - Lσυν60° = L(1 - συν60°)$$

$$= (1\ \text{m})\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ \text{m}$$

i) Με επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το E_1 έχουμε:

$$U_A = 0\ \text{J}$$

$$U_Γ = -mgh$$

$$= -(0{,}1\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)\left(\frac{1}{2}\ \text{m}\right) = -0{,}5\ \text{J}$$

ii) Με επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το E_2 έχουμε:

$$U'_A = mgh = (0{,}1\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)\left(\frac{1}{2}\ \text{m}\right) = 0{,}5\ \text{J}$$

$$U'_Γ = 0\ \text{J}$$

β) Η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας από το Α στο Γ είναι:

- στην περίπτωση (i):

$$ΔU = U_Γ - U_A = -0{,}5\ \text{J}$$

- στην περίπτωση (ii):

$$ΔU' = U'_Γ - U'_A = -0{,}5\ \text{J}$$

Η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι ίδια. Επιβεβαιώνουμε έτσι ότι η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας δεν εξαρτάται από την επιλογή του επιπέδου μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.

6. α) Η κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου είναι:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1000\ \text{kg})(20\ \text{m/s})^2 = 200.000\ \text{J}$$

β) Πρέπει να ισχύει:

$$K = U \text{ ή } \frac{1}{2}mv^2 = mgh \text{ ή } h = \frac{v^2}{2g}$$

Το ύψος δεν εξαρτάται από τη μάζα.

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$h = \frac{(20\ \text{m/s})^2}{2(10\ \text{m/s}^2)} = 20\ \text{m}$$

7. α) Το σχοινί συμπεριφέρεται ως ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 47\ \text{N/m}$ και φυσικού μήκους $L_0 = 15\ \text{m}$.

Στη θέση ισορροπίας του συστήματος bungee-Κωνσταντίνος ισχύει:

$$w = F_{ελ} \text{ ή } w = kΔL \text{ ή } ΔL = \frac{w}{k}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$ΔL = \frac{800\ \text{N}}{47\ \text{N/m}} \approx 17\ \text{m}$$

Το μήκος του σχοινιού είναι τότε:

$$L_1 = L_0 + ΔL = (15\ \text{m}) + (17\ \text{m}) = 32\ \text{m}$$

β) Τη στιγμή του μέγιστου τεντώματος του σχοινιού η επιμήκυνση είναι:

$$ΔL_{max} = \frac{300}{100}L_0 = \frac{300}{100}(15\ \text{m}) = 45\ \text{m}$$

Επομένως, το μήκος του σχοινιού θα είναι:

$$L_{max} = L_0 + ΔL_{max} = (15\ \text{m}) + (45\ \text{m}) = 60\ \text{m}$$

Η γέφυρα βρίσκεται σε ύψος 80 m από το νερό. Τη στιγμή του μέγιστου τεντώματος του σχοινιού ο Κωνσταντίνος απέχει από την επιφάνεια του νερού:

$$h = 80\ \text{m} - 60\ \text{m} = 20\ \text{m}$$

οπότε έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια:

$$U_{\beta\alpha\rho} = mgh = wh$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$U = U_{\beta\alpha\rho} + U_{\varepsilon\lambda} = wh + \frac{1}{2}k\left(\Delta L_{max}\right)^2$$

$$= (800\ \text{N})(20\ \text{m}) + \frac{1}{2}(47\ \text{N/m})(45\ \text{m})^2$$

$$= 63.587{,}5\ \text{J}$$

3.3 Μεταφορά της ενέργειας

Ερωτήσεις

1. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική.

2. Η ενέργεια $E_{\kappa\iota\nu}$ που κατανάλωσε ο κινητήρας υπολογίζεται από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας:

$$E_{\alpha\rho\chi} + E_{\kappa\iota\nu} = E_{\tau\varepsilon\lambda} + E_{\theta\varepsilon\rho\mu} \ \text{ ή } \ E_{\kappa\iota\nu} = E_{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\alpha\rho\chi} + E_{\theta\varepsilon\rho\mu}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$E_{\kappa\iota\nu} = \left(4\cdot 10^5\ \text{J}\right) - (0\ \text{J}) + \left(10^5\ \text{J}\right) = 5\cdot 10^5\ \text{J}$$

3. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια της πέτρας ως προς το έδαφος είναι:

$$U = mgh = wh = (41{,}8\ \text{N})(10\ \text{m}) = 418\ \text{J}$$

Η ενέργεια αυτή προσφέρεται στο νερό.
Σύμφωνα με τα δεδομένα, απαιτούνται 4180 J για αύξηση της θερμοκρασίας κατά 1 °C ανά 1000 g νερού.
Συνεπώς, στην περίπτωσή μας απαιτούνται 418 J για αύξηση της θερμοκρασίας κατά θ °C ανά 10 g νερού.
Έχουμε:

$$\theta\ °\text{C} = \left(\frac{418\ \text{J}}{4180\ \text{J}}\right)\left(\frac{1000\ \text{g}}{10\ \text{g}}\right) = 10\ °\text{C}$$

4. Μετατρέπουμε τη 1 kWh σε joules:

$$1\ \text{kWh} = 1000\ \text{Wh} = \left(1000\ \frac{\text{J}}{\text{s}}\right)(3600\ \text{s})$$

$$= 3{,}6\cdot 10^6\ \text{J}$$

Ο βράχος θα είχε δυναμική ενέργεια $3{,}6\cdot 10^6$ J. Επομένως:

$$U = wh \ \text{ ή } \ h = \frac{U}{w}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$h = \frac{3{,}6\cdot 10^6\ \text{J}}{10^6\ \text{N}} = 3{,}6\ \text{m}$$

5. Η αύξηση της δυναμικής ενέργειας θα ήταν:

$$U = wh = (1000\ \text{N})(1{,}5\ \text{m}) = 1500\ \text{J}$$

Η αντίστοιχη ισχύς του ανυψωτικού θα ήταν:

$$P = \frac{U}{\Delta t} = \frac{1500\ \text{J}}{1\ \text{s}} = 1500\ \text{W} = 1{,}5\ \text{kW}$$

Ο ισχυρισμός του χειριστή δεν ευσταθεί, αφού το ανυψωτικό μηχάνημα έχει ισχύ 1 kW, ενώ για αυτήν την εργασία απαιτείται ισχύς 1,5 kW.

6. Οι δύο μαθητές έχουν το ίδιο βάρος και ανεβαίνουν από το προαύλιο στην τάξη τους. Συνεπώς, η δυναμική τους ενέργεια μεταβάλλεται κατά την ίδια ποσότητα:

$$\Delta U_1 = \Delta U_2 = wh$$

Η ισχύς του πρώτου μαθητή είναι:

$$P_1 = \frac{\Delta U_1}{\Delta t_1} = \frac{wh}{\Delta t_1} \quad (1)$$

Η ισχύς του δεύτερου μαθητή είναι:

$$P_2 = \frac{\Delta U_2}{\Delta t_2} = \frac{wh}{\Delta t_2} \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τις (1) και (2) παρατηρούμε ότι:

$$\Delta t_1 = 45\ \text{s} < 50\ \text{s} = \Delta t_2$$

οπότε $P_1 > P_2$ (μεγαλύτερο είναι το κλάσμα με τον μικρότερο παρονομαστή).

Άρα, ο πρώτος μαθητής αναπτύσσει μεγαλύτερη ισχύ από τον δεύτερο.

Πράγματι, διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\dfrac{wh}{\Delta t_1}}{\dfrac{wh}{\Delta t_2}} = \frac{50\ \text{s}}{45\ \text{s}} = \frac{10}{9} \ \text{ ή } \ P_1 = \frac{10}{9}P_2$$

7. Και στις τρεις περιπτώσεις η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση, οπότε δεν παράγει έργο.

8. Καθώς πέφτει η σφαίρα, η βαρυτική δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική. Όταν προσκρούει στο δάπεδο, η κινητική ενέργεια της σφαίρας γίνεται θερμική στη σφαίρα και στο δάπεδο. Αν στη θέση της σφαίρας ήταν ένα μπαλάκι και στη θέση του τσιμεντένιου πατώματος μια ρακέτα του τένις, τότε η κινητική ενέργεια της μπάλας θα μεταφερόταν στη ρακέτα ως ελαστική δυναμική ενέργεια. Ένα μέρος αυτής της ελαστικής ενέργειας θα γινόταν κινητική και θα εκτόξευε το μπαλάκι, και το υπόλοιπο θα μετατρεπόταν σε θερμική ενέργεια.

9. **α)** Όταν κάποιος κρατά μια βαριά βαλίτσα, το έργο της δύναμης του βάρους της βαλίτσας είναι μηδέν, γιατί δεν υπάρχει μετατόπιση.

β) Όταν κάποιος σηκώνει μια βαριά βαλίτσα, το έργο της δύναμης του βάρους της βαλίτσας είναι αρνητικό, γιατί η μετατόπιση έχει αντίθετη κατεύθυνση από τη δύναμη.

γ) Όταν κάποιος αφήνει μια βαριά βαλίτσα, το έργο της δύναμης του βάρους της βαλίτσας είναι θετικό, γιατί η μετατόπιση έχει την ίδια κατεύθυνση με τη δύναμη.

Δεν παίζει ρόλο αν η κίνηση της βαλίτσας γίνεται αργά ή γρήγορα.

10. Η ενέργεια που «μεταφέρει» το παγωτό στον μαθητή είναι:

$$E = 200\ \text{kcal} = 200(1000\ \text{cal})\left(4{,}2\ \frac{\text{J}}{\text{cal}}\right)$$

$$= 840.000\ \text{J}$$

Ο μαθητής πρέπει με την ανάβαση στο βουνό να «κάψει» το 20% αυτής της ενέργειας, δηλαδή πρέπει να ανέβει σε τόσο ύψος, ώστε η δυναμική του ενέργεια να γίνει:

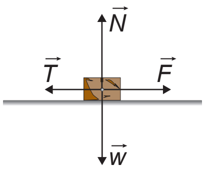
$$U = \frac{20}{100}E = \frac{20}{100}840.000\ \text{J} = 168.000\ \text{J}$$

Από τη σχέση $U = wh$ προκύπτει ότι το ύψος του βουνού που πρέπει να ανέβει είναι:

$$h = \frac{U}{w} = \frac{168.000\ \text{J}}{600\ \text{N}} = 280\ \text{m}$$

Ασκήσεις

1. **α)** Επειδή το έπιπλο κινείται με σταθερή ταχύτητα, πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων να είναι ίση με 0. Ισχύουν:



$$\Sigma F_x = 0 \ \text{ή}\ F = T$$

$$\Sigma F_y = 0 \ \text{ή}\ N = w$$

Από τον Νόμο της τριβής έχουμε:

$$T = \mu N \ \text{ή}\ F = \mu w \ \text{ή}\ \mu = \frac{F}{w}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$\mu = \frac{F}{w} = \frac{200}{250} = 0{,}8$$

β) Το βάρος και η κάθετη δύναμη είναι κάθετες στη μετατόπιση. Συνεπώς:

$$W_w = W_N = 0\ \text{J}$$

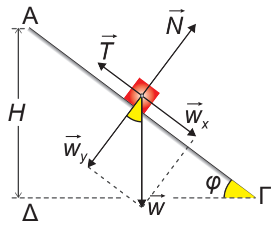
Το έργο της $\vec{F}$ και το έργο της $\vec{T}$ είναι αντίστοιχα:

$$W_F = F\Delta x \sigma\upsilon\nu 0° = (200\ \text{N})(2\ \text{m})(1) = 400\ \text{J}$$

$$W_T = T\Delta x \sigma\upsilon\nu 180° = F\Delta x \sigma\upsilon\nu 180°$$

$$= (200\ \text{N})(2\ \text{m})(-1) = -400\ \text{J}$$

2. **α)** Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Από το τρίγωνο ΑΓΔ θα υπολογίσουμε το διάστημα s που διάνυσε η βαλίτσα πάνω στη ράμπα:

$$\eta\mu\varphi = \frac{(\text{ΑΔ})}{(\text{ΑΓ})} = \frac{H}{s} \ \text{ή}\ s = \frac{H}{\eta\mu\varphi}$$

και βρίσκουμε $s = 2$ m.

- Για να βρούμε το έργο του βάρους, αναλύουμε το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες, μια συνιστώσα $\vec{w}_x$ παράλληλη στο κεκλιμένο και μια συνιστώσα $\vec{w}_y$ κάθετη σε αυτό. Ισχύουν:

$$w_x = w\eta\mu\varphi = (100\ \text{N})(0{,}6) = 60\ \text{N}$$

$$w_y = w\sigma\upsilon\nu\varphi = (100\ \text{N})(0{,}8) = 80\ \text{N}$$

Το έργο του βάρους είναι:

$$W_w = W_{w_x} + W_{w_y} = w_x s\sigma\upsilon\nu 0^\circ + w_y s\sigma\upsilon\nu 90^\circ$$
$$= (60\ \text{N})(2\ \text{m})(1) + (0\ \text{J}) = 120\ \text{J}$$

Εναλλακτικά, χωρίς ανάλυση του βάρους, το έργο του βάρους υπολογίζεται ως εξής:

$$W_w = ws\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \varphi) = ws\eta\mu\varphi$$
$$= (100\ \text{N})(2\ \text{m})(0{,}6) = 120\ \text{J}$$

- Επειδή η βαλίτσα κινείται με σταθερή ταχύτητα, συμπεραίνουμε πως υπάρχει τριβή, της οποίας το μέτρο είναι:

$$T = w_x = 60\ \text{N}$$

Το έργο της τριβής είναι:

$$W_T = Ts\sigma\upsilon\nu 180^\circ = (60\ \text{N})(2\ \text{m})(-1) = -120\ \text{J}$$

- Το έργο της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ είναι μηδέν, διότι αυτή είναι κάθετη στη μετατόπιση.

β) Η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι:

$$\Delta U_{\text{ΑΓ}} = U_\Gamma - U_\text{Α} = 0 - wH$$
$$= -(100\ \text{N})(1{,}2\ \text{m}) = -120\ \text{J}$$

Παρατηρούμε ότι:

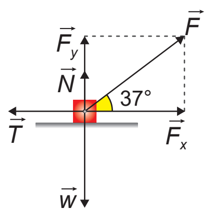
$$W_w = -\Delta U_{\text{ΑΓ}}$$

γ) Η δυναμική ενέργεια της βαλίτσας γίνεται κινητική ενέργεια στη βαλίτσα και θερμική στην κεκλιμένη ράμπα και τη βαλίτσα.

3. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για το σώμα από τη χρονική στιγμή 0 s έως τη χρονική στιγμή 20 s:

$$W_{\Sigma F} = \Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}mv_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}mv_{\alpha\rho\chi}^2$$
$$= \frac{1}{2}(1\ \text{kg})(-10\ \text{m/s})^2 - \frac{1}{2}(1\ \text{kg})(5\ \text{m/s})^2$$
$$= 37{,}5\ \text{J}$$

4. α) Αναλύουμε την $\vec{F}$ σε δύο συνιστώσες τις οποίες υπολογίζουμε:



$$F_x = F\sigma\upsilon\nu 37^\circ$$
$$= (10\ \text{N})(0{,}8) = 8\ \text{N}$$
$$F_y = F\eta\mu 37^\circ$$
$$= (10\ \text{N})(0{,}6) = 6\ \text{N}$$

Λόγω ακινησίας στον y-άξονα, ισχύει:

$$F_y + N - w = 0 \quad \text{ή} \quad N = mg - F_y$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$N = (1\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2) - (6\ \text{N}) = 4\ \text{N}$$

Επομένως, η τριβή θα είναι:

$$T = \mu N = (0{,}5)(4\ \text{N}) = 2\ \text{N}$$

β) Για την κίνηση του σώματος στον x-άξονα ισχύει:

$$F_x - T = ma \quad \text{ή} \quad a = \frac{F_x - T}{m}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$a = \frac{(8\ \text{N}) - (2\ \text{N})}{1\ \text{kg}} = 6\ \text{m/s}^2$$

Σε χρόνο $\Delta t = 2$ s η μετατόπιση του κύβου είναι:

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$
$$= (0\ \text{m}) + \frac{1}{2}(6\ \text{m/s}^2)(2\ \text{s})^2 = 12\ \text{m}$$

Το έργο της ασκούμενης δύναμης $\vec{F}$ είναι:

$$W_F = W_{F_x} + W_{F_y} = F_x \Delta x\sigma\upsilon\nu 0^\circ + F_y \Delta x\sigma\upsilon\nu 90^\circ$$
$$= (8\ \text{N})(12\ \text{m})(1) + (0\ \text{J}) = 96\ \text{J}$$

Εναλλακτικά, χωρίς ανάλυση της $\vec{F}$ έχουμε:

$$W_F = F\Delta x\sigma\upsilon\nu 37^\circ = (10\ \text{N})(12\ \text{m})(0{,}8) = 96\ \text{J}$$

5. α) Η κινητική ενέργεια γίνεται θερμική.

β) Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} = Q \ \text{ή}\ \frac{1}{2}mv_{\alpha\rho\chi}^2 = |W_T| \ \text{ή}\ \frac{1}{2}mv_{\alpha\rho\chi}^2 = T\Delta x$$
$$\text{ή}\ T = \frac{mv_{\alpha\rho\chi}^2}{2\Delta x}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$T = \frac{mv_{\alpha\rho\chi}^2}{2\Delta x} = \frac{(80\ \text{kg})(2\ \text{m/s})^2}{2(2\ \text{m})} = 80\ \text{N}$$

Εναλλακτικά, από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$W_{\Sigma F} = \Delta K \ \text{ή}\ W_T = \frac{1}{2}mv_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}mv_{\alpha\rho\chi}^2$$
$$\text{ή}\ -T\Delta x = -\frac{1}{2}mv_{\alpha\rho\chi}^2 \ \text{ή}\ T = \frac{mv_{\alpha\rho\chi}^2}{2\Delta x}$$

που είναι η σχέση στην οποία καταλήξαμε προηγουμένως.

6. Μετατρέπουμε την ταχύτητα στο SI:

$$v = 108\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 108 \cdot \frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 30\ \text{m/s}$$

Η στιγμιαία ισχύς είναι σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης του αυτοκινήτου και δίνεται από τη σχέση $P = Fv$. Έχουμε:

$$F = \frac{P}{v} = \frac{90.000\ \text{W}}{30\ \text{m/s}} = 3000\ \text{N}$$

Επομένως, βρίσκουμε τη δύναμη αντίστασης F_α ως εξής:

$$\Sigma F_x = 0 \ \text{ ή } \ F_\alpha - F = 0 \ \text{ ή } \ F_\alpha = 3000\ \text{N}$$

7. Η στιγμιαία ισχύς είναι σταθερή κατά τη διάρκεια της ανάβασης του ψυγείου και δίνεται από τη σχέση $P = Fv$. Επομένως:

$$v = \frac{P}{F} = \frac{2700\ \text{W}}{900\ \text{N}} = 3\ \text{m/s}$$

8. Είναι $\Delta t = 1\ \text{h} = 3600\ \text{s}$.

Η ενέργεια που προσφέρει η αντλία καταναλώνεται ως βαρυτική δυναμική ενέργεια στην ανύψωση μιας μάζας νερού m και ως κινητική ενέργεια του νερού, οπότε:

$$E = U + K$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με τον χρόνο έχουμε:

$$\frac{E}{\Delta t} = \frac{U+K}{\Delta t}$$

$$\text{ή } \ P = \frac{U+K}{\Delta t} = \frac{mgh + \frac{1}{2}mv^2}{\Delta t} = \frac{m\left(gh + \frac{1}{2}v^2\right)}{\Delta t}$$

Επομένως:

$$m = \frac{P\Delta t}{gh + \frac{1}{2}v^2} = \frac{(1000\ \text{W})(3600\ \text{s})}{(10\ \text{m/s}^2)(39{,}2\ \text{m}) + \frac{1}{2}(4\ \text{m/s})^2}$$

$$= \frac{3.600.000\ \text{W}\cdot\text{s}}{400\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 9000\ \text{kg} = 9\ \text{t}$$

9. Γνωρίζουμε ότι η ροή της υδατόπτωσης είναι $80\ \text{m}^3/\text{s}$. Για να βρούμε την μάζα νερού που αντιστοιχεί σε αυτήν τη ροή, πολλαπλασιάζουμε τη ροή με την πυκνότητα του νερού:

$$\left(80\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)\left(1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 80.000\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Επομένως, πέφτουν $80.000\ \text{kg}$ νερό ανά δευτερόλεπτο. Έχουμε:

$$\Delta t = 24\ \text{h} = 24(3600\ \text{s}) = 86.400\ \text{s}$$

Η μάζα του νερού που πέφτει κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου είναι:

$$m = \left(80.000\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}\right)(86.400\ \text{s}) = 6.912.000.000\ \text{kg}$$

Το 80% της αρχικής δυναμικής ενέργειας U του νερού είναι η ηλεκτρική ενέργεια E που παράγεται. Επομένως:

$$E = \frac{80}{100}U = \frac{80}{100}mgH$$

$$= \frac{80}{100}(6.912.000.000\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(140\ \text{m})$$

$$= 7.586.611.200.000\ \text{J}$$

$$= \frac{7.586.611.200.000\ \text{J}}{3.600.000\ \text{J/kWh}}$$

$$= 2.107.400\ \text{kWh}$$

3.4 Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

Ερωτήσεις

1. Γνωρίζουμε ότι η δυναμική ενέργεια σε ύψος h είναι:

$$U = mgh$$

όπου m η μάζα της μπίλιας και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

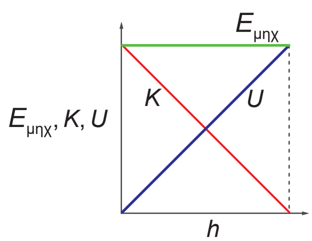
Επειδή κατά την πτώση η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, η μηχανική ενέργεια της μπίλιας παραμένει σταθερή, δηλαδή:

$$E_{\mu\eta\chi} = \text{σταθ.}$$

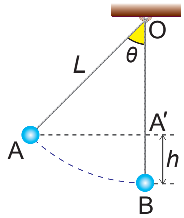
Η κινητική ενέργεια της μπίλιας είναι:

$$K = E_{\mu\eta\chi} - U = \text{σταθ.} - mgh$$

Με βάση τις σχέσεις αυτές προκύπτει το διπλανό διάγραμμα.



2. Έστω L το μήκος του νήματος, του οποίου η αρχική θέση σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο.



Αν A' είναι η προβολή του A στην κατακόρυφο, τότε από το τρίγωνο OAA' έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{(OA')}{(OA)} \quad ή \quad (OA') = (OA)\sigma\upsilon\nu\theta = L\sigma\upsilon\nu\theta$$

Η υψομετρική διαφορά των A, B είναι:

$$h = (OB) - (OA') = L - L\sigma\upsilon\nu\theta = L(1-\sigma\upsilon\nu\theta)$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας προκύπτει ότι η δυναμική ενέργεια γίνεται κινητική:

$$U = K \quad ή \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad ή \quad gh = \frac{1}{2}v^2$$

$$ή \quad v^2 = 2gh$$

οπότε:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Άρα, η ταχύτητα του σφαιριδίου στη θέση B δεν εξαρτάται από τη μάζα του.

3. Στη θέση A ο skater έχει μόνο δυναμική ενέργεια, οπότε η μηχανική του ενέργεια είναι $E_{\mu\eta\chi} = 2000\ \text{J}$.

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας προκύπτει:

$$E_{\mu\eta\chi} = 2000\ \text{J} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την τιμή μπορούμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα.

Θέση	U / J	K / J	$E_{\mu\eta\chi}$ / J
A	2000	0	2000
B	900	1100	2000
Γ	0	2000	2000

4. Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας προκύπτει ότι η ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται κινητική στην μπάλα.

Στην 1η περίπτωση ισχύει:

$$K_1 = U_1 \quad ή \quad K_1 = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2$$

Στην 2η περίπτωση ισχύει:

$$K_2 = U_2 \quad ή \quad K_2 = \frac{1}{2}k(2\Delta L)^2$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}k(\Delta L)^2}{\frac{1}{2}k(2\Delta L)^2} = \left(\frac{\Delta L}{2\Delta L}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Άρα, η κινητική ενέργεια τετραπλασιάζεται.

5. Έστω H το αρχικό ύψος και h το ύψος όπου η κινητική ενέργεια ισούται με τη δυναμική, δηλαδή:

$$K_h = U_h$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας προκύπτει ότι η μηχανική ενέργεια της σφαίρας θα είναι ίδια στα δύο ύψη.

$$E_{\mu\eta\chi,H} = E_{\mu\eta\chi,h} \quad ή \quad K_H + U_H = K_h + U_h$$

$$ή \quad 0 + U_H = U_h + U_h \quad ή \quad U_H = 2U_h$$

$$ή \quad mgH = 2mgh \quad ή \quad h = \frac{H}{2}$$

Με αντικατάσταση του H έχουμε:

$$h = \frac{1{,}6\ \text{m}}{2} = 0{,}8\ \text{m}$$

6. Η αντιστοίχιση γίνεται με βάση το γεγονός ότι η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή και παρατηρώντας σε καθένα από τα σημεία της διαδρομής τη δυναμική ενέργεια. Με τον τρόπο αυτό η αντιστοίχιση φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

Σημείο τροχιάς	Σημείο στο ενεργειακό διάγραμμα
(1)	A
(2)	E
(3)	Δ
(4)	Γ
(5)	B
(6)	–

Το αυτοκινητάκι δεν μπορεί να πάει σε υψηλότερο σημείο από το αρχικό, διότι αυτό θα σήμαινε ότι πήρε από κάπου ενέργεια, κάτι που δεν ισχύει.

7. Οι ενέργειες σε κάθε θέση φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Ισχύει:

$$E_{\mu\eta\chi} = U_\beta + U_{\varepsilon\lambda} + K$$

Θέση	U_{β} / J	$U_{\varepsilon\lambda}$ / J	K / J	$E_{\mu\eta\chi}$ / J
Α	10	0	0	10
Γ	5	0	5	10
Δ	0	0	10	10
Ε	0	2,5	7,5	10
Ζ	0	10	0	10

Στη θέση Α το σώμα έχει μόνο βαρυτική δυναμική ενέργεια:

$$U_{\beta,\mathrm{A}} = wH = (10\ \mathrm{N})(1\ \mathrm{m}) = 10\ \mathrm{J}$$

Επομένως, συμπληρώνουμε την τελευταία στήλη:

$$E_{\mu\eta\chi} = U_{\beta,\mathrm{A}} = 10\ \mathrm{J}$$

Στη θέση Γ, όπου το ύψος είναι το μισό του αρχικού, η βαρυτική δυναμική ενέργεια έχει υποδιπλασιαστεί:

$$U_{\beta,\Gamma} = w\frac{H}{2} = \frac{U_{\beta,\mathrm{A}}}{2} = 5\ \mathrm{J}$$

οπότε:

$$K_{\Gamma} = E_{\mu\eta\chi} - U_{\beta,\Gamma} = 5\ \mathrm{J}$$

Στη θέση Δ όλη η αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια έχει γίνει κινητική:

$$K_{\Delta} = U_{\beta,\mathrm{A}} = 10\ \mathrm{J}$$

Στη θέση Ζ όλη η κινητική ενέργεια που είχε στη θέση Δ έχει γίνει ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου:

$$U_{\varepsilon\lambda,\mathrm{Z}} = K_{\Delta} = 10\ \mathrm{J}$$

και ισχύει:

$$\frac{1}{2}k\left(\Delta L_{max}\right)^2 = K_{\Delta} \quad (1)$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας στις θέσεις Ε και Ζ έχουμε:

$$U_{\varepsilon\lambda,\mathrm{E}} + K_{\mathrm{E}} = U_{\varepsilon\lambda,\mathrm{Z}} + K_{\mathrm{Z}}$$

$$\text{ή}\quad \frac{1}{2}k\left(\Delta L\right)^2 + K_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}k\left(\Delta L_{max}\right)^2$$

και χρησιμοποιώντας την (1) έχουμε:

$$K_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}k\left(\Delta L_{max}\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{\Delta L_{max}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4}\frac{1}{2}k\left(\Delta L_{max}\right)^2 = \frac{3}{4}K_{\Delta} = 7{,}5\ \mathrm{J}$$

οπότε:

$$U_{\varepsilon\lambda,\mathrm{E}} = E_{\mu\eta\chi} - K_{\mathrm{E}} = 2{,}5\ \mathrm{J}$$

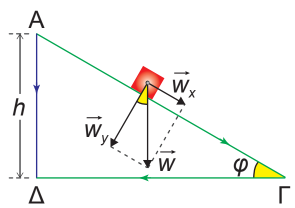
8. Το βάρος είναι συντηρητική δύναμη, οπότε το έργο του είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή. Άρα, το έργο του βάρους είναι ίδιο και στις τρεις διαδρομές.

9. Θα προσδιορίσουμε το έργο του βάρους.

α) Κατά την απευθείας μετάβαση του σώματος από το Α στο Δ το έργο του βάρους είναι:

$$W_w = wh\sigma\upsilon\nu 0 = wh$$

β) Για τη μετάβαση από το Α στο Δ μέσω του Γ ο υπολογισμός είναι πιο περίπλοκος.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ, με $(\mathrm{A}\Gamma) = s$, έχουμε:

$$\eta\mu\varphi = \frac{h}{s} \quad \text{ή} \quad s = \frac{h}{\eta\mu\varphi}$$

Για να βρούμε το έργο του βάρους, αναλύουμε το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες, μια συνιστώσα $\vec{w}_x$ παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και μια συνιστώσα $\vec{w}_y$ κάθετη σε αυτό. Ισχύουν:

$$w_x = w\eta\mu\varphi \quad \text{και} \quad w_y = w\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Επομένως:

$$W_w = W_{w_x} + W_{w_y} = w_x s\sigma\upsilon\nu 0^\circ + w_y s\sigma\upsilon\nu 90^\circ$$

$$= w_x s = w\eta\mu\varphi\frac{h}{\eta\mu\varphi} = wh$$

Παρατηρούμε ότι το έργο του βάρους είναι ίδιο και για τις δύο διαδρομές.

10. α) Σε μια κλειστή διαδρομή το έργο μιας συντηρητικής δύναμης είναι μηδέν. Η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική, οπότε:

$$W_{F_{\varepsilon\lambda},\mathrm{A}\Gamma\mathrm{A}} = 0\ \mathrm{J}$$

β) Υπολογίζουμε το έργο της τριβής ξεχωριστά για κάθε διαδρομή:

$$W_{T,\mathrm{A}\Gamma} = T(\mathrm{A}\Gamma)\sigma\upsilon\nu 180^\circ = -\mu N(\mathrm{A}\Gamma) = -\mu mg\Delta L_{max}$$

$$W_{T,\Gamma\mathrm{A}} = T(\Gamma\mathrm{A})\sigma\upsilon\nu 180^\circ = -\mu N(\Gamma\mathrm{A}) = -\mu mg\Delta L_{max}$$

Επομένως, το έργο της τριβής για την κλειστή διαδρομή ΑΓΑ είναι:

$$W_{T,\mathrm{A}\Gamma\mathrm{A}} = W_{T,\mathrm{A}\Gamma} + W_{T,\Gamma\mathrm{A}}$$

$$= -\mu mg\Delta L_{max} - \mu mg\Delta L_{max} = -2\mu mg\Delta L_{max}$$

Ασκήσεις

1. Από την ΑΔΕ προκύπτει ότι η αρχική δυναμική ενέργεια του πέδιλου γίνεται κινητική στη βάση της πίστας:

$$U = K \quad \text{ή} \quad mgH = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{ή} \quad gH = \frac{1}{2}v^2 \quad \text{ή} \quad v^2 = 2gH$$

οπότε:

$$v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2\left(10\ \text{m/s}^2\right)\left(20\ \text{m}\right)} = 20\ \text{m/s}$$

Εναλλακτικά, από την ΑΔΜΕ μεταξύ της αρχικής θέσης (σε ύψος H) και της τελικής θέσης (στη βάση της πίστας) έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi,\tau\varepsilon\lambda} \quad \text{ή} \quad K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\text{ή} \quad 0 + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + 0$$

$$\text{ή} \quad mgH = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{ή} \quad gH = \frac{1}{2}v^2$$

$$\text{ή} \quad v^2 = 2gH$$

οπότε:

$$v = \sqrt{2gH}$$

που είναι η σχέση στην οποία καταλήξαμε προηγουμένως.

2. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ της αρχικής θέσης (στο έδαφος) και της τελικής θέσης (πάνω από τον πήχη):

$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi,\tau\varepsilon\lambda} \quad \text{ή} \quad K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}mv_{\alpha\rho\chi}^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_{\tau\varepsilon\lambda}^2 + mgh$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}v_{\alpha\rho\chi}^2 = \frac{1}{2}v_{\tau\varepsilon\lambda}^2 + gh$$

$$\text{ή} \quad v_{\alpha\rho\chi}^2 = v_{\tau\varepsilon\lambda}^2 + 2gh$$

οπότε:

$$v_{\alpha\rho\chi} = \sqrt{v_{\tau\varepsilon\lambda}^2 + 2gh}$$

$$= \sqrt{\left(0{,}4\ \text{m/s}\right)^2 + 2\left(9{,}8\ \text{m/s}^2\right)\left(1{,}6\ \text{m}\right)}$$

$$= 5{,}6\ \text{m/s}$$

3. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ της αρχικής θέσης (στο έδαφος) και της τελικής θέσης (πάνω από το τείχος):

$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi,\tau\varepsilon\lambda} \quad \text{ή} \quad K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}mv_{\alpha\rho\chi}^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_{\tau\varepsilon\lambda}^2 + mgh$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}v_{\alpha\rho\chi}^2 = \frac{1}{2}v_{\tau\varepsilon\lambda}^2 + gh$$

$$\text{ή} \quad v_{\tau\varepsilon\lambda}^2 = v_{\alpha\rho\chi}^2 - 2gh$$

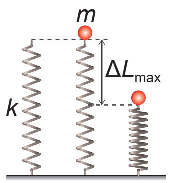
οπότε:

$$v_{\tau\varepsilon\lambda} = \sqrt{v_{\alpha\rho\chi}^2 - 2gh}$$

$$= \sqrt{\left(25\ \text{m/s}\right)^2 - 2\left(10\ \text{m/s}^2\right)\left(2{,}45\ \text{m}\right)}$$

$$= 24\ \text{m/s}$$

4. Από την ΑΔΕ προκύπτει ότι η αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια γίνεται ελαστική δυναμική ενέργεια στο ελατήριο:



$$U_{\beta,\alpha\rho\chi} = U_{\varepsilon\lambda,\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\text{ή} \quad mg\Delta L_{max} = \frac{1}{2}k\left(\Delta L_{max}\right)^2$$

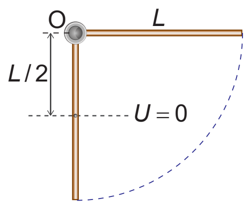
$$\text{ή} \quad mg = \frac{1}{2}k\Delta L_{max}$$

$$\text{ή} \quad \Delta L_{max} = \frac{2mg}{k}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$\Delta L_{max} = \frac{2\left(1\ \text{kg}\right)\left(9{,}8\ \text{m/s}^2\right)}{98\ \text{N/m}} = 0{,}2\ \text{m} = 20\ \text{cm}$$

5. Από την ΑΔΕ προκύπτει ότι η αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια της ράβδου (οριζόντια θέση) γίνεται κινητική ενέργεια περιστροφής (κατακόρυφη θέση):



$$U = K \quad \text{ή} \quad mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{ή} \quad mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\omega^2$$

$$\text{ή} \quad g = \frac{1}{3}L\omega^2$$

οπότε:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{\frac{3\left(10\ \text{m/s}^2\right)}{0{,}3\ \text{m}}} = 10\ \text{rad/s}$$

6. α) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ της αρχικής θέσης (κορυφή πλαγιάς) και της τελικής θέσης (βάση πλαγιάς):

$$E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ} \text{ ή } K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ}$$

$$\text{ή } 0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \text{ ή } h = \frac{v^2}{2g}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$h = \frac{(10\ m/s)^2}{2(10\ m/s^2)} = 5\ m$$

Αν υπήρχε τριβή, το σύστημα θα έφτανε στο έδαφος με μικρότερη ταχύτητα.

β) Η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή κατά την κάθοδο του συστήματος παιδί-έλκηθρο. Μπορεί λοιπόν να υπολογιστεί στο χαμηλότερο σημείο της πλαγιάς, θεωρώντας εκεί τη δυναμική ενέργεια ίση με 0. Έχουμε:

$$E_{μηχ} = 0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(40\ kg)(10\ m/s)^2 = 2000\ J$$

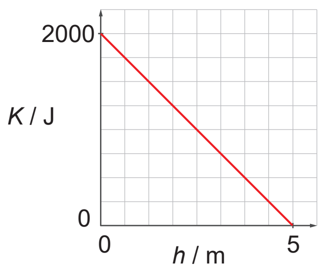
Στην τυχαία θέση θα ισχύει:

$$E_{μηχ} = U + K \text{ ή } K = E_{μηχ} - mgh$$

οπότε έχουμε:

$$K = 2000 - 400h \text{ (SI)}$$

Η γραφική παράσταση της K σε συνάρτηση με το h φαίνεται στο σχήμα.



7. α) Ο πήχης απέχει από το στρώμα:

$$h = (6\ m) - (1{,}2\ m) = 4{,}8\ m$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ θεωρώντας ως αρχική τη θέση πάνω από τον πήχη και ως τελική τη θέση ακριβώς πριν ακουμπήσει στο στρώμα:

$$E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ} \text{ ή } K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}mv_{αρχ}^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_{τελ}^2 + 0$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}v_{αρχ}^2 + gh = \frac{1}{2}v_{τελ}^2$$

$$\text{ή } v_{τελ}^2 = v_{αρχ}^2 + 2gh$$

οπότε:

$$v_{τελ} = \sqrt{v_{αρχ}^2 + 2gh}$$

$$= \sqrt{(0{,}5\ m/s)^2 + 2(10\ m/s^2)(4{,}8\ m)}$$

$$= 9{,}8\ m/s$$

β) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ θεωρώντας ως αρχική τη θέση ακριβώς πριν ο αθλητής ακουμπήσει στο στρώμα και ως τελική τη θέση της πρώτης ακινητοποίησής του. Η αρχική ταχύτητα είναι τώρα η τελική ταχύτητα του προηγούμενου ερωτήματος. Πρέπει να προσέξουμε ότι έχουμε και βαρυτική δυναμική ενέργεια και ελαστική δυναμική ενέργεια.

$$E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ}$$

$$\text{ή } K_{αρχ} + U_{β,αρχ} + U_{ελ,αρχ} = K_{τελ} + U_{β,τελ} + U_{ελ,τελ}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}mv_{αρχ}^2 + mg\Delta L_{max} + 0 = 0 + 0 + \frac{1}{2}k(\Delta L_{max})^2$$

$$\text{ή } (\Delta L_{max})^2 - \frac{2mg}{k}\Delta L_{max} - \frac{mv_{αρχ}^2}{k} = 0$$

Με αντικατάσταση των τιμών προκύπτει:

$$(\Delta L_{max})^2 - 0{,}08\Delta L_{max} - 0{,}384 = 0$$

όπου ΔL_{max} σε μέτρα.

Από την επίλυση της δευτεροβάθμιας δεχόμαστε τη θετική λύση $\Delta L_{max} = 0{,}66$ m.

8. α) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ θεωρώντας ως αρχική τη θέση μέγιστης επιμήκυνσης του λάστιχου της σφεντόνας και ως τελική τη θέση όπου χάνεται η επαφή της μπίλιας με τη σφεντόνα:

$$E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ} \text{ ή } K_{αρχ} + U_{ελ,αρχ} = K_{τελ} + U_{ελ,τελ}$$

$$\text{ή } 0 + \frac{1}{2}k(\Delta L_{max})^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

$$\text{ή } k(\Delta L_{max})^2 = mv^2$$

οπότε:

$$v = \Delta L_{max}\sqrt{\frac{k}{m}} = (0{,}1\ m)\sqrt{\frac{1400\ N/m}{0{,}1\ kg}} = 11{,}8\ m/s$$

β) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ θεωρώντας ως αρχική τη θέση όπου χάνεται η επαφή της μπίλιας με τη σφεντόνα και ως τελική τη θέση μέγιστου ύψους της μπίλιας:

$$E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ} \text{ ή } K_{αρχ} + U_{β,αρχ} = K_{τελ} + U_{β,τελ}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgH \text{ ή } H = \frac{v^2}{2g}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$H = \frac{(11{,}8\ \text{m/s})^2}{2(9{,}8\ \text{m/s}^2)} = 7{,}1\ \text{m}$$

Εναλλακτικά, από την ΑΔΕ προκύπτει ότι όλη η ελαστική δυναμική ενέργεια του λάστιχου στη θέση της μέγιστης επιμήκυνσης γίνεται βαρυτική δυναμική ενέργεια στη θέση του μέγιστου ύψους:

$$\frac{1}{2}k(\Delta L_{max})^2 = mgH \text{ ή } H = \frac{k(\Delta L_{max})^2}{2mg}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$H = \frac{(1400\ \text{N/m})(0{,}1\ \text{m})^2}{2(0{,}1\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)} = 7{,}1\ \text{m}$$

9. **α)** Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ των θέσεων Α, Β:

$$E_{μηχ,Α} = E_{μηχ,Β} \text{ ή } K_Α + U_{β,Α} = K_Β + U_{β,Β}$$

$$\text{ή } 0 + mgH = \frac{1}{2}mv_Β^2 + 0 \text{ ή } v_Β^2 = 2gH$$

οπότε:

$$v_Β = \sqrt{2gH} = \sqrt{2(10\ \text{m/s}^2)(0{,}8\ \text{m})} = 4\ \text{m/s}$$

β) Από τη θέση Β έως τη θέση Γ δεν έχουμε καμία ενεργειακή μετατροπή, οπότε:

$$K_Γ = K_Β$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ θεωρώντας ως αρχική τη θέση Γ και ως τελική τη θέση μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου:

$$E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ} \text{ ή } K_{αρχ} + U_{ελ,αρχ} = K_{τελ} + U_{ελ,τελ}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}mv_Β^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}k(\Delta L_{max})^2$$

$$\text{ή } mv_Β^2 = k(\Delta L_{max})^2$$

οπότε:

$$\Delta L_{max} = v_Β\sqrt{\frac{m}{k}} = (4\ \text{m/s})\sqrt{\frac{1\ \text{kg}}{100\ \text{N/m}}} = 0{,}4\ \text{m}$$

γ) Επειδή δεν υπάρχουν τριβές, η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Συνεπώς, η μπάλα θα φτάσει πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο στο ίδιο ύψος από το οποίο ξεκίνησε.

10. **α)** Αφού οι τριβές είναι αμελητέες, ο πάγος θα φτάσει στο Ε.

β) Ο πάγος θα έχει την ίδια ταχύτητα στα σημεία Β και Δ, αφού αυτά έχουν την ίδια υψομετρική διαφορά από το Α. Αρκεί να υπολογίσουμε την ταχύτητα σε ένα από τα δύο σημεία.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ των θέσεων Α και Β, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το Γ:

$$E_{μηχ,Α} = E_{μηχ,Β} \text{ ή } K_Α + U_{β,Α} = K_Β + U_{β,Β}$$

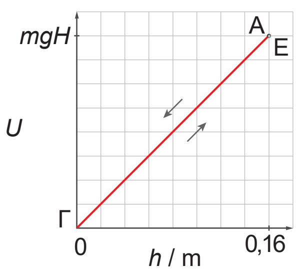
$$\text{ή } 0 + mgH = \frac{1}{2}mv_Β^2 + mg\frac{H}{2}$$

$$\text{ή } mg\frac{H}{2} = \frac{1}{2}mv_Β^2 \text{ ή } v_Β^2 = gH$$

οπότε:

$$v_Β = \sqrt{gH} = \sqrt{(10\ \text{m/s}^2)(0{,}16\ \text{m})} = 1{,}26\ \text{m/s}$$

γ) Η δυναμική ενέργεια μειώνεται γραμμικά με το ύψος, ξεκινώντας από τη μέγιστη τιμή της στο σημείο Α, καθώς ο πάγος κινείται προς στο Γ. Στο σημείο Γ η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται και αρχίζει να αυξάνεται και πάλι, καθώς ο πάγος κινείται προς το σημείο Ε όπου η δυναμική ενέργεια μεγιστοποιείται.



ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Από τη δύναμη στην ενέργεια

3.5 Διατήρηση και υποβάθμιση της ενέργειας

Ερωτήσεις

1. Για να συνεχιστεί οποιαδήποτε κίνηση ή διεργασία, χρειάζεται ενέργεια. Δεν γίνεται να παράγεται ενέργεια από το μηδέν, διότι παραβιάζεται η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας.

2. Το ίδιο ποσό ενέργειας, δηλαδή η αρχική κινητική ενέργεια της κασετίνας, θα γίνει θερμική ενέργεια και στις δύο περιπτώσεις.

3. Και στις δύο περιπτώσεις η απόσταση και το μέτρο της τριβής είναι ίδια, οπότε και το έργο της τριβής θα είναι το ίδιο. Άρα $|\Delta E_{\mu\eta\chi,1}| = |\Delta E_{\mu\eta\chi,2}|$.

4. **α)** Όταν η τσάντα κινείται με σταθερή ταχύτητα, η ενέργεια που δαπανά ο Παναγιώτης είναι ίση με τη θερμική ενέργεια λόγω τριβών.

β) Όταν η τσάντα κινείται με ταχύτητα αυξανόμενου μέτρου, η ενέργεια που δαπανά ο Παναγιώτης είναι μεγαλύτερη από τη θερμική ενέργεια λόγω τριβών. Μέρος της ενέργειας του Παναγιώτη μεταφέρεται, ώστε να αυξήσει την κινητική ενέργεια της τσάντας.

5. Αφού τα οχήματα ακινητοποιούνται μετά τη σύγκρουση, το άθροισμα των κινητικών τους ενεργειών χρησιμοποιείται για την παραμόρφωση των αμαξωμάτων και αυξάνει τη θερμική ενέργεια του συστήματος, δηλαδή των αυτοκινήτων, του οδοστρώματος και του περιβάλλοντός τους.

6. **α)** Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας είναι:

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \Delta U = U_{\tau\varepsilon\lambda} - U_{\alpha\rho\chi} = mgh_{\tau\varepsilon\lambda} - mgh_{\alpha\rho\chi}$$

Το κλάσμα μείωσης της μηχανικής ενέργειας είναι:

$$\frac{\Delta E_{\mu\eta\chi}}{E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi}} = \frac{\Delta U}{U_{\alpha\rho\chi}} = \frac{mgh_{\tau\varepsilon\lambda} - mgh_{\alpha\rho\chi}}{mgh_{\alpha\rho\chi}}$$

$$= \frac{h_{\tau\varepsilon\lambda} - h_{\alpha\rho\chi}}{h_{\alpha\rho\chi}} = \frac{(0{,}8\ \text{m}) - (1\ \text{m})}{1\ \text{m}} = -0{,}2$$

Άρα, το ποσοστό μείωσης της μηχανικής ενέργειας είναι 20%.

Η μείωση της μηχανικής ενέργειας αύξησε τη θερμική ενέργεια του δαπέδου, της μπάλας και του αέρα.

β) Το αρχικό ύψος της δεύτερης αναπήδησης είναι $h_{\alpha\rho\chi} = 0{,}8$ m και έστω $h_{\tau\varepsilon\lambda}$ το τελικό ύψος της. Αφού το ποσοστό μείωσης είναι ίδιο (20%) σε κάθε αναπήδηση, ισχύει:

$$\frac{h_{\tau\varepsilon\lambda} - h_{\alpha\rho\chi}}{h_{\alpha\rho\chi}} 100\% = -20\% \ \text{ή}\ \frac{h_{\tau\varepsilon\lambda} - h_{\alpha\rho\chi}}{h_{\alpha\rho\chi}} = -0{,}2$$

$$\text{ή}\ h_{\tau\varepsilon\lambda} = 0{,}8 h_{\alpha\rho\chi}$$

οπότε $h_{\tau\varepsilon\lambda} = 0{,}64$ m.

Το αρχικό ύψος της τρίτης αναπήδησης είναι $h_{\alpha\rho\chi} = 0{,}64$ m και έστω $h_{\tau\varepsilon\lambda}$ το τελικό ύψος της. Για την τρίτη αναπήδηση ισχύει και πάλι:

$$\frac{h_{\tau\varepsilon\lambda} - h_{\alpha\rho\chi}}{h_{\alpha\rho\chi}} 100\% = -20\% \ \text{ή}\ \frac{h_{\tau\varepsilon\lambda} - h_{\alpha\rho\chi}}{h_{\alpha\rho\chi}} = -0{,}2$$

$$\text{ή}\ h_{\tau\varepsilon\lambda} = 0{,}8 h_{\alpha\rho\chi}$$

οπότε $h_{\tau\varepsilon\lambda} = 0{,}512$ m.

7. Η γωνιακή ταχύτητα του τροχού υποδιπλασιάζεται:

$$\omega_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{\omega_{\alpha\rho\chi}}{2}$$

Το ποσοστό % απώλειας της κινητικής ενέργειας του τροχού είναι:

$$\frac{\Delta K}{K_{\alpha\rho\chi}} 100\% = \frac{K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}}{K_{\alpha\rho\chi}} 100\%$$

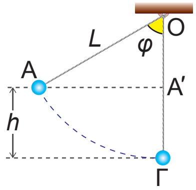
$$= \frac{\frac{1}{2} I\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2} I\omega_{\alpha\rho\chi}^2}{\frac{1}{2} I\omega_{\alpha\rho\chi}^2} 100\%$$

$$= \frac{\left(\frac{\omega_{\alpha\rho\chi}}{2}\right)^2 - \omega_{\alpha\rho\chi}^2}{\omega_{\alpha\rho\chi}^2} 100\%$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1\right) 100\% = -75\%$$

Η μηχανική ενέργεια που έχασε ο τροχός μετατράπηκε σε θερμική.

8. Έστω Ο το σημείο ανάρτησης του νήματος και Α′ η προβολή του Α πάνω στην κατακόρυφο που διέρχεται από το Ο.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΑ′ έχουμε:

$$\text{συν}\varphi = \frac{(\text{ΟΑ}')}{(\text{ΟΑ})} \text{ ή } (\text{ΟΑ}') = L\text{συν}\varphi$$

Επομένως:

$$h = (\text{ΟΓ}) - (\text{ΟΑ}') = L - L\text{συν}\varphi = L(1-\text{συν}\varphi)$$

Αρχικά, το εκκρεμές έχει μόνο δυναμική ενέργεια:

$$U = mgh = mgL(1-\text{συν}\varphi)$$

Αυτή η δυναμική ενέργεια είναι ίση με την απώλεια μηχανικής ενέργειας και μετατρέπεται τελικά σε θερμική.

Ασκήσεις

1. Από την ΑΔΕ προκύπτει ότι η αρχική δυναμική ενέργεια στην κορυφή της τσουλήθρας γίνεται κινητική στη βάση της και θερμική λόγω τριβής:

$$U_{\beta,\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + E_\theta \text{ ή } mgh = \frac{1}{2}mv^2 + E_\theta$$

$$\text{ή } E_\theta = mgh - \frac{1}{2}mv^2$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$E_\theta = (12\text{ kg})(10\text{ m/s}^2)(2\text{ m}) - \frac{1}{2}(12\text{ kg})(1\text{ m/s})^2 = 234\text{ J}$$

2. Είναι $m = 200\text{ g} = 0{,}2\text{ kg}$.

α) Θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το Β ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi,\text{A}} = K_\text{A} + U_\text{A} = \frac{1}{2}mv_\text{A}^2 + mgh = \left[\frac{1}{2}(0{,}2)(10)^2 + (0{,}2)(9{,}8)(15)\right]\text{J} = 39{,}4\text{ J}$$

και

$$E_{\mu\eta\chi,\text{B}} = K_\text{B} + U_\text{B} = \frac{1}{2}mv_\text{B}^2 + 0 = \frac{1}{2}(0{,}2\text{ kg})(17\text{ m/s})^2 = 28{,}9\text{ J}$$

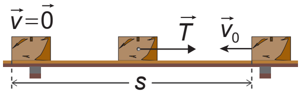
Επειδή $E_{\mu\eta\chi,\text{B}} < E_{\mu\eta\chi,\text{A}}$, υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας.

β) Η απώλεια μηχανικής ενέργειας είναι:

$$|E_{\mu\eta\chi,\text{B}} - E_{\mu\eta\chi,\text{A}}| = |(28{,}9\text{ J}) - (39{,}4\text{ J})| = 10{,}5\text{ J}$$

Η μηχανική ενέργεια που χάθηκε από την μπάλα μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια.

3. Είναι $m = 500\text{ g} = 0{,}5\text{ kg}$.



α) Η τριβή έχει μέτρο:

$$T = \mu N = \mu mg$$

Έχουμε:

$$E_\theta = |W_T| = |T s\,\text{συν}180°| = \mu mgs = (0{,}1)(0{,}5\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(1\text{ m}) = 0{,}49\text{ J}$$

β) Από την ΑΔΕ προκύπτει ότι η αρχική κινητική ενέργεια γίνεται θερμική:

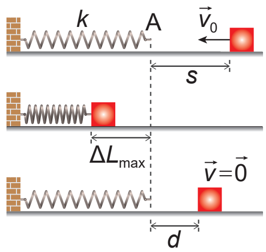
$$K = E_\theta \text{ ή } \frac{1}{2}mv_0^2 = E_\theta \text{ ή } v_0 = \sqrt{\frac{2E_\theta}{m}}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(0{,}49\text{ J})}{(0{,}5\text{ kg})}} = 1{,}4\text{ m/s}$$

4. Η τριβή έχει μέτρο:

$$T = \mu N = \mu mg$$



α) Από την ΑΔΕ μεταξύ της αρχικής θέσης και της θέσης μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου προκύπτει ότι η αρχική κινητική ενέργεια γίνεται θερμική και ελαστική δυναμική ενέργεια ελατηρίου:

$$K = E_\theta + U_{\varepsilon\lambda}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}mv_0^2 = |W_T| + \frac{1}{2}k(\Delta L_{max})^2$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}mv_0^2 = \mu mg(s + \Delta L_{max}) + \frac{1}{2}k(\Delta L_{max})^2$$

Επομένως:

$$v_0 = \sqrt{2\mu g\left(s + \Delta L_{max}\right) + \frac{k\left(\Delta L_{max}\right)^2}{m}}$$

$$= \sqrt{2(0{,}5)(10)(3{,}2) + \frac{(200)(0{,}2)^2}{2}}\ \text{m/s} = 6\ \text{m/s}$$

β) Έστω d η απόσταση του άκρου Α του ελατηρίου από το σημείο στο οποίο θα σταματήσει ο κύβος κινούμενος προς την αρχική του θέση. Από την ΑΔΕ μεταξύ της θέσης μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου και της θέσης όπου σταματά προκύπτει ότι η ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται θερμική:

$$U_{\varepsilon\lambda} = E_\theta \ \text{ ή } \ \frac{1}{2}k\left(\Delta L_{max}\right)^2 = \left|W_T\right|$$

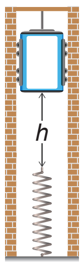
$$\text{ή } \ \frac{1}{2}k\left(\Delta L_{max}\right)^2 = \mu m g\left(\Delta L_{max} + d\right)$$

Επομένως:

$$d = \frac{k\left(\Delta L_{max}\right)^2}{2\mu m g} - \Delta L_{max}$$

$$= \frac{(200\ \text{N/m})(0{,}2\ \text{m})^2}{2(0{,}5)(2\ \text{kg})\left(10\ \text{m/s}^2\right)} - (0{,}2\ \text{m}) = 0{,}2\ \text{m}$$

5. α) Όταν ο θάλαμος ακινητοποιείται, ασκούνται σε αυτόν οι εξής δυνάμεις:



- το βάρος του,
- η δύναμη του ελατηρίου,
- η δύναμη που ασκεί το σύστημα φρεναρίσματος.

Η δύναμη του βάρους έχει κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρο $w = 2{\cdot}10^4$ N.

Το ελατήριο ασκεί στον θάλαμο δύναμη με κατεύθυνση προς τα πάνω και μέτρο:

$$F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta L_{max} = \left(10^5\ \text{N/m}\right)(0{,}3\ \text{m}) = 3{\cdot}10^4\ \text{N}$$

Πρέπει να ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \ \text{ ή } \ \vec{w} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{F}_\varphi = \vec{0}$$

Επειδή $F_{\varepsilon\lambda} > w$, η δύναμη $\vec{F}_\varphi$ από το σύστημα φρεναρίσματος έχει κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς τα κάτω.

Αλγεβρικά, έχουμε:

$$F_\varphi = F_{\varepsilon\lambda} - w = \left(3{\cdot}10^4\ \text{N}\right) - \left(2{\cdot}10^4\ \text{N}\right) = 10^4\ \text{N}$$

β) Από την ΑΔΕ η αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια του θαλάμου γίνεται θερμική και ελαστική δυναμική ενέργεια:

$$U_{\beta,\alpha\rho\chi} = U_{\varepsilon\lambda,\tau\varepsilon\lambda} + E_\theta$$

$$\text{ή } \ w\left(h + \Delta L_{max}\right) = \frac{1}{2}k\left(\Delta L_{max}\right)^2 + E_\theta$$

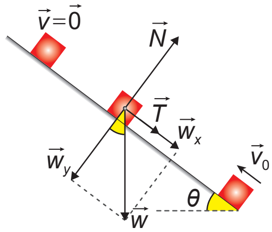
$$\text{ή } \ E_\theta = w\left(h + \Delta L_{max}\right) - \frac{1}{2}k\left(\Delta L_{max}\right)^2$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$E_\theta = \left(2{\cdot}10^4\ \text{N}\right)(4{,}3\ \text{m}) - \frac{1}{2}\left(10^5\ \text{N/m}\right)(0{,}3\ \text{m})^2$$

$$= 8{,}15{\cdot}10^4\ \text{J}$$

6. α) Αναλύουμε το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες, μια συνιστώσα $\vec{w}_x$ παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και μια συνιστώσα $\vec{w}_y$ κάθετη σε αυτό.



Ισχύουν:

$$w_x = mg\eta\mu\theta = (2\ \text{kg})\left(10\ \text{m/s}^2\right)(0{,}6) = 12\ \text{N}$$

$$w_y = mg\sigma\upsilon\nu\theta = (2\ \text{kg})\left(10\ \text{m/s}^2\right)(0{,}8) = 16\ \text{N}$$

Ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \ \text{ ή } \ N = w_y$$

οπότε για το μέτρο της τριβής έχουμε:

$$T = \mu N = \mu w_y$$

Για το έργο του βάρους και το έργο της τριβής έχουμε:

$$W_w = W_{w_x} + W_{w_y} = w_x \Delta x \sigma\upsilon\nu 180° + w_y \Delta x \sigma\upsilon\nu 90°$$

$$= -w_x \Delta x + 0 = -w_x \Delta x$$

$$W_T = T\Delta x \sigma\upsilon\nu 180° = -\mu w_y \Delta x \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ κατά την άνοδο, από τη βάση έως το μέγιστο ύψος:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w + W_T + W_N$$

$$\text{ή } \ 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu w_y \Delta x - w_x \Delta x + 0$$

Επομένως:

$$\mu = \frac{mv_0^2}{2w_y \Delta x} - \frac{w_x}{w_y} = \frac{(2\ \text{kg})(10\ \text{m/s})^2}{2(16\ \text{N})(5\ \text{m})} - \frac{12\ \text{N}}{16\ \text{N}} = 0{,}5$$

β) Το έργο της τριβής στην άνοδο και στην κάθοδο είναι το ίδιο. Από τη σχέση (1) το έργο της τριβής στην άνοδο είναι:

$$W_T = -(0{,}5)(16\ \text{N})(5\ \text{m}) = -40\ \text{J}$$

Επομένως, η συνολική θερμική ενέργεια είναι:

$$E_\theta = 2|W_T| = 2|-40\ \text{J}| = 80\ \text{J}$$

γ) Από την ΑΔΕ μεταξύ του σημείου εκτόξευσης (αρχική θέση) και του σημείου επιστροφής (τελική θέση που ταυτίζεται με την αρχική) προκύπτει ότι η αρχική κινητική ενέργεια γίνεται θερμική και τελική κινητική:

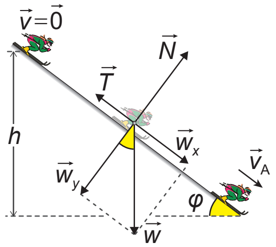
$$K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + E_\theta \ \text{ ή } \ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + E_\theta$$

$$\text{ή } \ v^2 = v_0^2 - \frac{2E_\theta}{m}$$

Επομένως:

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2E_\theta}{m}} = \sqrt{(10\ \text{m/s})^2 - \frac{2(80\ \text{J})}{2\ \text{kg}}} = 2\sqrt{5}\ \text{m/s}$$

7.



α) Η μηχανική ενέργεια της σκιέρ στην κορυφή της πλαγιάς είναι:

$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = 0 + mgh$$

$$= (60\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)(120\ \text{m}) = 72.000\ \text{J}$$

Η σκιέρ κατά την κάθοδό της χάνει το $1/3$ της αρχικής μηχανικής ενέργειας υπό μορφή θερμικής ενέργειας. Συνεπώς:

$$E_\theta = \frac{1}{3}E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = \frac{1}{3}(72.000\ \text{J}) = 24.000\ \text{J}$$

Η μετατόπιση της σκιέρ πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο υπολογίζεται από το ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα την πλαγιά:

$$\Delta x = \frac{h}{\eta\mu\varphi} = \frac{120\ \text{m}}{0{,}6} = 200\ \text{m}$$

Αναλύουμε το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες, μια συνιστώσα $\vec{w}_x$ παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και μια συνιστώσα $\vec{w}_y$ κάθετη σε αυτό. Ισχύουν:

$$w_x = mg\eta\mu\theta = (60\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)(0{,}6) = 360\ \text{N}$$

$$w_y = mg\sigma\upsilon\nu\theta = (60\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)(0{,}8) = 480\ \text{N}$$

Ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \ \text{ ή } \ N = w_y$$

οπότε το μέτρο της τριβής είναι:

$$T = \mu N = \mu w_y$$

Για το έργο της τριβής έχουμε:

$$W_T = T\Delta x\sigma\upsilon\nu 180^\circ = -\mu w_y \Delta x$$

Ισχύει:

$$E_\theta = |W_T| \ \text{ ή } \ E_\theta = \mu w_y \Delta x \ \text{ ή } \ \Delta x = \frac{E_\theta}{\mu w_y}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$\mu = \frac{24.000\ \text{J}}{(480\ \text{N})(200\ \text{m})} = 0{,}25$$

β) Από την ΑΔΕ μεταξύ της κορυφής της πλαγιάς (αρχική θέση) και της βάσης της (τελική θέση) προκύπτει ότι η αρχική μηχανική ενέργεια γίνεται θερμική και τελική κινητική:

$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + E_\theta \ \text{ ή } \ E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}mv_A^2 + E_\theta$$

$$\text{ή } \ v_A^2 = \frac{2(E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} - E_\theta)}{m}$$

Επομένως:

$$v_A = \sqrt{\frac{2(E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} - E_\theta)}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(72.000\ \text{J} - 24.000\ \text{J})}{60\ \text{kg}}} = 40\ \text{m/s}$$

8. α) Από την ΑΔΕ προκύπτει ότι όλη η αρχική κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου γίνεται θερμική:

$$K_{\alpha\rho\chi} = E_\theta$$

Επομένως:

$$E_\theta = \frac{1}{2}mv_{\alpha\rho\chi}^2 = \frac{1}{2}(1200\ \text{kg})(15\ \text{m/s})^2 = 135.000\ \text{J}$$

β) Το έργο της δύναμης αντίστασης μέχρι την ακινητοποίηση του οχήματος είναι:

$$W_{F_{\alpha\nu\tau}} = F_{\alpha\nu\tau}d\sigma\upsilon\nu 180^\circ = -F_{\alpha\nu\tau}d$$

Ισχύει:

$$E_\theta = |W_{F_{\alpha\nu\tau}}| \ \text{ ή } \ E_\theta = F_{\alpha\nu\tau}d \ \text{ ή } \ d = \frac{E_\theta}{F_{\alpha\nu\tau}}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$d = \frac{E_\theta}{F_{αντ}} = \frac{135.000 \text{ J}}{1000 \text{ N}} = 135 \text{ m}$$

9. α) Η τριβή έχει μέτρο:

$$T = \mu N = \mu mg$$

Ισχύει:

$$E_\theta = |W_T| = |Td συν180°| = |\mu mgd(-1)| = \mu mgd$$
$$= (0{,}8)(1250 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(16 \text{ m})$$
$$= 156.800 \text{ J}$$

β) Για να διερευνήσουμε αν ο οδηγός έχει παραβιάσει το όριο ταχύτητας, θα υπολογίσουμε την αρχική ταχύτητα. Από την ΑΔΕ προκύπτει ότι όλη η αρχική κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου γίνεται θερμική:

$$K_{αρχ} = E_\theta \text{ ή } E_\theta = \frac{1}{2}mv_{αρχ}^2 \text{ ή } v_{αρχ}^2 = \frac{2E_\theta}{m}$$

Επομένως:

$$v_{αρχ} = \sqrt{\frac{2E_\theta}{m}} = \sqrt{\frac{2(156.800 \text{ J})}{1250 \text{ kg}}} = 15{,}84 \text{ m/s}$$

Μετατρέπουμε το όριο της ταχύτητας σε m/s, για να το συγκρίνουμε με την αρχική ταχύτητα:

$$80\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 80\,\frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 22{,}2 \text{ m/s} > 15{,}84 \text{ m/s}$$

Άρα, ο οδηγός δεν έχει παραβιάσει το όριο ταχύτητας.

γ) Αν λαμβάναμε υπόψη την αντίσταση του αέρα, τότε το μέτρο της ταχύτητας που υπολογίσαμε στο ερώτημα β) θα ήταν μεγαλύτερο.

10. Η κινητική ενέργεια του αστεροειδούς ήταν:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(10^{12} \text{ kg})(4 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2 = 8 \cdot 10^{20} \text{ J}$$

Επομένως:

$$\frac{K}{E_{βομβ}} = \frac{8 \cdot 10^{20} \text{ J}}{6{,}3 \cdot 10^{13} \text{ J}} = 1{,}3 \cdot 10^7 \text{ ή } K = 1{,}3 \cdot 10^7 E_{βομβ}$$

Άρα, η ενέργεια του αστεροειδούς ήταν 13 εκατομμύρια φορές μεγαλύτερη από την ενέργεια της ατομικής βόμβας στη Χιροσίμα.

Κατά την πρόσκρουση του αστεροειδούς στη Γη, η τεράστια κινητική του ενέργεια μετατράπηκε σε διάφορες μορφές ενέργειας, προκαλώντας παγκόσμιες καταστροφές.

Ένα σημαντικό ποσοστό της κινητικής ενέργειας μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια, με αποτέλεσμα την παραγωγή εξαιρετικά υψηλών θερμοκρασιών στην περιοχή πρόσκρουσης, ικανών να λιώσουν και να εξαερώσουν πετρώματα και να προκαλέσουν μαζικές πυρκαγιές.

Παράλληλα, ένα μέρος της ενέργειας μετατράπηκε σε μηχανική ενέργεια υπό μορφή κρουστικών κυμάτων και σεισμών οι οποίοι διαδόθηκαν σε μεγάλο μέρος του πλανήτη.

Άλλη μορφή μετατροπής αφορούσε στην κινητική ενέργεια υλικών (θραυσμάτων), καθώς τεράστιες ποσότητες πετρωμάτων, σκόνης και ατμοποιημένης ύλης εκτοξεύθηκαν στην ατμόσφαιρα και το διάστημα.

Επίσης, η πρόσκρουση προκάλεσε τη δημιουργία γιγαντιαίων κυμάτων (τσουνάμι), αποτέλεσμα της μετατροπής ενέργειας σε δυναμική και κινητική ενέργεια των υδάτων, τα οποία σάρωσαν τις παράκτιες περιοχές.

Τέλος, η εκτόξευση σωματιδίων στην ανώτερη ατμόσφαιρα δημιούργησε ένα παγκόσμιο πέπλο σκόνης που περιόρισε σημαντικά την ηλιακή ακτινοβολία, οδηγώντας σε μακροχρόνια πτώση της θερμοκρασίας και σε σημαντικές κλιματικές μεταβολές.

Όλες αυτές οι μετατροπές της αρχικής κινητικής ενέργειας συνέβαλαν καθοριστικά στην εξαφάνιση των δεινοσαύρων και μεγάλου μέρους της ζωής στον πλανήτη.

3.6 Υποβάθμιση της ενέργειας – Θερμικές μηχανές

Ερωτήσεις

1. Δεν θα ήταν δυνατόν να γίνει αυτό, διότι η θερμική ενέργεια δεν μπορεί να μετατραπεί πλήρως σε έργο, ώστε να ανακτηθεί ολόκληρη η αρχική κινητική ενέργεια.

2. Η αρχή λειτουργίας των θερμικών μηχανών είναι η μετατροπή της θερμικής ενέργειας σε μηχανικό έργο. Σε κάθε θερμική μηχανή υπάρχει μια διαδικασία μεταφοράς θερμότητας από μια δεξαμενή υψηλής θερμοκρασίας σε μια δεξαμενή χαμηλότερης θερμοκρασίας, κατά την οποία ένα μέρος της θερμικής ενέργειας μετατρέπεται σε ωφέλιμο έργο.

3. Η απόδοση μιας ατμομηχανής εξαρτάται από διάφορους παράγοντες που σχετίζονται με τη θερμοδυναμική, τη μηχανολογία και τα υλικά κατασκευής. Οι βασικότεροι είναι οι εξής:

- Η **θερμοκρασιακή διαφορά** μεταξύ του ατμού που παράγεται στον λέβητα (θερμή δεξαμενή) και της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος (ψυχρή δεξαμενή). Η αύξηση της θερμοκρασιακής διαφοράς αυξάνει τη δυνατότητα μετατροπής της θερμικής ενέργειας σε μηχανικό έργο με επακόλουθη αύξηση της απόδοσης.
- Οι **απώλειες (ή μη) θερμότητας**. Η μείωσή τους μπορεί να βελτιώσει την απόδοση.
- Οι **μηχανικές απώλειες**, όπως δυνάμεις τριβής στα κινούμενα μέρη (σε έμβολα, άξονες κτλ.). Αυτές μειώνουν την απόδοση. Η μείωση των μηχανικών απωλειών με τη χρήση λίπανσης και κατάλληλων υλικών βελτιώνει την απόδοση.
- Η **ποιότητα του καυσίμου**. Καύσιμα με υψηλότερη ενεργειακή απόδοση «παράγουν» περισσότερη θερμότητα με μικρότερη ποσότητα καυσίμου.

4. • Η **ατμομηχανή** χρησιμοποιεί ως πηγή ενέργειας τη θερμότητα από την καύση καυσίμων όπως κάρβουνου ή ξύλου για τη δημιουργία ατμού. Η θερμότητα αυτή αυξάνει τη θερμοκρασία του νερού στον λέβητα δημιουργώντας ατμό υψηλής πίεσης. Ο ατμός αυτός κατευθύνεται σε έναν κύλινδρο, όπου διαστέλλεται ωθώντας ένα έμβολο. Η κίνηση του εμβόλου μετατρέπεται σε περιστροφική κίνηση μέσω ενός στροφαλοφόρου άξονα παράγοντας μηχανικό έργο. Η απόδοση των ατμομηχανών είναι συνήθως χαμηλή, λόγω των απωλειών θερμότητας και της ανάγκης για συμπύκνωση του ατμού.

• Η **μηχανή εσωτερικής** καύσης χρησιμοποιεί ως πηγή ενέργειας καύσιμα όπως βενζίνη, ντίζελ, φυσικό αέριο ή υγραέριο, τα οποία καίγονται απευθείας μέσα στους κυλίνδρους της μηχανής. Το καύσιμο αναμειγνύεται με τον ατμοσφαιρικό αέρα και αναφλέγεται, προκαλώντας τη διαστολή των αερίων. Η διαστολή αυτή ωθεί ένα έμβολο, παράγοντας έργο. Όπως και στις ατμομηχανές, η κίνηση του εμβόλου μετατρέπεται σε περιστροφική κίνηση μέσω ενός στροφαλοφόρου άξονα. Η απόδοση των μηχανών εσωτερικής καύσης είναι υψηλότερη αυτής των ατμομηχανών. Αυτό οφείλεται στη χρήση καυσίμων υψηλής ενεργειακής πυκνότητας, στις τέλειες καύσεις και στη μείωση των απωλειών ενέργειας.

5. Έχουμε:

$$e = 0{,}4 \quad \text{ή} \quad 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h} = 0{,}4 \quad \text{ή} \quad \frac{|Q_c|}{Q_h} = 0{,}6$$

6. Ισχύουν:

$$Q_{h,\mathrm{A}} = Q_{h,\mathrm{B}} \quad \text{και} \quad |Q_{c,\mathrm{A}}| > |Q_{c,\mathrm{B}}|$$

Επομένως:

$$\frac{|Q_{c,\mathrm{A}}|}{Q_{h,\mathrm{A}}} > \frac{|Q_{c,\mathrm{B}}|}{Q_{h,\mathrm{B}}} \quad \text{ή} \quad -\frac{|Q_{c,\mathrm{A}}|}{Q_{h,\mathrm{A}}} < -\frac{|Q_{c,\mathrm{B}}|}{Q_{h,\mathrm{B}}}$$

$$\text{ή} \quad 1 - \frac{|Q_{c,\mathrm{A}}|}{Q_{h,\mathrm{A}}} < 1 - \frac{|Q_{c,\mathrm{B}}|}{Q_{h,\mathrm{B}}} \quad \text{ή} \quad e_\mathrm{A} < e_\mathrm{B}$$

Ασκήσεις

1. Έχουμε:

$$e = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h} \quad \text{ή} \quad \frac{|Q_c|}{Q_h} = 1 - e \quad \text{ή} \quad Q_h = \frac{|Q_c|}{1 - e}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$Q_h = \frac{120.000\ \mathrm{J}}{1 - 0{,}25} = 160.000\ \mathrm{J}$$

Από τη σχέση:

$$e = \frac{W}{Q_h}$$

υπολογίζουμε το ωφέλιμο έργο:

$$W = eQ_h = (0{,}25)(160.000\ \mathrm{J}) = 40.000\ \mathrm{J}$$

2. • Για τη μηχανή Α ισχύει:

$$e = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h} = 1 - \frac{20.000\ \mathrm{J}}{50.000\ \mathrm{J}} = 0{,}6$$

δηλαδή απόδοση 60% και έχουμε:

$$W = eQ_h = (0{,}6)(50.000\ \mathrm{J}) = 30.000\ \mathrm{J}$$

- Για τη μηχανή Β ισχύει:

$$Q_h = W + |Q_c| = (10.000\ \text{J}) + (15.000\ \text{J})$$
$$= 25.000\ \text{J}$$

και

$$e = \frac{W}{Q_h} = \frac{10.000\ \text{J}}{25.000\ \text{J}} = 0{,}4$$

δηλαδή απόδοση 40%.

- Για τη μηχανή Γ ισχύει:

$$e = \frac{W}{Q_h} \quad \text{ή} \quad Q_h = \frac{W}{e}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$Q_h = \frac{15.000\ \text{J}}{0{,}3} = 50.000\ \text{J}$$

και

$$|Q_c| = Q_h - W = (50.000\ \text{J}) - (15.000\ \text{J})$$
$$= 35.000\ \text{J}$$

Ακολουθεί ο ζητούμενος πίνακας συμπληρωμένος.

Μηχανή	Q_h / J	$\lvert Q_c \rvert$ / J	W / J	e / %
Α	50.000	20.000	30.000	60
Β	25.000	15.000	10.000	40
Γ	50.000	35.000	15.000	30

3. Είναι $1\ \text{h} = 3600\ \text{s}$.

Έχουμε:

$$W = eQ_h = (0{,}3)(9 \cdot 10^6\ \text{J}) = 2{,}7 \cdot 10^6\ \text{J}$$

Επομένως:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{2{,}7 \cdot 10^6\ \text{J}}{3600\ \text{s}} = 0{,}75 \cdot 10^3\ \text{W} = 0{,}75\ \text{kW}$$

4. α) Ισχύει:

$$e = \frac{W}{Q_h} \quad \text{ή} \quad Q_h = \frac{W}{e}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$Q_h = \frac{600\ \text{J}}{0{,}3} = 2000\ \text{J}$$

β) Από διατήρηση της ενέργειας ισχύει:

$$|Q_c| = Q_h - W = (2000\ \text{J}) - (600\ \text{J}) = 1400\ \text{J}$$

Εναλλακτικά:

$$e = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h} \quad \text{ή} \quad |Q_c| = (1-e)Q_h$$

και με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$|Q_c| = (1-e)Q_h = (1-0{,}3)(2000\ \text{J}) = 1400\ \text{J}$$

5. Αν διαιρέσουμε τους όρους του κλάσματος στη σχέση $e = \frac{W}{Q_h}$ με τον χρόνο Δt, προκύπτει:

$$e = \frac{P}{P_h}$$

Επομένως:

$$P_h = \frac{P}{e} = \frac{120.000\ \text{W}}{0{,}3} = 400.000\ \text{W} = 400\ \text{kW}$$

Με το ίδιο σκεπτικό, αν διαιρέσουμε με τον χρόνο τους όρους που εκφράζουν τη διατήρηση της ενέργειας για μια θερμική μηχανή, τότε για τους ρυθμούς προκύπτει:

$$|P_c| = P_h - P = (400.000\ \text{W}) - (120.000\ \text{W})$$
$$= 280.000\ \text{W} = 280\ \text{kW}$$

Εναλλακτικά, για $t = 1\ \text{s}$ και $P = 120\ \text{kW}$ έχουμε:

$$W = Pt = (120.000\ \text{W})(1\ \text{s}) = 120.000\ \text{J}$$

Επομένως:

$$Q_h = \frac{W}{e} = \frac{120.000\ \text{J}}{0{,}3} = 400.000\ \text{J}$$

$$|Q_c| = Q_h - W = (400.000\ \text{J}) - (120.000\ \text{J})$$
$$= 280.000\ \text{J}$$

Άρα, οι ζητούμενοι ρυθμοί είναι:

$$P_c = \frac{|Q_c|}{t} = \frac{280.000\ \text{J}}{1\ \text{s}} = 280.000\ \text{W} = 280\ \text{kW}$$

$$P_h = \frac{Q_h}{t} = \frac{400.000\ \text{J}}{1\ \text{s}} = 400.000\ \text{W} = 400\ \text{kW}$$

6. α) Είναι $1{,}5\ \text{min} = 90\ \text{s}$. Η ισχύς της μηχανής είναι:

$$P = \frac{W_F}{t} = \frac{Fh}{t} = \frac{wh}{t} = \frac{(1000\ \text{N})(9\ \text{m})}{90\ \text{s}} = 100\ \text{W}$$

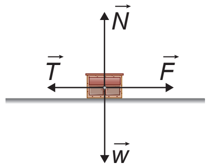
β) Αν $P' = 250\ \text{W}$ η προσφερόμενη ισχύς, ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής του αναβατορίου είναι:

$$e = \frac{P}{P'} = \frac{100\ \text{W}}{250\ \text{W}} = 0{,}4$$

Άρα, η απόδοση της μηχανής είναι 40%.

Προβλήματα

1. α) Οι ασκούμενες δυνάμεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα. $\vec{F}$ είναι η δύναμη που ασκεί ο μαθητής, $\vec{w}$ το βάρος του επίπλου, $\vec{N}$ η κάθετη δύναμη από το δάπεδο και $\vec{T}$ η τριβή ολίσθησης.



β) Λόγω ακινησίας στον *y*-άξονα, ισχύει $\vec{N}+\vec{w}=\vec{0}$, οπότε:

$$N-w=0 \quad \text{ή} \quad N=mg$$

Το μέτρο της τριβής είναι:

$$T=\mu N=\mu mg=(0{,}4)(40\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)=160\ \text{N}$$

Στον *x*-άξονα ισχύει:

$$\Sigma F=ma \ \text{ ή } \ F-T=ma \ \text{ ή } \ a=\frac{F-T}{m}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$a=\frac{(180\ \text{N})-(160\ \text{N})}{40\ \text{kg}}=0{,}5\ \text{m/s}^2$$

Η μετατόπιση στα πρώτα $4\ \text{s}$ είναι:

$$\Delta x=v_0\Delta t+\frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$
$$=(0\ \text{m})+\frac{1}{2}(0{,}5\ \text{m/s}^2)(4\ \text{s})^2$$
$$=4\ \text{m}$$

Επομένως:

$$W_F=F\Delta x\,\text{συν}0°=(180\ \text{N})(4\ \text{m})(1)=720\ \text{J}$$
$$W_N=W_w=0$$
$$W_T=T\Delta x\,\text{συν}180°=(160\ \text{N})(4\ \text{m})(-1)=-640\ \text{J}$$

γ) Έχουμε:

$$E_{\text{χημ}}=W_F=720\ \text{J}$$
$$E_\theta=|W_T|=640\ \text{J}$$

δ) Η ταχύτητα στο τέλος του χρόνου των $4\ \text{s}$ είναι:

$$v=v_0+a\Delta t=(0\ \text{m/s})+(0{,}5\ \text{m/s}^2)(4\ \text{s})=2\ \text{m/s}$$

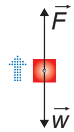
Επομένως, η τελική κινητική ενέργεια είναι:

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(40\ \text{kg})(2\ \text{m/s})^2=80\ \text{J}$$

Παρατηρούμε πως μεταξύ των ποσών ενέργειας που υπολογίσαμε ισχύει η σχέση:

$$E_{\text{χημ}}=E_\theta+K$$

2. α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο δέμα είναι το βάρος του $\vec{w}$ και η δύναμη $\vec{F}$ από τον γερανό.



β) Μελετώντας την κατακόρυφη κίνηση του σώματος έχουμε:

$$\Sigma F=ma \ \text{ ή } \ F-w=ma \ \text{ ή } \ a=\frac{F-mg}{m}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$a=\frac{(1080\ \text{N})-(100\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{100\ \text{kg}}=1\ \text{m/s}^2$$

Η μετατόπιση του δέματος στον χρόνο των $2\ \text{s}$ είναι:

$$\Delta y=v_0\Delta t+\frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$
$$=(0\ \text{m})+\frac{1}{2}(1\ \text{m/s}^2)(2\ \text{s})^2=2\ \text{m}$$

Επομένως:

$$W_F=F\Delta y\,\text{συν}0°=(1080\ \text{N})(2\ \text{m})(1)=2160\ \text{J}$$
$$W_w=mg\Delta y\,\text{συν}180°$$
$$=(100\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(2\ \text{m})(-1)=-1960\ \text{J}$$

γ) Η ενέργεια που κατανάλωσε ο γερανός είναι:

$$E=W_F=2160\ \text{J}$$

δ) Η ταχύτητα του δέματος τη χρονική στιγμή $2\ \text{s}$ είναι:

$$v=v_0+a\Delta t=(0\ \text{m/s})+(1\ \text{m/s}^2)(2\ \text{s})=2\ \text{m/s}$$

Επομένως, η κινητική ενέργεια είναι:

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(100\ \text{kg})(2\ \text{m/s})^2=200\ \text{J}$$

και η δυναμική ενέργεια είναι:

$$U=mg\Delta y=(100\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(2\ \text{m})=1960\ \text{J}$$

Παρατηρούμε πως μεταξύ των ποσών ενέργειας που υπολογίσαμε ισχύει η σχέση:

$$E=U+K$$

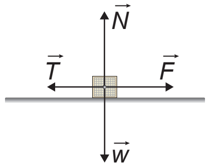
3. α) Μελετάμε την κίνηση του σώματος. Ισχύει:

$$\Delta x=\frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \ \text{ ή } \ a=\frac{2\Delta x}{(\Delta t)^2}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$a=\frac{2(3{,}2\ \text{m})}{(4\ \text{s})^2}=0{,}4\ \text{m/s}^2$$

β) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι η δύναμη $\vec{F}$ από το συρματόσχοινο, το βάρους $\vec{w}$ του μαρμάρου, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το δάπεδο και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$.



Λόγω ακινησίας στον y-άξονα, ισχύει $\vec{N}+\vec{w}=\vec{0}$, οπότε αλγεβρικά έχουμε:

$$N-w=0 \quad \text{ή} \quad N=mg$$

Το μέτρο της τριβής είναι:

$$T=\mu N=\mu mg=(0{,}2)(500\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)=1000\ \text{N}$$

Στον x-άξονα ισχύει:

$$\Sigma F=ma \quad \text{ή} \quad F-T=ma \quad \text{ή} \quad F=ma+T$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$F=(500\ \text{kg})(0{,}4\ \text{m/s}^2)+(1000\ \text{N})=1200\ \text{N}$$

γ) Έχουμε:

$$W_T=T\Delta x\text{συν}180^\circ$$
$$=(1000\ \text{N})(3{,}2\ \text{m})(-1)=-3200\ \text{J}$$

οπότε:

$$E_\theta=|W_T|=3200\ \text{J}$$
$$=(3200\ \text{J})(0{,}24\ \text{cal/J})=768\ \text{cal}$$

Εναλλακτικά, υπολογίζουμε το έργο της $\vec{F}$ και την κινητική ενέργεια που αποκτά το σώμα.

$$W_F=F\Delta x\text{συν}0^\circ=(1200\ \text{N})(3{,}2\ \text{m})(1)=3840\ \text{J}$$

Η ταχύτητα μετά από χρόνο $\Delta t=4\ \text{s}$ είναι:

$$v=a\Delta t=(0{,}4\ \text{m/s}^2)(4\ \text{s})=1{,}6\ \text{m/s}$$

οπότε το σώμα αποκτά κινητική ενέργεια:

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(500\ \text{kg})(1{,}6\ \text{m/s})^2=640\ \text{J}$$

Η ενέργεια που παρέχει το μοτέρ σε χρόνο $\Delta t=4\ \text{s}$ είναι $E_\mu=W_F$.

Από την ΑΔΕ μεταξύ της αρχικής θέσης και της θέσης του σώματος μετά από $\Delta t=4\ \text{s}$ έχουμε:

$$E_\theta=E_\mu-K=W_F-K$$
$$=(3840\ \text{J})-(640\ \text{J})=3200\ \text{J}$$

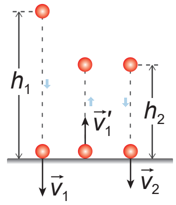
δ) Η μέση ισχύς είναι από το πηλίκο του έργου $\vec{F}$ σε χρονικό διάστημα Δt, προς το Δt:

$$P_\mu=\frac{W_F}{\Delta t}=\frac{3840\ \text{J}}{4\ \text{s}}=960\ \text{W}$$

ε) Ο ρυθμός προσφοράς ενέργειας τη χρονική στιγμή $4\ \text{s}$ είναι η στιγμιαία ισχύς:

$$P=Fv=(1200\ \text{N})(1{,}6\ \text{m/s})=1920\ \text{W}$$

4. α) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ της θέσης από την οποία αφήνεται η μπάλα και της θέσης ακριβώς πριν από την πρώτη πρόσκρουση στο έδαφος:



$$K_0+U_0=K_1+U_1$$

$$\text{ή} \quad mgh_1=\frac{1}{2}mv_1^2 \quad \text{ή} \quad gh_1=\frac{1}{2}v_1^2$$

Επομένως:

$$v_1=\sqrt{2gh_1}=\sqrt{2(10\ \text{m/s}^2)(1{,}25\ \text{m})}=5\ \text{m/s}$$

β) Μετά την 1η κρούση η μπάλα κινείται για 0,8 s. Λόγω συμμετρίας της κίνησης ανόδου-καθόδου, η μπάλα κινείται ανοδικά για $\Delta t_1=0{,}8\ \text{s}/2=0{,}4\ \text{s}$ μέχρι η ταχύτητά της να μηδενιστεί. Αν $\vec{v}_1'$ η ταχύτητα αμέσως μετά την 1η κρούση, ισχύει:

$$0=v_1'-g\Delta t_1 \quad \text{ή} \quad v_1'=g\Delta t_1$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$v_1'=(10\ \text{m/s}^2)(0{,}4\ \text{s})=4\ \text{m/s}$$

Επομένως:

$$h_2=v_1'\Delta t_1-\frac{1}{2}g(\Delta t_1)^2$$
$$=(4\ \text{m/s})(0{,}4\ \text{s})-\frac{1}{2}(10\ \text{m/s}^2)(0{,}4\ \text{s})^2=0{,}8\ \text{m}$$

Εναλλακτικά, μετά την 1η κρούση η μπάλα κινείται για $\Delta t=0{,}8\ \text{s}$ μέχρι να ξαναχτυπήσει στο έδαφος με ταχύτητα αντίθετη της ταχύτητας ανόδου, αφού δεν υπάρχουν ενεργειακές απώλειες λόγω αντίστασης του αέρα. Ισχύει:

$$v_2=v_1'-g\Delta t \quad \text{ή} \quad -v_1'=v_1'-g\Delta t \quad \text{ή} \quad v_1'=\frac{1}{2}g\Delta t$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$v_1'=\frac{1}{2}(10\ \text{m/s}^2)(0{,}8\ \text{s})=4\ \text{m/s}$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ της θέσης αμέσως μετά την πρώτη πρόσκρουση και της θέσης του μέγιστου ύψους:

$$K_1'+U_1'=K_2+U_2 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}mv_1'^2=mgh_2$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}v_1'^2=gh_2$$

Επομένως:

$$h_2 = \frac{v_1'^2}{2g} = \frac{(4\ \text{m/s})^2}{2(10\ \text{m/s}^2)} = 0{,}8\ \text{m}$$

γ) Για να υπολογίσουμε το % ποσοστό απώλειας της μηχανικής ενέργειας κατά την 1η κρούση της μπάλας με το δάπεδο, πρέπει να προσέξουμε ότι ως αρχική θεωρούμε την ταχύτητα ακριβώς πριν από την 1η κρούση και ως τελική την ταχύτητα αμέσως μετά την κρούση. Επομένως:

$$\frac{\Delta E_{\mu\eta\chi}}{E_{\mu\eta\chi,1}}100\% = \frac{\Delta K}{K_1}100\% = \frac{K_1' - K_1}{K_1}100\%$$

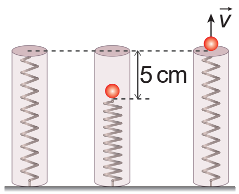
$$= \frac{\frac{1}{2}mv_1'^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{1}{2}mv_1^2}100\% = \frac{v_1'^2 - v_1^2}{v_1^2}100\%$$

$$= \frac{(4\ \text{m/s})^2 - (5\ \text{m/s})^2}{(5\ \text{m/s})^2}100\% = -36\%$$

Άρα, το ποσοστό απώλειας είναι 36%.

5. Είναι:

$m = 20\ \text{g} = 0{,}02\ \text{kg}$ και $\Delta L_{max} = 5\ \text{cm} = 0{,}05\ \text{m}$



α) Έχουμε:

$$U_{\varepsilon\lambda,\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}k(\Delta L_{max})^2$$

$$= \frac{1}{2}(208\ \text{N/m})(0{,}05\ \text{m})^2 = 0{,}26\ \text{J}$$

β) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ θεωρώντας ως αρχική τη θέση ακριβώς πριν πατηθεί η σκανδάλη και ως τελική τη θέση όπου η μπίλια εγκαταλείπει το ελατήριο. Πρέπει να προσέξουμε ότι έχουμε και βαρυτική δυναμική ενέργεια και ελαστική δυναμική ενέργεια.

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\beta,\alpha\rho\chi} + U_{\varepsilon\lambda,\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\beta,\tau\varepsilon\lambda} + U_{\varepsilon\lambda,\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\text{ή}\ \ 0 + 0 + U_{\varepsilon\lambda,\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}mv^2 + mg\Delta L_{max} + 0$$

$$\text{ή}\ \ v^2 = \frac{2(U_{\varepsilon\lambda,\alpha\rho\chi} - mg\Delta L_{max})}{m}$$

Επομένως:

$$v = \sqrt{\frac{2(U_{\varepsilon\lambda,\alpha\rho\chi} - mg\Delta L_{max})}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2[(0{,}26\ \text{J}) - (0{,}02\ \text{kg})(10\ \text{N/kg})(0{,}05\ \text{m})]}{0{,}02\ \text{kg}}}$$

$$= 5\ \text{m/s}$$

γ) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ θεωρώντας ως αρχική τη θέση όπου η μπίλια εγκαταλείπει το ελατήριο και ως τελική τη θέση μέγιστου ύψους της μπίλιας:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\beta,\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\beta,\tau\varepsilon\lambda}\ \ \text{ή}\ \ \frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgh$$

$$\text{ή}\ \ h = \frac{v^2}{2g}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$h = \frac{(5\ \text{m/s})^2}{2(10\ \text{m/s}^2)} = 1{,}25\ \text{m}$$

6. **α)** Υπολογίζουμε την επιτάχυνση του συστήματος Σ_1-Σ_2-νήμα εφαρμόζοντας τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα:

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

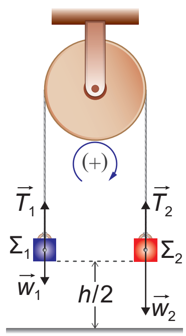
ή αλγεβρικά:

$$w_2 - w_1 = (m_1 + m_2)a\ \ \text{ή}\ \ a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$a = \frac{(3\ \text{kg}) - (1\ \text{kg})}{(3\ \text{kg}) + (1\ \text{kg})}(10\ \text{m/s}^2) = 5\ \text{m/s}^2$$

β) Όταν τα σώματα φτάσουν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, θα έχουν διανύσει διάστημα $h/2$.



Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο Νεύτωνα για το Σ_1:

$$\vec{w}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}$$

ή αλγεβρικά:

$$T_1 - w_1 = m_1 a$$

$$\text{ή}\ \ T_1 = m_1 g + m_1 a$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$T_1 = (1\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2) + (1\ \text{kg})(5\ \text{m/s}^2) = 15\ \text{N}$$

Επομένως:

$$W_{w_1} = w_1\frac{h}{2}\text{συν}180° = -\frac{1}{2}m_1 gh$$

$$= -\frac{1}{2}(1\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)(2\ \text{m}) = -10\ \text{J}$$

$$W_{T_1} = T_1 \frac{h}{2} \text{συν}0^\circ = \frac{1}{2} T_1 h = \frac{1}{2}(15\ \text{N})(2\ \text{m}) = 15\ \text{J}$$

Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο Νεύτωνα για το Σ_2:

$$\vec{w}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}$$

ή αλγεβρικά:

$$w_2 - T_2 = m_2 a \quad \text{ή} \quad T_2 = m_2 g - m_2 a$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$T_2 = (3\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2) - (3\ \text{kg})(5\ \text{m/s}^2) = 15\ \text{N}$$

Επομένως:

$$W_{w_2} = w_2 \frac{h}{2} \text{συν}0^\circ = \frac{1}{2} m_2 g h$$

$$= \frac{1}{2}(3\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)(2\ \text{m}) = 30\ \text{J}$$

$$W_{T_2} = T_2 \frac{h}{2} \text{συν}180^\circ = -\frac{1}{2} T_2 h$$

$$= -\frac{1}{2}(15\ \text{N})(2\ \text{m}) = -15\ \text{J}$$

γ) Τα δύο σώματα κινούνται το ίδιο χρονικό διάστημα και έχουν το ίδιο μέτρο ταχύτητας, επιτάχυνσης και μετατόπισης.

Ισχύει:

$$\Delta y = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \quad \text{ή} \quad \frac{h}{2} = 0 + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

$$\text{ή} \quad \Delta t = \sqrt{\frac{h}{a}}$$

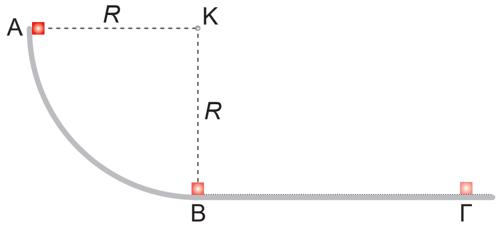
και βρίσκουμε $\Delta t = \sqrt{2/5}\ \text{s}$. Επομένως, η ταχύτητα κάθε σώματος είναι:

$$v = v_0 + a \Delta t$$

$$= (0\ \text{m/s}) + (5\ \text{m/s}^2)\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\ \text{s}\right) = \sqrt{10}\ \text{m/s}$$

δ) Η δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώνεται και γίνεται κινητική.

7. Είναι $m = 100\ \text{g} = 0{,}1\ \text{kg}$.



α) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ της αρχικής θέσης Α και της θέσης Β:

$$K_A + U_{\beta,A} = K_B + U_{\beta,B} \quad \text{ή} \quad 0 + mgR = K_B + 0$$

$$\text{ή} \quad R = \frac{K_B}{mg}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$R = \frac{0{,}2\ \text{J}}{(0{,}1\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)} = 0{,}2\ \text{m}$$

β) Εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ μεταξύ της αρχικής θέσης Α και της θέσης που απέχει κατακόρυφη απόσταση $R/2$ από το οριζόντιο επίπεδο, την οποία θεωρούμε ως τελική:

$$K_A + U_{\beta,A} = K_{\text{τελ}} + U_{\beta,\text{τελ}} \quad \text{ή} \quad 0 + mgR = K_{\text{τελ}} + mg\frac{R}{2}$$

Επομένως:

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} mgR = \frac{1}{2} K_B = \frac{1}{2}(0{,}2\ \text{J}) = 0{,}1\ \text{J}$$

γ) Από την ΑΔΕ προκύπτει ότι η θερμική ενέργεια κατά τη μετατόπιση του σώματος από το Β στο Γ ισούται με την αρχική δυναμική ενέργεια του σώματος:

$$E_\theta = U_{\beta,A} = mgR = 0{,}2\ \text{J}$$

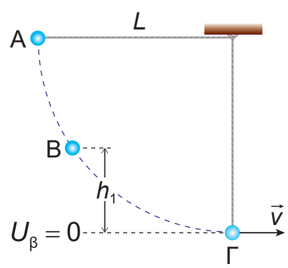
δ) Από το Α στο Β έχουμε μετατροπή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας σε κινητική. Από το Β στο Γ έχουμε μετατροπή της κινητικής ενέργειας σε θερμική.

8. Είναι $m = 100\ \text{g} = 0{,}1\ \text{kg}$.

α) **i)** Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ της αρχικής θέσης Α και της θέσης Γ:

$$K_A + U_{\beta,A} = K_\Gamma + U_{\beta,\Gamma}$$

$$\text{ή} \quad 0 + mgL = \frac{1}{2} m v^2 + 0 \quad \text{ή} \quad L = \frac{v^2}{2g}$$



(α)

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$L = \frac{(2\ \text{m/s})^2}{2(10\ \text{m/s}^2)} = 0{,}2\ \text{m}$$

ii) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ της αρχικής θέσης Α και της θέσης Β σε ύψος h_1 όπου θεωρούμε ότι η κινητική ενέργεια είναι ίση με τη βαρυτική δυναμική ενέργεια:

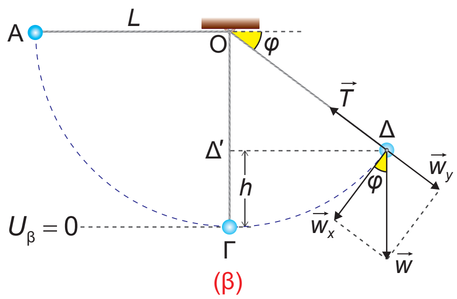
$$K_A + U_{\beta,A} = K_B + U_{\beta,B}$$

$$\text{ή } \ 0 + U_{\beta,A} = U_{\beta,B} + U_{\beta,B}$$

$$\text{ή } \ mgL = 2mgh_1 \ \text{ ή } \ h_1 = \frac{L}{2}$$

οπότε βρίσκουμε $h_1 = 0{,}1\,\text{m}$.

β) i) Έστω Ο το σημείο από όπου είναι αναρτημένο το νήμα και Δ′ η προβολή του Δ στην κατακόρυφο ΟΓ.



(β)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔΔ′ με $\hat{\Delta} = \varphi$ έχουμε:

$$\eta\mu\varphi = \frac{(\text{ΟΔ}')}{L} \ \text{ ή } \ (\text{ΟΔ}') = L\eta\mu\varphi$$

οπότε:

$$h = (\text{ΟΓ}) - (\text{ΟΔ}') = L - L\eta\mu\varphi = L(1-\eta\mu\varphi)$$

$$= (0{,}2\,\text{m})(1-0{,}6) = 0{,}08\,\text{m}$$

Επομένως:

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = mgh - mgL = mg(h-L)$$

$$= (0{,}1\,\text{kg})(10\,\text{m/s}^2)(0{,}08\,\text{m} - 0{,}2\,\text{m})$$

$$= -0{,}12\,\text{J}$$

ii) Για να υπολογίσουμε την τάση του νήματος στη θέση Δ, αναλύουμε το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες, μια συνιστώσα $\vec{w}_y$ κατά τη διεύθυνση του νήματος και μια συνιστώσα $\vec{w}_x$ κάθετη στο νήμα. Ισχύουν:

$$w_x = w\sigma\upsilon\nu\varphi \ \text{ και } \ w_y = w\eta\mu\varphi$$

Επειδή το σώμα δεν κινείται κατά τη διεύθυνση του νήματος, ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \ \text{ ή } \ T - w_y = 0 \ \text{ ή } \ T = mg\eta\mu\varphi$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$T = (0{,}1\,\text{kg})(10\,\text{m/s}^2)(0{,}6) = 0{,}6\,\text{N}$$

9. Η ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι:

$$v = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \cdot \frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 20\,\text{m/s}$$

α) Θα υπολογίσουμε πρώτα την επιτάχυνση του αυτοκινήτου. Ισχύει:

$$v = v_0 + a\Delta t \ \text{ ή } \ a = \frac{v - v_0}{\Delta t}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$a = \frac{(20\,\text{m/s}) - (0\,\text{m/s})}{10\,\text{s}} = 2\,\text{m/s}^2$$

Το διάστημα που διάνυσε το αυτοκίνητο είναι ίσο με τη μετατόπιση:

$$\Delta x = v_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$

$$= (0\,\text{m}) + \frac{1}{2}(2\,\text{m/s}^2)(10\,\text{s})^2 = 100\,\text{m}$$

β) Η μέση δύναμη αντίστασης έχει μέτρο $F_\alpha = 400\,\text{N}$. Το έργο αυτής της δύναμης για την παραπάνω μετατόπιση είναι:

$$W_{F_\alpha} = F_\alpha \Delta x \sigma\upsilon\nu 180^\circ$$

$$= (400\,\text{N})(100\,\text{m})(-1) = -40.000\,\text{J}$$

γ) Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

ή αλγεβρικά:

$$F - F_\alpha = ma \ \text{ ή } \ F = ma + F_\alpha$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$F = (1200\,\text{kg})(2\,\text{m/s}^2) + (400\,\text{N}) = 2800\,\text{N}$$

Το έργο αυτής της δύναμης είναι:

$$W_F = F\Delta x \sigma\upsilon\nu 0^\circ$$

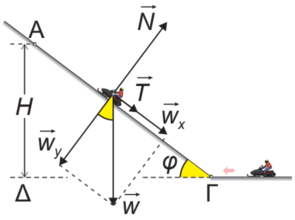
$$= (2800\,\text{N})(100\,\text{m})(1) = 280.000\,\text{J}$$

Επομένως, η χημική ενέργεια των καυσίμων είναι:

$$E_{\chi\eta\mu} = W_F = 280.000\,\text{J}$$

δ) Η μέση ισχύς της μηχανής είναι:

$$P_\mu = \frac{W_F}{\Delta t} = \frac{280.000\,\text{J}}{10\,\text{s}} = 28.000\,\text{W} = 28\,\text{kW}$$

10. 

α) Ισχύει:

$$\Delta U = mgH \;\; \text{ή} \;\; H = \frac{\Delta U}{mg}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$H = \frac{1920\ \text{J}}{(80\ \text{kg})(10\ \text{m/s}^2)} = 2{,}4\ \text{m}$$

β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ υπολογίζουμε τη μετατόπιση του οχήματος στο κεκλιμένο επίπεδο:

$$\Delta x = \frac{H}{\eta\mu\varphi} = \frac{2{,}4\ \text{m}}{0{,}6} = 4\ \text{m}$$

Αναλύουμε το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες, μια συνιστώσα $\vec{w}_x$ παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και μια συνιστώσα $\vec{w}_y$ κάθετη σε αυτό. Ισχύουν:

$$w_x = w\eta\mu\varphi \;\; \text{και} \;\; w_y = w\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Στον y-άξονα ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \;\; \text{ή} \;\; N - w_y = 0 \;\; \text{ή} \;\; N = w\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Από τον Νόμο της τριβής έχουμε:

$$T = \mu N = \mu w\sigma\upsilon\nu\varphi = \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$= (0{,}5)(80\ \text{kg})(10)(0{,}8) = 320\ \text{N}$$

Επομένως, το έργο της τριβής είναι:

$$W_T = T\,\Delta x\sigma\upsilon\nu 180^\circ = (320\ \text{N})(4\ \text{m})(-1) = -1280\ \text{J}$$

γ) Ισχύει:

$$E_\theta = |W_T| = 1280\ \text{J}$$

Από την ΑΔΕ προκύπτει ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος στο Γ γίνεται βαρυτική δυναμική στο Α (που είναι ίση με τη ΔU) και θερμική ενέργεια:

$$K_\Gamma = U_\text{A} + E_\theta = (1920\ \text{J}) + (1280\ \text{J}) = 3200\ \text{J}$$

δ) Η απώλεια μηχανικής ενέργειας είναι ίση με τη θερμική ενέργεια. Το % ποσοστό απώλειας είναι:

$$\frac{|\Delta E_{\mu\eta\chi}|}{E_{\mu\eta\chi,\Gamma}} 100\% = \frac{E_\theta}{K_\Gamma} 100\% = \frac{1280\ \text{J}}{3200\ \text{J}} 100\% = 40\%$$

ε) Για να διερευνήσουμε αν στο σημείο ακινητοποίησης Α ο οδηγός πρέπει να κάνει χρήση χειρόφρενου, πρέπει να συγκρίνουμε την τριβή με τη συνιστώσα $\vec{w}_x$ του βάρους. (Στο Α, καθώς το σώμα τείνει να κατέβει, η τριβή αλλάζει φορά.)

Βρήκαμε ότι $T = 320\ \text{N}$. Για το μέτρο της $\vec{w}_x$ έχουμε:

$$w_x = w\eta\mu\varphi = mg\eta\mu\varphi = (80\ \text{kg})(10)(0{,}6) = 480\ \text{N}$$

Επειδή $w_x > T$, χρειάζεται χειρόφρενο για να αποφευχθεί η οπισθοδρόμηση.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 4: Ήχος

4.1 Μηχανικά - Ηχητικά κύματα (χαρακτηριστικά και εφαρμογές)

Ερωτήσεις

1. Β, Γ

Κατά τη διάδοση ενός ηχητικού κύματος από ένα μέσο (π.χ. αέρας) σε ένα άλλο (π.χ. τοίχος), η συχνότητα του κύματος παραμένει σταθερή. Αυτό συμβαίνει διότι η συχνότητα καθορίζεται από την πηγή του ήχου (το διαπασών στην προκειμένη περίπτωση) και δεν αλλάζει όταν το κύμα περνά από το ένα μέσο στο άλλο.
Αντιθέτως, η ταχύτητα διάδοσης μεταβάλλεται, καθώς εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου, όπως η πυκνότητα και η ελαστικότητα. Ο ήχος διαδίδεται γενικά γρηγορότερα σε στερεά (όπως ο τοίχος) απ' ό,τι στον αέρα.
Αφού η συχνότητα παραμένει σταθερή και η ταχύτητα αλλάζει, έπεται ότι μεταβάλλεται και το μήκος κύματος.

2. $\lambda = 2\ \text{m},\ f = 5\ \text{Hz},\ v = 10\ \text{m/s}$

3. Από τη σχέση $v = \lambda f$ έχουμε:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340\ \text{m/s}}{3{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}} = 10^5\ \text{Hz}$$

Επειδή $f > 20.000\ \text{Hz}$, η συχνότητα αυτού του ήχου είναι έξω από το φάσμα των ακουστών συχνοτήτων.

4. Οι ωτασπίδες μειώνουν την ένταση του ήχου 1000 φορές.

5. **α)** Πιο πυκνά. **β)** Πιο αραιά.

6. Το ηχητικό κύμα από μια καμπάνα απλώνεται σε όλο και μεγαλύτερο χώρο. Συνεπώς, η ίδια ενέργεια (ισχύς) κατανέμεται σε όλο και μεγαλύτερο εμβαδόν, οπότε μέσω της $I = \dfrac{P}{A}$ η ένταση μειώνεται.

7. **α)** $\lambda_\Gamma < \lambda_A < \lambda_B$ **β)** $I_B < I_\Gamma < I_A$
γ) $f_B < f_A < f_\Gamma$ **δ)** $T_\Gamma < T_A < T_B$

8. **α)** Με απευθείας αντικατάσταση βρίσκουμε $331\ \text{m/s}$ και $346\ \text{m/s}$.

β) Σε χαμηλότερη θερμοκρασία (ψυχρός αέρας) τα μόρια του αέρα κινούνται κατά μέσο όρο πιο αργά, με αποτέλεσμα να χρειάζονται περισσότερο χρόνο για να κινηθούν από και προς την αρχική τους θέση.

9. Οι γάτες ακούνε ήχους με μεγαλύτερο μήκος κύματος σε σχέση με τις νυχτερίδες.
Το ανθρώπινο αυτί δεν μπορεί να ακούσει σε αυτές τις περιοχές (είναι έξω από το φάσμα των ακουστών συχνοτήτων).

Ασκήσεις

1. Για την ένταση του ήχου ισχύει:

$$I = \frac{P}{A}$$

Υποθέτουμε πως το ηχητικό κύμα από το καναρίνι διαδίδεται στον χώρο. Τα κύματα είναι σφαιρικά και ισχύει $A = 4\pi R^2$, οπότε:

$$I = \frac{P}{4\pi R^2}$$

Επομένως, η ένταση του ήχου είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης από την πηγή.
Θεωρούμε ότι η ίδια ενέργεια ανά δευτερόλεπτο (ισχύς P) μεταφέρεται διαμέσου δύο σφαιρικών επιφανειών με ακτίνες R_1 και R_2. Ο λόγος των εντάσεων του ήχου στις δύο επιφάνειες είναι:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\dfrac{P}{4\pi R_1^2}}{\dfrac{P}{4\pi R_2^2}} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

Παρατηρούμε και πάλι πως η ένταση του ήχου είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης από την πηγή.

2. Για τα διαμήκη κύματα ισχύει:

$$x = v_1 t_1 \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{x}{v_1}$$

Για τα εγκάρσια κύματα ισχύει:

$$x = v_2 t_2 \quad \text{ή} \quad t_2 = \frac{x}{v_2}$$

όπου $v_2 < v_1$.

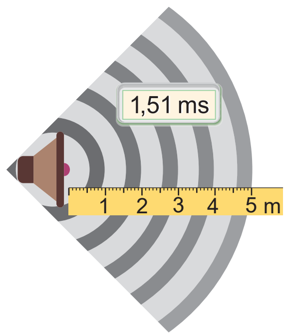
Για τη διαφορά χρόνου άφιξης στον τόπο Α έχουμε:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{x}{v_2} - \frac{x}{v_1} = \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right)x = \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2}x$$

Επομένως, η απόσταση x του επικέντρου από τον τόπο Α είναι:

$$x = \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2}\Delta t$$

3.



Παρατηρούμε πως η ένδειξη $5{,}0\ \text{m}$ του χάρακα αντιστοιχεί σε 5 μήκη κύματος. Άρα:

$$\lambda = \frac{5{,}0\ \text{m}}{5} = 1{,}0\ \text{m}$$

Το κύμα χρειάζεται $1{,}51\,\text{ms}$ για να διανύσει τα $5{,}0\ \text{m}$, οπότε η ταχύτητα του ηχητικού κύματος είναι:

$$v = \frac{5{,}0\ \text{m}}{1{,}51 \cdot 10^{-3}\ \text{s}} = 330\ \text{m/s}$$

Επομένως, η συχνότητα του ηχητικού κύματος είναι:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{330\ \text{m/s}}{1{,}0\ \text{m}} = 330\ \text{Hz}$$

4. Η απόσταση δύο διαδοχικών ορέων είναι το μήκος κύματος, δηλαδή $\lambda = 1{,}4\ \text{m}$.

Το κύμα διαδίδεται σε μήκος $4{,}2\ \text{m}$ μέσα σε $2\ \text{s}$, οπότε η ταχύτητα του κύματος είναι:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4{,}2\ \text{m}}{2\ \text{s}} = 2{,}1\,\text{m/s}$$

Επομένως συχνότητα του κύματος είναι:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2{,}1\,\text{m/s}}{1{,}4\ \text{m}} = 1{,}5\ \text{Hz}$$

5. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ισχύος:

$$P = \frac{E}{\Delta t}$$

η ένταση του ήχου γράφεται:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{E}{A\Delta t}$$

Επομένως, η ζητούμενη ενέργεια είναι:

$$E = IA\Delta t = \left(10^{-2}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)\left(0{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2\right)\left(6 \cdot 3600\ \text{s}\right)$$

$$= 4{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

6. Για την ένταση του ήχου ισχύει:

$$I = \frac{P}{A} \quad \text{ή} \quad A = \frac{P}{I}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$A = \frac{750\ \text{W}}{0{,}50\ \dfrac{\text{W}}{\text{m}^2}} = 1500\ \text{m}^2$$

7. **α)** Χρησιμοποιούμε τον τύπο που αποδείξαμε στην άσκηση 1:

$$I = \frac{P}{4\pi R^2}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$I = \frac{100\ \text{W}}{4\pi(5\ \text{m})^2} = 0{,}32\ \text{W/m}^2$$

β) Με βάση τη μεθοδολογία της άσκησης 1 βρίσκουμε:

$$\frac{I}{I'} = \left(\frac{R'}{R}\right)^2$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

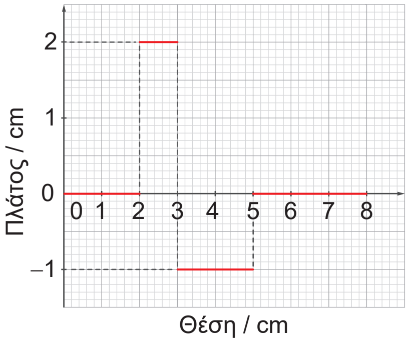
$$\frac{I}{I'} = \left(\frac{25\ \text{m}}{5\ \text{m}}\right)^2 = 5^2 = 25$$

4.2 Αρχή της υπέρθεσης – Στάσιμο ηχητικό κύμα (χορδές – ηχητικοί σωλήνες)

Ερωτήσεις

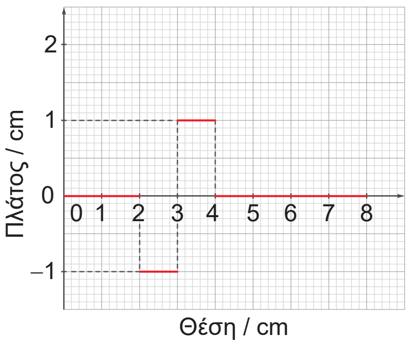
1. • Για $t = 0{,}1\text{ s}$ το πλάτος είναι:

- 2,0 cm μεταξύ των θέσεων 2 cm και 3 cm
- –1,0 cm μεταξύ των θέσεων 3 cm και 5 cm
- μηδέν σε όλες τις άλλες θέσεις.



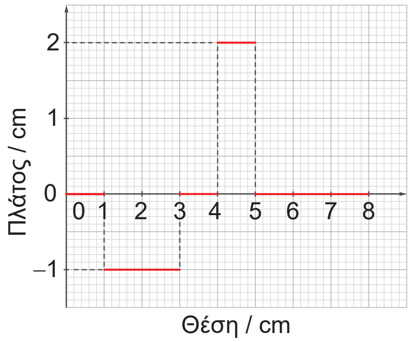
• Για $t = 0{,}2\text{ s}$ το πλάτος είναι:

- –1,0 cm μεταξύ των θέσεων 2 cm και 3 cm
- 1 cm μεταξύ των θέσεων 3 cm και 4 cm
- μηδέν σε όλες τις άλλες θέσεις.



• Για $t = 0{,}3\text{ s}$ το πλάτος είναι:

- –1,0 cm μεταξύ των θέσεων 1 cm και 3 cm
- 2,0 cm μεταξύ των θέσεων 4 cm και 5 cm
- μηδέν σε όλες τις άλλες θέσεις.



2. Στην πρώτη περίπτωση παράγεται η πρώτη αρμονική $f_1 = 2f_0$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση παράγεται η τρίτη αρμονική $f_2 = 4f_0$. Επομένως:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{4f_0}{2f_0} = 2$$

3. Ισχύει:

$$f_0 = \frac{v}{2L} \quad \text{ή} \quad L = \frac{v}{2f_0}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$L = \frac{343\text{ m/s}}{2(110\text{ Hz})} = 1{,}56\text{ m}$$

4. Σε ανοικτό-ανοικτό σωλήνα ισχύει:

$$f_0 = \frac{v}{2L}$$

Σε ανοικτό-κλειστό σωλήνα ισχύει:

$$f_0' = \frac{v}{4L}$$

Είναι $f_0 > f_0'$, δηλαδή η θεμελιώδης σε έναν ανοικτό-ανοικτό σωλήνα είναι μεγαλύτερη από τη θεμελιώδη σε έναν ανοικτό-κλειστό σωλήνα.

5. Επειδή η χορδή έχει ακλόνητα άκρα και δημιουργούνται 2 κοιλίες, η f_1 θα είναι η πρώτη αρμονική, οπότε:

$$f_1 = \frac{v}{L}$$

Η f_2 θα είναι η πρώτη αρμονική της χορδής, οπότε:

$$f_2 = \frac{v}{\frac{L}{2}} = 2\frac{v}{L}$$

Επομένως:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{2\frac{v}{L}}{\frac{v}{L}} = 2$$

6. Επειδή η χορδή έχει ακλόνητα άκρα και δημιουργούνται 4 κοιλίες, η f θα είναι η τρίτη αρμονική, οπότε:

$$f = 4f_0 = 4\frac{v}{2L} = \frac{2v}{L}$$

Η συχνότητα των κυμάτων στη χορδή είναι ίση με τη συχνότητα των ηχητικών κυμάτων που παράγει η χορδή. Επομένως:

$$f = f_{ήχου} \text{ ή } \frac{2v}{L} = \frac{v_{ήχου}}{\lambda_{ήχου}} \text{ ή } \frac{2v}{L} = \frac{2v}{\lambda_{ήχου}} \text{ ή } \lambda_{ήχου} = L$$

7.
- Τη χρονική στιγμή $t_1 + \frac{T}{4}$ όλα τα σημεία της χορδής θα έχουν απομάκρυνση μηδέν.
- Τη χρονική στιγμή $t_1 + \frac{T}{2}$ όλα τα σημεία της χορδής θα έχουν απομάκρυνση αντίθετη από αυτήν που έχουν τη χρονική στιγμή t_1.

8. Είναι:

$$f_0 = 160 \text{ Hz}$$
$$f_1 = 320 \text{ Hz} = 2f_0$$
$$f_2 = 480 \text{ Hz} = 3f_0$$

Παρατηρούμε ότι οι διαδοχικές παραγόμενες συχνότητες είναι:

$$f_0,\ 2f_0,\ 3f_0$$

Άρα, ο σωλήνας είναι ανοικτός στα δύο άκρα.

Ασκήσεις

1. Ισχύει:

$$\Delta L = \frac{\lambda}{2} \text{ ή } \lambda = 2\Delta L$$

Επομένως, η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι:

$$v = \lambda f = 2f\Delta L$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$v = 2(850 \text{ Hz})(20\cdot 10^{-2} \text{ m}) = 340 \text{ m/s}$$

2. **α)** $\frac{f_0}{f_1} = \frac{f_0}{2f_0} = \frac{1}{2}$ **β)** $\frac{f_0}{f_1} = \frac{f_0}{3f_0} = \frac{1}{3}$

3. **α)** Το πλάτος ταλάντωσης των σημείων στις θέσεις των κοιλιών είναι:

$$A' = 2A = 2(5 \text{ cm}) = 10 \text{ cm}$$

β) Το μήκος κύματος του στάσιμου είναι:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{50 \text{ m/s}}{25 \text{ Hz}} = 2 \text{ m}$$

Επομένως, η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{2 \text{ m}}{2} = 1 \text{ m}$$

4. **α)** Τα οδεύοντα κύματα έχουν πλάτος:

$$A = \frac{A'}{2} = \frac{5 \text{ cm}}{2} = 2{,}5 \text{ cm}$$

και μήκος κύματος $\lambda = 20$ cm.

β) Η συχνότητα ταλάντωσης των υλικών σημείων της χορδής είναι:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{10 \text{ m/s}}{20\cdot 10^{-2} \text{ m}} = 50 \text{ Hz}$$

5. **α)** Αν L το μήκος της χορδής, το μήκος κύματος του στάσιμου είναι:

$$\lambda = \frac{L}{2} = \frac{0{,}8 \text{ m}}{2} = 0{,}4 \text{ m}$$

και η συχνότητα ταλάντωσης των υλικών σημείων της χορδής είναι:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{170 \text{ m/s}}{0{,}4 \text{ m}} = 425 \text{ Hz}$$

β) Τα παραγόμενα ηχητικά κύματα έχουν συχνότητα ίση με αυτήν των κυμάτων στη χορδή, δηλαδή $f_{ήχου} = 425$ Hz. Επομένως, το μήκος κύματος του παραγόμενου ήχου είναι:

$$\lambda_{ήχου} = \frac{v_{ήχου}}{f_{ήχου}} = \frac{340 \text{ m/s}}{425 \text{ Hz}} = 0{,}8 \text{ m}$$

6. Για τη θεμελιώδη συχνότητα ισχύει:

$$f_0 = \frac{v}{2L}$$

Επομένως, η απόσταση L μεταξύ των ακλόνητων σημείων είναι:

$$L = \frac{v}{2f_0} = \frac{523 \text{ m/s}}{2(330 \text{ Hz})} = 0{,}792 \text{ m} = 79{,}2 \text{ cm}$$

7. **α)** Με μεθοδολογία παρόμοια με αυτήν της ερώτησης 8 προκύπτει ότι ο σωλήνας είναι ανοικτός στο ένα άκρο και κλειστός στο άλλο.

β) Ισχύει:

$$f_0 = \frac{480\ \text{Hz}}{3} = 160\ \text{Hz}$$

γ) Από τον τύπο της 1ης αρμονικής $\left(f_1 = \frac{3v}{4L}\right)$ θα υπολογίσουμε το μήκος L του σωλήνα:

$$L = \frac{3v}{4f_1} = \frac{3(342\ \text{m/s})}{4(480\ \text{Hz})} = 0{,}534\ \text{m}$$

8. **α)** Για την 1η αρμονική ισχύει:

$$f_1 = \frac{3v}{4L}$$

Επομένως, το μήκος L της χορδής είναι:

$$L = \frac{3v}{4f_1} = \frac{3(300\ \text{m/s})}{4(270\ \text{Hz})} = 0{,}833\ \text{m}$$

β) Η θεμελιώδης συχνότητα είναι:

$$f_0 = \frac{f_1}{3} = \frac{270\ \text{Hz}}{3} = 90\ \text{Hz}$$

Η συχνότητα του ηχητικού κύματος είναι ίση με τη θεμελιώδη συχνότητα του στάσιμου κύματος στη χορδή, δηλαδή $f_{ήχου} = 90\ \text{Hz}$.
Επομένως, το μήκος κύματος του παραγόμενου ήχου είναι:

$$\lambda_{ήχου} = \frac{v_{ήχου}}{f_{ήχου}} = \frac{340\ \text{m/s}}{90\ \text{Hz}} = 3{,}8\ \text{m}$$

4.3 Συντονισμός – Διακροτήματα

Ερωτήσεις

1. Χρησιμοποιώντας βαρύτερο κύλινδρο αυξάνεται η τάση στη χορδή, οπότε αυξάνεται η ταχύτητα των κυμάτων στη χορδή (όπως στο παράδειγμα 1). Από τη σχέση $f = v/\lambda$ προκύπτει ότι η αύξηση της ταχύτητας προκαλεί αύξηση της συχνότητας. Άρα, η συχνότητα του ήχου θα είναι μεγαλύτερη από την αρχική.

2. Σωστή απάντηση είναι η Β. Ισχύει:

$$f_0 = \frac{v}{2L}$$

δηλαδή η θεμελιώδης συχνότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη με το μήκος.
Άρα, ο σωλήνας με το μεγαλύτερο μήκος θα παράγει ήχο μικρότερης θεμελιώδους συχνότητας.

3. Η απόσταση Δx ανάμεσα σε δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις είναι ίση με μισό μήκος κύματος. Άρα:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} \text{ ή } \lambda = 2\Delta x$$

Για $\Delta x = 20\ \text{cm}$ βρίσκουμε $\lambda = 40\ \text{cm}$.

4. Κατά το κούρδισμα της χορδής όσο αυξάνεται η τάση (η χορδή συσφίγγεται περισσότερο), τόσο αυξάνεται η ταχύτητα v των κυμάτων στη χορδή.
Αφού το μήκος L της χορδής είναι σταθερό, η θεμελιώδης συχνότητα $f_0 = \frac{v}{2L}$ αυξάνεται.
Η συχνότητα των ηχητικών κυμάτων αυξάνεται, διότι είναι ίση με τη συχνότητα των κυμάτων στη χορδή.
Για να επιτύχουμε τη σωστή νότα, θα πρέπει να συσφίξουμε ή να χαλαρώσουμε τη χορδή, ανάλογα με το αν η συχνότητα της νότας που παράγει η χορδή είναι αντίστοιχα μικρότερη ή μεγαλύτερη από τη σωστή.

5. Όσο αυξάνεται η μάζα τόσο μειώνεται η ιδιοσυχνότητα του παιχνιδιού. Για να πετύχει ο φίλος μας συντονισμό και να ευχαριστηθεί το παιχνίδι, θα πρέπει να προσπαθήσει να κινηθεί πάνω-κάτω με πιο γρήγορο ρυθμό, δηλαδή να ταλαντωθεί με συχνότητα μεγαλύτερη από την f_1.

6. Στα παραδείγματα αυτά υπάρχει περίπτωση συντονισμού ανάμεσα:

- στον βηματισμό των στρατιωτών και τις ταλαντώσεις της γέφυρας,
- στον ρυθμό του χορού (χτύπημα των ποδιών στο πάτωμα) και στις ταλαντώσεις της πίστας χορού,
- στο ρυθμικό χτύπημα των ποδιών στις κερκίδες και στις ταλαντώσεις των κερκίδων.

Οι μηχανικοί επιδιώκουν οι κατασκευές τους (γέφυρες, δάπεδα που θα χρησιμοποιούνται για χορό, κερκίδες σε γήπεδα):

1. να έχουν ιδιοσυχνότητες πολύ διαφορετικές από τις συχνότητες διέγερσης ανάλογα με τη χρήση (στρατιωτικό βάδισμα, ρυθμός χορού, ρυθμός χτυπήματος ποδιών θεατών),
2. να έχουν ελαστικότητα η οποία να τους επιτρέπει να ταλαντωθούν, χωρίς να καταστραφούν σε περίπτωση συντονι σμού.

Ασκήσεις

1. Για τη θεμελιώδη συχνότητα ισχύει:

$$f_0 = \frac{v}{2L}$$

Επομένως, η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος στη χορδή είναι:

$$v = 2f_0L = 2(680\text{ Hz})(1\text{ m}) = 1360\text{ m/s}$$

Το μήκος κύματος του ήχου στον αέρα είναι:

$$\lambda_{\text{ήχου}} = \frac{v_{\text{ήχου}}}{f_{\text{ήχου}}} = \frac{v_{\text{ήχου}}}{f_0} = \frac{340\text{ m/s}}{680\text{ Hz}} = 0{,}5\text{ m}$$

2. Ισχύει:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\text{ m/s}}{850\text{ Hz}} = 0{,}4\text{ m}$$

Το ελάχιστο μήκος θα είναι εκείνο που αντιστοιχεί στη θεμελιώδη συχνότητα. Άρα:

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{0{,}4\text{ m}}{4} = 0{,}1\text{ m}$$

3. Η θεμελιώδης συχνότητα θα αυξηθεί κατά 20%, δηλαδή θα γίνει:

$$f_0' = f_0 + \frac{20}{100}f_0 = 1{,}2f_0$$

Επειδή η ταχύτητα είναι ανάλογη της συχνότητας, η ταχύτητα διάδοσης θα είναι:

$$v' = 1{,}2v$$

οπότε το τετράγωνο της ταχύτητας θα είναι:

$$v'^2 = (1{,}2v)^2 = 1{,}44v^2$$

Επειδή η δύναμη είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας διάδοσης, η δύναμη θα είναι:

$$F' = 1{,}44F$$

Άρα, η δύναμη θα αυξηθεί κατά:

$$F' - F = 1{,}44F - F = 0{,}44F = \frac{44}{100}F$$

δηλαδή κατά 44%.

4. α) Ισχύει:

$$L = \frac{\lambda}{2} \text{ ή } \lambda = 2L$$

Για $L = 0{,}530\text{ m}$ βρίσκουμε $\lambda = 1{,}06\text{ m}$.

β) Έχουμε:

$$f_0 = \frac{v}{2L} = \frac{524\text{ m/s}}{2(0{,}530\text{ m})} = 494\text{ Hz}$$

5. Έχουμε:

$$f_0 = \frac{v}{4L} = \frac{340\text{ m/s}}{4(2{,}5\cdot 10^{-2}\text{ m})} = 3400\text{ Hz}$$

6. α) Έχουμε:

$$f_0 = \frac{v}{2L} = \frac{340\text{ m/s}}{2(66\cdot 10^{-2}\text{ m})} = 258\text{ Hz}$$

β) Ισχύει:

$$L = \frac{\lambda}{2}$$

Επειδή το μήκος κύματος μειώνεται στο μισό, το νέο μήκος θα είναι $L' = L/2$. Η νέα συχνότητα θα είναι:

$$f_0' = \frac{v}{2L'} = \frac{v}{2\frac{L}{2}} = 2\frac{v}{2L} = 2f_0$$

Άρα, η μεταβολή της συχνότητας θα είναι:

$$\Delta f = f_0' - f_0 = 2f_0 - f_0 = f_0 = 258\text{ Hz}$$

Προβλήματα

1. α) Από τον τύπο της έντασης του ήχου έχουμε:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi R^2} \text{ ή } P = 4\pi R^2 I$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$P = 4\pi(4\text{ m})^2(1\text{ W/m}^2) = 201\text{ W}$$

β) Για κάθε 10 dB μείωση, η ένταση μειώνεται 10 φορές. Για μείωση κατά:

$$120\text{ dB} - 100\text{ dB} = 20\text{ dB}$$

η ένταση θα μειωθεί:

$$10^2 = 100 \text{ φορές}$$

Επομένως, το τετράγωνο της απόστασης πρέπει να αυξηθεί 100 φορές, οπότε η απόσταση θα αυξηθεί 10 φορές. Άρα, η απόσταση θα γίνει:

$$10\cdot(4\text{ m}) = 40\text{ m}$$

2. α) Για την 1η αρμονική ισχύει $L = \lambda$, οπότε $\lambda = 0{,}60\text{ m}$ και έχουμε:

$$v = \lambda f = (0{,}60\ \text{m})(220\ \text{Hz}) = 132\ \text{m/s}$$

β) Στον αέρα ισχύει:

$$\lambda_{\text{ήχου}} = \frac{v_{\text{ήχου}}}{f_{\text{ήχου}}} = \frac{v_{\text{ήχου}}}{f} = \frac{340\ \text{m/s}}{220\ \text{Hz}} = 1{,}55\ \text{m}$$

γ) Η συχνότητα θα είναι η ίδια τόσο στον αέρα όσο και στο νερό. Στο νερό ισχύει:

$$\lambda'_{\text{ήχου}} = \frac{v'_{\text{ήχου}}}{f_{\text{ήχου}}} = \frac{v'_{\text{ήχου}}}{f} = \frac{1540\ \text{m/s}}{220\ \text{Hz}} = 6{,}82\ \text{m}$$

3. α) Στο πάνω τμήμα του σωλήνα που περιέχει αέρα θα υπάρχει στάσιμο κύμα που αντιστοιχεί στη θεμελιώδη συχνότητα. Άρα:

$$\frac{\lambda}{4} = H - h \ \text{ ή } \ \lambda = 4(H-h)$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$\lambda = 4(110\ \text{cm} - 90\ \text{cm}) = 4(20 \cdot 10^{-2}\ \text{m}) = 0{,}80\ \text{m}$$

β) Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι:

$$v = \lambda f = (0{,}80\ \text{m})(425\ \text{Hz}) = 340\ \text{m/s}$$

γ) Σύμφωνα με το παράδειγμα 4 της υποενότητας 4.3 επιτυγχάνεται νέα μεγιστοποίηση της έντασης κάθε φορά που το ύψος της στήλης του αέρα πάνω από το νερό αυξάνεται κατά:

$$\lambda/2 = 0{,}40\ \text{m}$$

Αφού στην 1η μεγιστοποίηση η στήλη του νερού έχει ύψος $0{,}90\ \text{m}$, μεγιστοποίηση της έντασης θα συμβεί δύο επιπλέον φορές, όταν το ύψος της στήλης είναι:

- $0{,}90\ \text{m} - 0{,}40\ \text{m} = 0{,}50\ \text{m}$ και
- $0{,}50\ \text{m} - 0{,}40\ \text{m} = 0{,}10\ \text{m}$.

4. α) Για σωλήνα ανοικτό-κλειστό έχουμε:

$$f_0 = \frac{v}{4L} = \frac{342\ \text{m/s}}{4(1{,}2\ \text{m})} = 71\ \text{Hz}$$

$$f_1 = 3f_0 = 3(71\ \text{Hz}) = 213\ \text{Hz}$$

$$f_2 = 5f_0 = 5(71\ \text{Hz}) = 355\ \text{Hz}$$

β) Για το πλήθος των αρμονικών ισχύει:

$$20\ \text{Hz} \le (2\text{k}+1)f_0 \le 20.000\ \text{Hz}$$

$$\frac{20}{71{,}3} \le 2\text{k}+1 \le \frac{20.000}{71{,}3}$$

$$-0{,}36 \le \text{k} \le 139{,}8$$

οπότε $\text{k} = 0, 1, ..., 139$.

Άρα, υπάρχουν 140 αρμονικές.

γ) Για σωλήνα ανοικτό-ανοικτό έχουμε:

$$f_0 = \frac{v}{2L} = \frac{342\ \text{m/s}}{2(1{,}2\ \text{m})} = 142{,}5\ \text{Hz}$$

$$f_1 = 2f_0 = 2(142{,}5\ \text{Hz}) = 285\ \text{Hz}$$

$$f_2 = 3f_0 = 3(142{,}5\ \text{Hz}) = 427{,}5\ \text{Hz}$$

Για το πλήθος των αρμονικών ισχύει:

$$20\ \text{Hz} \le \text{k}f_0 \le 20.000\ \text{Hz}$$

$$\frac{20}{142{,}5} \le \text{k} \le \frac{20.000}{142{,}5}$$

$$0{,}14 \le \text{k} \le 140{,}4$$

οπότε $\text{k} = 1, 2, ..., 140$.

Άρα, υπάρχουν 140 αρμονικές.

5. Από τη θεμελιώδη συχνότητα του Α θα βρούμε το μήκος του:

$$f_{0,\text{A}} = \frac{v}{2L_\text{A}} \ \text{ ή } \ L_\text{A} = \frac{v}{2f_{0,\text{A}}}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$L_\text{A} = \frac{340\ \text{m/s}}{2(250\ \text{Hz})} = 0{,}68\ \text{m}$$

Από τη σχέση της 3ης αρμονικής του Α με την 4η αρμονική του Β έχουμε:

$$f_{4,\text{B}} = f_{3,\text{A}} \ \text{ ή } \ 9f_{0,\text{B}} = 4f_{0,\text{A}} \ \text{ ή } \ f_{0,\text{B}} = \frac{4}{9}f_{0,\text{A}}$$

Με αντικατάσταση της $f_{0,\text{A}} = 250\ \text{Hz}$ βρίσκουμε $f_{0,\text{B}} = 111\ \text{Hz}$.

Από τη θεμελιώδη συχνότητα του Β θα βρούμε το μήκος του:

$$f_{0,\text{B}} = \frac{v}{4L_\text{B}} \ \text{ ή } \ L_\text{B} = \frac{v}{4f_{0,\text{B}}}$$

Με αντικατάσταση των τιμών έχουμε:

$$L_\text{B} = \frac{340\ \text{m/s}}{4(111\ \text{Hz})} = 0{,}77\ \text{m}$$

Συγγραφείς:	**Αθανάσιος Βελέντζας**, Φυσικός, Δρ. ΕΚΠΑ, ΕΔΙΠ – ΕΜΠ **Ευστράτιος Καπότης**, Φυσικός, Δρ. ΕΚΠΑ **Αλέξανδρος Π. Κατέρης**, Σύμβουλος Εκπαίδευσης, Δρ ΕΚΠΑ **Βασίλειος Νούσης**, Φυσικός, Υπ. ΕΚΦΕ Θεσπρωτίας **Αργύριος Πάσχος**, Διευθυντής Λυκείου, Δρ. ΕΚΠΑ **Γεώργιος Πολυζώης**, Διευθυντής Λυκείου, Δρ. Πανεπιστημίου Ιωαννίνων **Παύλος Γ. Τζαμαλής**, ΕΔΙΠ, Εργαστήριο Φυσικής, Τμήμα Βιοτεχνολογίας, ΓΠΑ
Ημερομηνία Δημιουργίας:	18/05/2025
Έκδοση:	v1.0