ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΡΙΓΩΝΑ

2.2 ΙΣΤΟΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΤΑ ΑΛΥΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑΣ

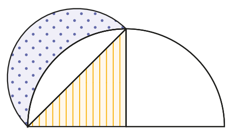
Μεγάλο ρόλο στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας έπαιξαν οι προσπάθειες των αρχαίων Ελλήνων γεωμετρών αρχικά και των γεωμετρών όλου του κόσμου στη συνέχεια, να επιλύσουν τα αποκαλούμενα «άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας». Πρόκειται για προβλήματα που θα έπρεπε να λυθούν με χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη. Αυτά είναι: **α)** ο τετραγωνισμός του κύκλου, **β)** ο διπλασιασμός του κύβου, **γ)** η τριχοτόμηση της γωνίας και **δ)** η κατασκευή κανονικών πολυγώνων. Τα προβλήματα αυτά είχαν τόσο πολύ απασχολήσει όχι μόνο τους γεωμέτρες, αλλά και το ευρύ κοινό. Αναφέρεται δε από τον Ερατοσθένη ότι ο τραγικός ποιητής Ευριπίδης συμπεριέλαβε σε έργο του το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου και ο Αριστοφάνης το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου (Όρνιθες, 414 π.Χ.)

Ο τετραγωνισμός του κύκλου

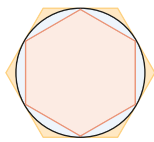
Είναι ίσως το πιο γνωστό από τα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας. Δίνεται ένας κύκλος και ζητείται να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη ένα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του κύκλου. Οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι είχαν διαπιστώσει ότι ο λόγος π της περιφέρειας προς τη διάμετρο ενός κύκλου είναι σταθερός. Για να λυθεί το πρόβλημα θα έπρεπε να βρουν τον λόγο αυτόν. Από τον Πάπυρο του Ahmes που φυλάσσεται στο Βρετανικό Μουσείο προκύπτει ότι οι Αιγύπτιοι είχαν φτάσει στην προσέγγιση:

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1605.$$

Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν την προσέγγιση $\pi = 3$ που χρησιμοποιήθηκε και από τους Ιουδαίους, αφού στη Βίβλο αναφέρεται ότι στον ναό του Σολομώντα υπήρχε δεξαμενή με διάμετρο 10 και περίμετρο 30 μονάδες μήκους.



Ο Ιπποκράτης ο Χίος, προσπαθώντας να τετραγωνίσει τον κύκλο μπόρεσε να τετραγωνίσει άλλα καμπύλα σχήματα και συγκεκριμένα κάποιους μηνίσκους, όπως αυτόν της εικόνας που το εμβαδόν του είναι ίσο με αυτό του γραμμοσκιασμένου τριγώνου.



Ο Αρχιμήδης από τις Συρακούσες προσπάθησε να λύσει το πρόβλημα με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς ήταν να προσεγγίσει τον κύκλο με κανονικά πολύγωνα που κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη και περιγράφονται ή εγγράφονται στον κύκλο. Έτσι, έφτασε στη προσέγγιση $\pi = 3{,}1416$.

Στο έργο του «Περί ελίκων» προτείνει το ακόλουθο εργαλείο που θα του επέτρεπε τον τετραγωνισμό του κύκλου: Ένα σημείο P κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε μια ημιευθεία Ox η οποία περιστρέφεται γύρω από την αρχή της με σταθερή γωνιακή ταχύτητα (γράφει ίσες γωνίες σε ίσους χρόνους). Τότε το ίχνος του σημείου γράφει μια καμπύλη οι ιδιότητες της οποίας επιτρέπουν τη μετατροπή τυχαίου τόξου σε ευθύγραμμο τμήμα, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον τετραγωνισμό του κύκλου. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται «Σπείρα του Αρχιμήδη». Άλλη καμπύλη που λύνει το πρόβλημα είναι η τετραγωνίζουσα του Δεινόστρατου.

Στην Ιστορία εμφανίζονται πολλοί μαθηματικοί από όλον τον κόσμο που επιχείρησαν να λύσουν το πρόβλημα. Το 1882 αποδείχθηκε ότι το πρόβλημα δεν λύνεται με κανόνα και διαβήτη

Ο διπλασιασμός του κύβου

Δίνεται ένας κύβος και ζητείται να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη η πλευρά ενός άλλου κύβου με όγκο διπλάσιο από εκείνον του αρχικού. Κατά μία εκδοχή, το πρόβλημα διατυπώθηκε από το Μαντείο των Δελφών όταν ερωτήθηκε από τους κατοίκους της Δήλου (ή τους Αθηναίους) πώς θα σωθούν από την επιδημία της πανώλης. Η απάντηση ήταν ότι θα έπρεπε να διπλασιάσουν τον όγκο του βωμού του Απόλλωνα, που είχε σχήμα κυβικό. Έτσι, οι κάτοικοι της Δήλου απευθύνθηκαν σε διάσημους γεωμέτρες και κυρίως σε αυτούς που ανήκαν στην Ακαδημία του Πλάτωνα. Σύμφωνα με μια άλλη εκδοχή το πρόβλημα τέθηκε όταν ο βασιλιάς της Κρήτης Μίνωας, σε έργο του Ευριπίδη, διαπίστωσε ότι ο τάφος του γιου του Γλαύκου ήταν μικρός για να είναι τάφος γιου βασιλιά και ζήτησε να διπλασιαστεί ο όγκος του. Ο τάφος ήταν κυβικός. Και οι δύο εκδοχές αναφέρονται από τον Ερατοσθένη.
Με το πρόβλημα αυτό ασχολήθηκαν ο Νικομήδης, ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο Πλάτωνας, ο Ήρων, ο Διοκλής, ο Μέναιχμος, ο Αρχύτας, ο Ερατοσθένης, ο Πάππος, ο Φίλων, ο Αρχιμήδης και πολλοί άλλοι. Η λύση του προβλήματος ανάγεται στην εύρεση μέσων αναλόγων μεταξύ δοθέντων μεγεθών α και β ή στην εύρεση του σημείου τομής δύο καμπύλων, είτε δύο παραβολών είτε μιας παραβολής και μιας υπερβολής είτε μιας υπερβολής και ενός κύκλου. Επίσης μπορεί να λυθεί με τη βοήθεια άλλων καμπυλών όπως η κογχοειδής του Νικομήδη κ.α. Ο Descartes στο έργο του «*Η Γεωμετρία*» που εκδόθηκε το 1637 περιγράφει ένα όργανο με κεκκαμένες ράβδους που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη λύση του προβλήματος. Επίσης, ο Ερατοσθένης κατασκεύασε όργανο που λύνει το πρόβλημα και το ονόμασε «μεσολάβο». Λίθινο ομοίωμα αυτού αφιέρωσε στον ναό του Φαραώ Πτολεμαίου. Το 1829 αποδείχθηκε ότι το πρόβλημα δεν λύνεται με κανόνα και διαβήτη

Η τριχοτόμηση της γωνίας

Δίνεται τυχαία γωνία και ζητείται να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη γωνία που το μέτρο της ισούται με το $\frac{1}{3}$ του μέτρου της αρχικής. Αν και το πρόβλημα λύνεται σε ειδικές περιπτώσεις, όπως π.χ. στην περίπτωση ορθής γωνίας, εν τούτοις, αποδείχθηκε το 1837 ότι δεν λύνεται στη γενική περίπτωση. Το πρόβλημα ωστόσο λύνεται με την κατασκευή καμπύλων όπως η κογχοειδής του Νικομήδη (που χρησιμοποιείται και για τον διπλασιασμό του κύβου), η σπείρα του Αρχιμήδη (που χρησιμοποιείται και για τον τετραγωνισμό του κύκλου), μια υπερβολή που πρότεινε ο Πάππος, ο κοχλίας του Pascal, κ.α. Ωστόσο, αρκετοί ήταν και αυτοί που κατασκεύασαν μηχανικούς τριχοτόμους γωνίας, δηλαδή εργαλεία διαφορετικά από τον κανόνα και τον διαβήτη με τα οποία μπορεί

Πηγή: προσωπικό αρχείο καθ. Ευανθίας Κοντογούρη να λυθεί το πρόβλημα. Τα πιο γνωστά είναι οι τριχοτόμοι του Pegrassi (1893) και ο αρθρωτός επαναφορέας του Kempe που φαίνεται στην εικόνα με τον οποίο μπορεί μια γωνία να διαιρεθεί σε *ν* ίσα μέρη (με αυτόν της εικόνας μπορεί να διαιρεθεί σε δύο, τρία ή τέσσερα μέρη).

Η κατασκευή κανονικών πολυγώνων

Ζητείται η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη κανονικού πολυγώνου (πολυγώνου που έχει ίσες μεταξύ τους πλευρές και ίσες μεταξύ τους γωνίες) με τυχαίο αριθμό πλευρών. Το πρόβλημα αυτό λύνεται εύκολα με κανόνα και διαβήτη για το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο, το κανονικό εξάγωνο. Λύνεται επίσης και για κάποια ακόμη, αλλά όχι για τυχαίο πλήθος πλευρών ν. Στα Στοιχεία του Ευκλείδη υπάρχουν επίσης οι κατασκευές του κανονικού πεταγώνου (Στ. IV,11), του κανονικού δεκαγώνου (Στ. XII,11) και του κανονικού δεκαπενταγώνου (Στ. IV,16). Ο δε Αρχιμήδης στο έργο του «Περί του εγγεγραμμένου κανονικού επταγώνου» κατασκεύασε κανονικό επτάγωνο (Σταμάτης Ε., 1968, Δελτίο Ε.Μ.Ε., τόμος 9, τεύχος 2). Εάν το πρόβλημα έχει λύση για κάποιο ν-γωνο, τότε έχει λύση και για το 2ν-γωνο.

Πηγές:
Εγκυκλοπαίδεια *Ύδρα-Cambridge-Ήλιος*, εκδόσεις Τέσσερα Έψιλον, 1992
Μεγάλη Ελληνική Εγκυκλοπαίδεια, Δρανδάκης, 1956
Μ.Α. Μπρίκας, *Τα περίφημα Άλυτα Γεωμετρικά Προβλήματα της Αρχαιότητας*, εκτύπωση Α.Α. Παπασπύρου, 1970
Katz Victor J., *Ιστορία των Μαθηματικών*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, σ59-60, Ηράκλειο, 2013.

Τίτλος: **«Ιστορία μαθηματικών: τα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας»**

Έκδοση: **1.0**

Ημερομηνία: **10/09/2024**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**

εκδόσεις Ελληνική γραφή

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού

ΙΕΠ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2021-2027

Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή