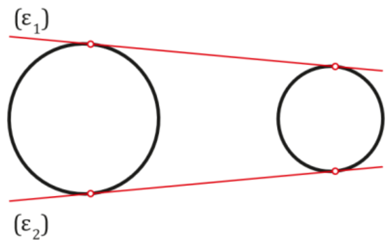
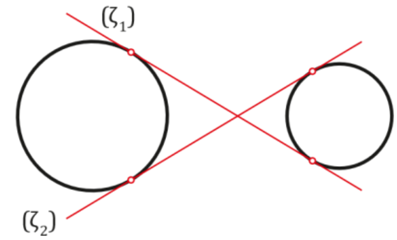
Κύκλοι και εφαπτόμενες

Εφαπτομένες κύκλων



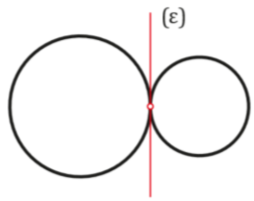
(Σχ. α)



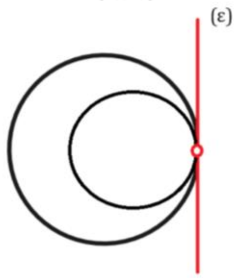
(Σχ. β)

Αν δοθούν δύο εξωτερικοί κύκλοι, τότε υπάρχουν τέσσερις ευθείες που είναι κοινές εφαπτομένες των κύκλων αυτών.

- Στο (Σχ.α) οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι οι κοινές **εξωτερικές εφαπτομένες**, και αφήνουν τους κύκλους στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η καθεμιά εφαπτομένη.
- Στο (Σχ.β) οι ευθείες (ζ_1) και (ζ_2) είναι οι κοινές **εσωτερικές εφαπτομένες** των κύκλων αυτών και αφήνουν τους κύκλους σε διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η καθεμιά εφαπτομένη.
- Αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ή εσωτερικά), τότε η εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο λέγεται **κοινή εφαπτομένη** (Σχ.γ και Σχ.δ).
- Αν ο ένας κύκλος είναι εσωτερικός του άλλου ή εφάπτεται εσωτερικά με αυτόν, τότε δεν υπάρχουν κοινές εξωτερικές εφαπτομένες.



(Σχ. γ)



(Σχ. δ)

Εφαρμογή 1

Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Μια ευθεία που δεν διέρχεται από το Α εφάπτεται με τους κύκλους στα σημεία Β και Γ. Η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο Α τέμνει την (ε) στο Μ. Να αποδείξετε ότι ΜΒ = ΜΓ.

Λύση

Επειδή τα ΜΑ, ΜΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο C_1, θα είναι:

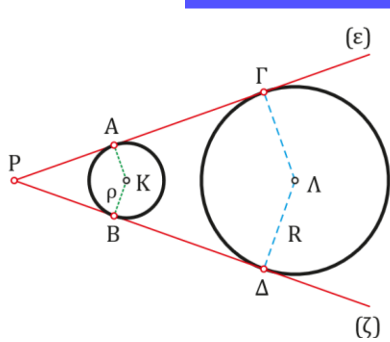
$$MA = MB.$$

Όμοια, επειδή τα ΜΑ, ΜΓ είναι εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο C_2, θα ισχύει ΜΑ = ΜΓ. Επομένως θα είναι:

$$MB = M\Gamma. \quad \blacksquare$$

Εφαρμογή 2

Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι τα κέντρα Κ, Λ και το σημείο τομής Ρ των κοινών εξωτερικών εφαπτομένων (ε), (ζ) των δύο κύκλων βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



Λύση

Φέρουμε τις ακτίνες ΚΑ, ΚΒ, ΛΓ, ΛΔ των κύκλων που καταλήγουν στα σημεία επαφής. Αυτές είναι κάθετες στις ευθείες (ε), (ζ) και ισχύει:

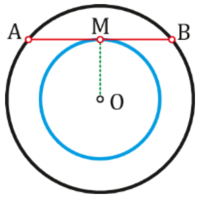
$$KA = KB = \rho, \quad \Lambda\Gamma = \Lambda\Delta = R,$$

όπου ρ, R είναι αντίστοιχα οι ακτίνες των κύκλων (Κ) και (Λ).

Αφού λοιπόν τα Κ, Λ ισαπέχουν από τις τεμνόμενες ευθείες (ε), (ζ), θα βρίσκονται στη διχοτόμο της γωνίας Ρ. Άρα τα σημεία Ρ, Κ, Λ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, που είναι η διχοτόμος της γωνίας Ρ. ■

Εφαρμογή 3

Θεωρούμε δύο ομόκεντρους κύκλους (έχουν το ίδιο κέντρο) και μια χορδή ΑΒ του μεγάλου κύκλου που εφάπτεται του μικρού κύκλου στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι ΜΑ = ΜΒ.



Λύση

Φέρουμε την ακτίνα ΟΜ. Είναι ΟΜ $\perp$ ΑΒ, αφού η ΑΒ εφάπτεται με τον μικρό κύκλο στο Μ.

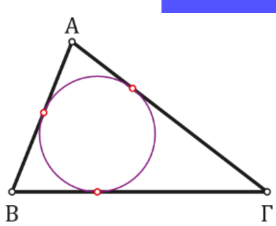
Επειδή όμως ΟΜ $\perp$ ΑΒ και η ΑΒ είναι χορδή του μεγάλου κύκλου, το ΟΜ είναι το απόστημα της χορδής αυτής.

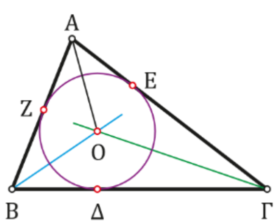
Άρα το Μ είναι μέσο του τμήματος ΑΒ, δηλαδή:

ΜΑ = ΜΒ. ■

Εφαρμογή 4

Στο διπλανό σχήμα οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ εφάπτονται με τον κύκλο. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Α}$, $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.





Λύση

Έστω Ο το κέντρο του κύκλου.

Η διακεντρική ευθεία του σημείου Α προς τον κύκλο είναι διχοτόμος της γωνίας Α, αφού τα τμήματα ΑΖ και ΑΕ είναι εφαπτόμενα. Η διχοτόμος λοιπόν της γωνίας $\hat{Α}$ διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου.

Όμοια, οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ διέρχονται από το κέντρο Ο.

Οι διχοτόμοι λοιπόν των γωνιών $\hat{Α}$, $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι μάλιστα το κέντρο του δοσμένου κύκλου (λέγεται εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου). ■

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.

Τίτλος: Κύκλοι και εφαπτομένες

Έκδοση: 1.0 Ημερομηνία: 26.04.2024

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

ΕΜΠΝΕΥΣΤΕΣ/ ΟΜΑΔΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ/ ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Κωνσταντίνος Ρεκούμης
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Λάμπρος Κατσάπας
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Νικόλαος Κουμάντος
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Ελένη Ρεκούμη
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03