

Παραδείγματα συναρτήσεων

Στα μαθηματικά και στην καθημερινή ζωή, πολλές καταστάσεις μπορούν να περιγραφούν με τη βοήθεια πολυωνυμικών συναρτήσεων πρώτου και δεύτερου βαθμού. Η μοντελοποίηση βοηθά να μετατρέπουμε προβλήματα σε μαθηματικές σχέσεις, ώστε να τα κατανοούμε καλύτερα και να βρίσκουμε λύσεις με λογικό και οργανωμένο τρόπο. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις **πρώτου βαθμού** έχουν τη μορφή $f(x) = ax + \beta$, οι γραφικές τους παραστάσεις είναι ευθείες. Και περιγράφουν γραμμικές σχέσεις. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις **δεύτερου βαθμού** έχουν τη μορφή $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$, οι γραφικές τους παραστάσεις είναι παραβολές περιγράφουν τετραγωνικές σχέσεις. Οι παραβολές που σχηματίζουν είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην περιγραφή φαινομένων με μέγιστα ή ελάχιστα, όπως στην οικονομία, τη φυσική ή τη γεωμετρία.

Παράδειγμα 1

Ένα κατάστημα ενοικιάζει ποδήλατα με 5€ βασική χρέωση και 2€ ανά ώρα. Να εκφράσετε τη χρέωση ως συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίσετε το κόστος για 4 ώρες. Αν το διαθέσιμο ποσό για την ενοικίαση ενός ποδηλάτου από έναν πελάτη είναι 10 €, για πόση ώρα μπορεί να ενοικιάσει ένα ποδήλατο;

Λύση

Έστω x οι ώρες χρέωσης και $C(x)$ η χρέωση. Τότε, θα έχουμε:

$$C(x) = 2x + 5$$

Επομένως, για $x = 4$ η χρέωση είναι:

$$C(4) = 2 \cdot 4 + 5 = 13€$$

Αν το διαθέσιμο ποσό για την ενοικίαση ενός ποδηλάτου είναι 10€ θα έχουμε:

$$C(x) = 10 \Leftrightarrow 2x + 5 = 10 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = 2,5 \text{ ώρες.}$$

Παράδειγμα 2

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 40 cm. Έστω ότι το πλάτος του είναι x cm. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ως συνάρτηση του x και να βρείτε τη διάσταση x που δίνει το μέγιστο εμβαδόν.

Λύση

Αν η άλλη πλευρά του ορθογώνιου είναι y , τότε θα έχουμε: $2x + 2y = 40$, οπότε, $x + y = 20$ και $y = 20 - x$. Επομένως, το εμβαδόν του ορθογώνιου θα είναι

$$A(x) = xy = x(20 - x) = -x^2 + 20x.$$

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x = \frac{-20}{2(-1)} = 10$ και η μέγιστη τιμή του είναι ίση με:

$$A(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2.$$

(Επιβεβαιώστε γεωμετρικά το αποτέλεσμα)

Ασκήσεις

Α' ΟΜΑΔΑ

- 1 Ένα ταξί χρεώνει 1,2€ ανά χιλιόμετρο και 3€ πάγιο. Να γράψετε τη συνάρτηση χρέωσης και να βρείτε την τιμή για 8 km.
- 2 Η συνάρτηση $f(x) = 3x + 4$ περιγράφει το κόστος ενός προϊόντος σε σχέση με την ποσότητα. Να υπολογίσετε το κόστος για 10 και 20 τεμάχια.
- 3 Μια γραμμική συνάρτηση περνά από τα σημεία (2, 6) και (6, 10). Βρείτε τον τύπο της.
- 4 Ένα θεατρικό έργο έχει έσοδα που δίνονται από τη συνάρτηση $E(x) = -2x + 40x$, όπου x είναι ο αριθμός των εισιτηρίων. Πόσα εισιτήρια πρέπει να εκδοθούν ώστε να μεγιστοποιηθούν τα έσοδα;
- 5 Ένας αγρότης παρατηρεί ότι η απόδοση της σοδειάς του εξαρτάται από την ποσότητα λιπάσματος και περιγράφεται από της συνάρτηση $A(x) = -x^2 + 10x$. Ποια ποσότητα λιπάσματος δίνει τη μέγιστη απόδοση;

Β' ΟΜΑΔΑ

- 1 Μια εταιρεία έχει κόστος παραγωγής $C(x) = x^2 - 12x + 60$. Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή κόστους και η αντίστοιχη ποσότητα παραγωγής.
- 2 Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει άθροισμα καθέτων πλευρών 30 cm. Να βρείτε τη συνάρτηση του εμβαδού σε σχέση με το μήκος της μιας καθέτου πλευράς και να υπολογίσετε τον μήκος της ώστε το εμβαδόν να είναι μέγιστο.
- 3 Ο αριθμός εισιτηρίων για μια συναυλία περιγράφεται από τη συνάρτηση $N(p) = -25p^2 + 1500p$, όπου p η τιμή του εισιτηρίου. Ποια τιμή εισιτηρίου αποφέρει τα περισσότερα εισιτήρια;
- 4 Ο μισθός ενός εργαζόμενου σε μια εταιρεία δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = at^2 + \gamma$, όπου t είναι τα χρόνια εργασίας. Αν ο εργαζόμενος προσλαμβάνεται με μισθό 800€ και ύστερα από 10 χρόνια ο μισθός του είναι 1200€, ποιος θα είναι ο μισθός του ύστερα από 29 χρόνια;
- 5 Μια γραμμή παραγωγής ενός προϊόντος έχει λειτουργικά έξοδα που δίνονται από τη συνάρτηση $E(x) = 0,02x^2 - 0,8x + 10$, όπου x είναι ο αριθμός των τεμαχίων του προϊόντος ανά ώρα. Έχει παρατηρηθεί ότι όταν παράγει 40 τεμάχια της ώρας τα έξοδα είναι ίσα το κόστος της γραμμής όταν δεν λειτουργεί. Να βρεθεί το πλήθος των τεμαχίων που πρέπει να παράγει ώστε το κόστος λειτουργίας της γραμμής να γίνεται ελάχιστο.

Τίτλος: «**Παραδείγματα συναρτήσεων**»

Έκδοση: **1.0**

Ημερομηνία: **10/09/2025**

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**



Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (ΜΙΣ) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων
και Αθλητισμού

ΙΕΠ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα
Ανθρώπινο Δυναμικό και
Κοινωνική Συνοχή