

Περισσότερη εξάσκηση

Για να μετασχηματίζουμε αλγεβρικές παραστάσεις, είναι χρήσιμο να συνδυάζουμε αλγεβρικές ταυτότητες με τις ιδιότητες των ριζών και των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες. Παρακάτω παρατίθενται χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1

Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις

$$\begin{array}{ll} \text{(α)} (\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \left[ (\sqrt{\alpha})^2 - (\sqrt{\beta})^2 \right] & \text{(β)} \left( \sqrt[3]{5^2} \right)^2 \left( \sqrt{5^3} \right)^3 \\ \text{(γ)} \frac{\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} & \text{(δ)} \left( \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x^2}} \right) \left( \sqrt[3]{x - \sqrt[3]{x^2}} \right) \left( \sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{x^4}} \right) \end{array}$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{array}{l} \text{(α)} (\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \left[ (\sqrt{|\alpha|})^2 - (\sqrt{|\beta|})^2 \right] = (|\alpha| + |\beta|)(|\alpha| - |\beta|) = |\alpha|^2 - |\beta|^2 = \alpha^2 - \beta^2 \\ \text{(β)} \left( \sqrt[3]{5^2} \right)^2 \left( \sqrt{5^3} \right)^3 = \sqrt[3]{5^4} \cdot \sqrt{5^9} = \sqrt[6]{5^8} \cdot \sqrt[6]{5^{27}} = \sqrt[6]{5^{35}} = \sqrt[6]{5^{30} \cdot 5^5} = \sqrt[6]{5^{30}} \cdot \sqrt[6]{5^5} = 5^5 \sqrt[6]{5^5} \end{array}$$

$$\text{ή αλλιώς } \left( \sqrt[3]{5^2} \right)^2 \left( \sqrt{5^3} \right)^3 = \sqrt[3]{5^4} \cdot \sqrt{5^9} = 5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{9}{2}} = 5^{\frac{4}{3} + \frac{9}{2}} = 5^{\frac{8}{6} + \frac{27}{6}} = 5^{\frac{35}{6}} = 5^{5 + \frac{5}{6}} = 5^5 \sqrt[6]{5^5}$$

$$\text{(γ)} \frac{\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^{\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{\frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = x^{\frac{13}{12}} = x^{1 + \frac{1}{12}} = x \sqrt[12]{x}$$

$$\begin{aligned} \text{(δ)} \left( \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x^2}} \right) \left( \sqrt[3]{x - \sqrt[3]{x^2}} \right) \left( \sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{x^4}} \right) &= \left[ \left( \sqrt[3]{x} \right)^2 - \left( \sqrt[3]{x^2} \right)^2 \right] \left( \sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{x^4}} \right) = \left( \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^4} \right) \left( \sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{x^4}} \right) \\ &= \left( \sqrt[3]{x^2} \right)^2 - \left( \sqrt[3]{x^4} \right)^2 = \sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^8} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Να παραγοντοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{(α)} x^{\frac{2}{3}} - 9 & \text{(β)} x^{\frac{2}{5}} + 2x^{\frac{1}{5}} + 1 \\ \text{(γ)} x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} + 4 & \text{(δ)} x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} + 6 \end{array}$$

Λύση

Έχουμε:

$$\text{(α)} x^{\frac{2}{3}} - 9 = \left( x^{\frac{1}{3}} \right)^2 - 3^2 = \left( x^{\frac{1}{3}} + 3 \right) \left( x^{\frac{1}{3}} - 3 \right) \quad (\text{Διαφορά τετραγώνων})$$

**Παράδειγμα 2**

συνέχεια:

$$(β) x^{\frac{2}{5}} + 2x^{\frac{1}{5}} + 1 = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^2 + 2 \cdot x^{\frac{1}{5}} \cdot 1 + 1^2 = \left(x^{\frac{1}{5}} + 1\right)^2 \quad (\text{Τέλειο τετράγωνο})$$

$$(γ) x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} + 4 = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 - 2 \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot 2 + 2^2 = \left(x^{\frac{1}{4}} - 2\right)^2 \quad (\text{Τέλειο τετράγωνο})$$

$$(δ) x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} + 6 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + 5x^{\frac{1}{3}} + 6 =$$

$$= y^2 + 5y + 6 = y^2 + (2 + 3)y + 2 \cdot 3$$

$$= \left(x^{\frac{1}{3}} + 2\right)\left(x^{\frac{1}{3}} + 3\right)$$

**Ασκήσεις**

**Α' ΟΜΑΔΑ**

**1** Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$$(α) \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[5]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^7}}{x\sqrt{x}}$$

$$(β) \frac{\sqrt[4]{32x^3} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[8]{x^5}}$$

$$(γ) (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 \quad (δ) (\sqrt[3]{x} + 2)(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 4)$$

**2** Να παραγοντοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$$(α) x^{\frac{4}{3}} - 1$$

$$(β) x^{\frac{4}{5}} - 2x^{\frac{2}{5}} + 1$$

$$(γ) x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} + 1$$

$$(δ) x - x^{\frac{1}{2}} - 2$$

**Β' ΟΜΑΔΑ**

**1** Να παραγοντοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$$(α) \frac{\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)^2 - \left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2}{4}$$

$$(β) \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 - 2$$

$$(γ) x + 1 + 3\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} + 1) \quad (\text{Υπόδειξη: θέτουμε } \sqrt[3]{x} = y)$$

$$(δ) x + 4\sqrt[3]{x} + 4\sqrt{x^2} \quad (\text{Υπόδειξη: θέτουμε } \sqrt[3]{x} = y)$$

Τίτλος: «Περισσότερη εξάσκηση»

Έκδοση: 1.5

Ημερομηνία: 10/09/2025

Συντονιστής ομάδας σχεδιασμού και ανάπτυξης: **Κέλλυ Σαρρή Πασχαλίδη**

Δημιουργία: **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ**



*Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (ΜΙΣ) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.*



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων  
και Αθλητισμού



ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ  
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση  
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα  
Ανθρώπινο Δυναμικό και  
Κοινωνική Συνοχή