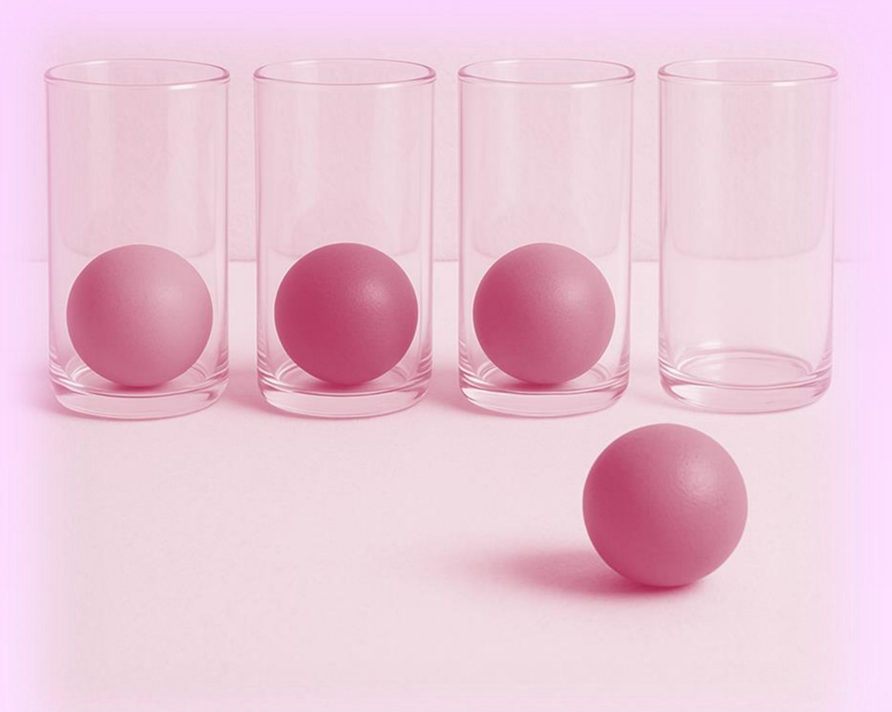
ΟΔΗΓΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ



Πειράματα τύχης

Αιτιοκρατικό πείραμα

Μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμά του.

Π.χ. καταθέτουμε στην τράπεζα ένα συγκεκριμένο ποσό χρημάτων με σταθερό επιτόκιο και υπολογίζουμε τον τόκο ενός έτους.

Τυχαίο πείραμα

- ✓ Μπορεί να επαναληφθεί πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες.
- ✓ Γνωρίζουμε τα αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν από την εκτέλεσή του.
- ✓ Δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα σε μίαεκτέλεσή του.

Π.χ. επιλέγουμε με κλειστά μάτια ένα τραπουλόχαρτο, από μια τράπουλα των 52 φύλλων.

Δειγματοχώρος

Είναι το σύνολο το οποίο έχει ως στοιχεία τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης. Συμβολίζεται, συνήθως, με το γράμμα Ω.

Ενδεχόμενο -Πραγματοποίηση ενδεχομένου

Είναι κάθε υποσύνολο του δειγματοχώρου. Λέμε ότι το ενδεχόμενο Α πραγματοποιήθηκε, όταν το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης είναι στοιχείο του Α. Το πλήθος των στοιχείων του Α συμβολίζεται ν(Α).

Απλό ενδεχόμενο

Είναι κάθε ενδεχόμενο που έχει ένα μόνο δυνατό αποτέλεσμα.

Σύνθετο ενδεχόμενο

Είναι κάθε ενδεχόμενο με δύο, τουλάχιστον, δυνατά αποτελέσματα.

Βέβαιο ενδεχόμενο

Λέμε τον δειγματοχώρο Ω. Πραγματοποιείται πάντοτε.

Αδύνατο ενδεχόμενο

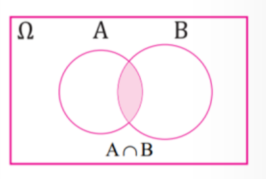
Λέμε το κενό σύνολο. Δεν πραγματοποιείται ποτέ.

Πιθανοθεωρητικά μοντέλα

Είναι οι μαθηματικές κατασκευές που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε τα πειράματα τύχης.
Εφαρμογές: Μετεωρολογία, Επιστήμες Υγείας, Βιολογία, Τυχερά παιχνίδια, Τεχνητή νοημοσύνη κ.α.

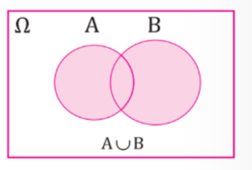
Πράξεις και σχέσεις ενδεχομένων

Τομή



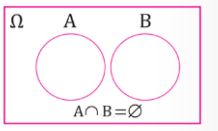
Συμβολίζεται A ∩ B και διαβάζεται «A και B». Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B.

Ένωση



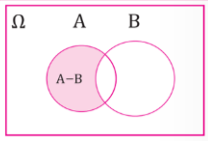
Συμβολίζεται A ∪ B και διαβάζεται «A ή B». Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A ή το B, δηλαδή πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα A και B.

Ασυμβίβαστα (ξένα) ενδεχόμενα



Είναι τα ενδεχόμενα A και B για τα οποία ισχύει A∩B=∅. Όταν πραγματοποιείται το ένα αποκλείεται να πραγματοποιηθεί το άλλο.

Διαφορά του B από το A

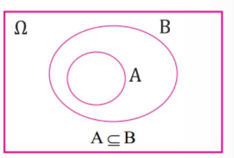


Συμβολίζεται A–B και διαβάζεται «A και όχι B».

Ισχύει: A–B= A∩B'.

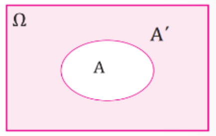
Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A και δεν πραγματοποιείται το B.

A υποσύνολο B



Όταν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A, τότε πραγματοποιείται και το ενδεχόμενο B. Λέμε ότι το ενδεχόμενο A συνεπάγεται το B.

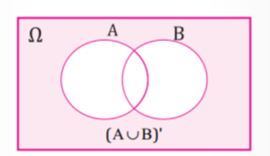
Συμπληρωματικό ενδεχόμενο



Είναι η διαφορά Ω – A. Συμβολίζεται αλλιώς A' και διαβάζεται « όχι A ». Πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A.

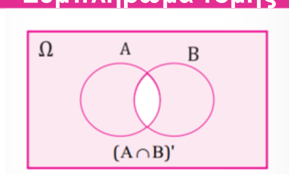
Συνδυασμοί πράξεων

Συμπλήρωμα ένωσης



Συμβολίζεται (A ∪ B)' και διαβάζεται «όχι (A ή B) ». Πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B.

Συμπλήρωμα τομής



Συμβολίζεται (A ∩ B)' και διαβάζεται «όχι (A και B)». Πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B, ή διαφορετικά, όταν πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα A και B.

Μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα

ΔΕΙΓΜΑΤΟΧΩΡΟΣ	ΑΠΟΔΩΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
Ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα (κλασικός ορισμός πιθανότητας)	Για κάθε αποτέλεσμα ω του πειράματος, ισχύει: $P(\omega)=\frac{1}{\nu(\Omega)}$
Μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα	**1. Νόμος των μεγάλων αριθμών** Εκτελούμε πολλές φορές το πείραμα και σε κάθε απλό ενδεχόμενο αποδίδουμε πιθανότητα τη σχετική συχνότητα εμφάνισής του. **2. Λογική** ✓ Αναλύουμε, αν είναι εφικτό, τα μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα σε απλούστερα στοιχεία τα οποία είναι ισοπίθανα. ✓ Ανάλογα με τη φύση του πειράματος αποδίδουμε πιθανότητα στα απλά ενδεχόμενα σύμφωνα με κάποιο κριτήριο.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα
Ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα

- ✓ Ρίψη συμμετρικού νομίσματος: Τα απλά ενδεχόμενα {Κ} και {Γ} είναι ισοπίθανα με πιθανότητα $p=\frac{1}{2}$.
- ✓ Ρίψη συμμετρικού εξάεδρου ζαριού: Τα απλά ενδεχόμενα {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6} είναι ισοπίθανα με πιθανότητα $p=\frac{1}{6}$.

Μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα

- ✓ **Νόμος των μεγάλων αριθμών**

  Ρίψη μη συμμετρικού νομίσματος: Τα απλά ενδεχόμενα {Κ} και {Γ} δεν είναι ισοπίθανα. Μπορούμε να ρίξουμε το νόμισμα πολλές φορές και να αποδώσουμε πιθανότητα στα απλά ενδεχόμενα σύμφωνα με το πόσες φορές πραγματοποιήθηκε το καθένα. Π.χ. Ρίξαμε το νόμισμα 1000 φορές, το {Κ} πραγματοποιήθηκε 750 φορές και το {Γ} πραγματοποιήθηκε 250 φορές. Αποδίδουμε τις εξής πιθανότητες:

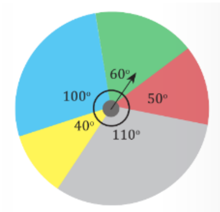
$$P(K)=\frac{750}{1000}=\frac{3}{4} \text{ και } P(\Gamma)=\frac{250}{1000}=\frac{1}{4}$$

- ✓ **Ανάλυση μη ισοπίθανων απλών ενδεχομένων**

  Ρίψη δύο συμμετρικών εξάεδρων ζαριών με δειγματοχώρο Ω = {2,3,4, …, 12}. Ο Ω περιέχει το άθροισμα ενδείξεων. Τα απλά ενδεχόμενα {2}, {3}, {4}, …, {12} δεν είναι ισοπίθανα. Αν θεωρήσουμε ως δειγματοχώρο τον Ω' = {(1,1), (1,2), (1,6), …, (6,6)} (36 δυνατά αποτελέσματα) στον οποίο τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα τότε μπορούμε να αποδώσουμε πιθανότητα στα στοιχεία του Ω . Π.χ. $\mathrm{P}(3)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ αφού, με βάση τον Ω', οι ευνοϊκές περιπτώσεις για να έχουμε άθροισμα 3 είναι οι (1,2), (2,1), δηλαδή 2 από τις 36 δυνατές περιπτώσεις.

✓ **Απόδοση πιθανότητας που απορρέει από τη γεωμετρία**

Περιστρεφόμενος τροχός: Αποδίδουμε πιθανότητα στο ενδεχόμενο ο τροχός να σταματήσει σε κάποιο χρώμα ανάλογα με την επίκεντρη γωνία.



Π.χ. $\mathrm{P}(\text{πράσινο})=\frac{60}{360}=\frac{1}{6}$

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

Έστω Ω ένας πεπερασμένος δειγματοχώρος. Δεχόμαστε τα επόμενα αξιώματα:

ΑΞΙΩΜΑ 1. Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α του Ω συμβολίζεται P(A) και είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, δηλαδή P(A) ≥ 0.

ΑΞΙΩΜΑ 2. Για τον δειγματοχώρο Ω ισχύει P(Ω) = 1.

ΑΞΙΩΜΑ 3. Αν Α και Β είναι δύο, οποιαδήποτε, ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του Ω τότε

P(A∪B) = P(A) + P(B) (Απλός προσθετικός νόμος)

Σημείωση: Ο απλός προσθετικός νόμος γενικεύεται για περισσότερα των δύο ενδεχομένων, τα οποία είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους. Π.χ. P (A ∪ B ∪ Γ) = P (A) + P(B) + P(Γ).

ΠΡΟΤΑΣΗ	ΑΠΟΔΕΙΞΗ
1. Η πιθανότητα του κενού συνόλου είναι μηδέν: $\mathrm{P}(\varnothing)=0$	Είναι $\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$, δηλαδή το κενό σύνολο είναι ασυμβίβαστο με τον εαυτό του. Επίσης $\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$. Από το τρίτο αξίωμα έχουμε: $\mathrm{P}(\varnothing\cup\varnothing)=\mathrm{P}(\varnothing)$ ή $\mathrm{P}(\varnothing)+\mathrm{P}(\varnothing)=\mathrm{P}(\varnothing)$ ή $\mathrm{P}(\varnothing)=0.$

2. Για οποιοδήποτε ενδεχόμενο $A=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa\}\neq\varnothing$ ενός δειγματοχώρου Ω, ισχύει: $P(A)=P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+...+P(\alpha_\kappa)$	Από τη γενίκευση του απλού προσθετικού νόμου, επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ανά δύο ξένα, έχουμε: $P(A)=P(\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa\})=P(\{\alpha_1\}\cup\{\alpha_2\}\cup...\cup\{\alpha_\kappa\})$ $=P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+...+P(\alpha_\kappa)$.
3. Το άθροισμα των πιθανοτήτων των απλών ενδεχομένων του Ω είναι 1: $P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_\nu)=1$	Από το προηγούμενο αποτέλεσμα για το $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ και το δεύτερο αξίωμα έχουμε: $P(\Omega)=P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_\nu)$ και επειδή P(Ω) = 1 συμπεραίνουμε ότι $P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_\nu)=1$

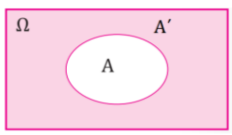
Ο Κλασικός ορισμός ως ειδική περίπτωση του Αξιωματικού ορισμού

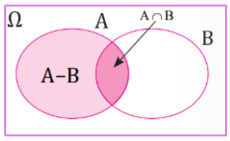
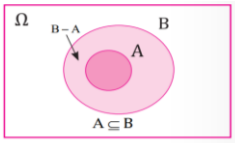
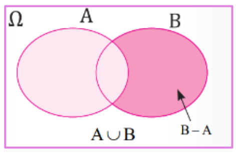
Έστω ότι ο δειγματοχώρος $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ενός πειράματος τύχης αποτελείται από ν ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα. Αν $A=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa\}$ είναι ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο του Ω, εκτός του κενού συνόλου, τότε

$$P(A)=P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+...+P(\alpha_\kappa)=\underbrace{\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+...+\frac{1}{\nu}}_{\kappa\ \text{φορές}}=\frac{\kappa}{\nu}=\frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}$$

Επομένως η P(A) ταυτίζεται με αυτή κλασικού ορισμού.

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων

ΚΑΝΟΝΑΣ	ΑΠΟΔΕΙΞΗ
1. Για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α ενός δειγματοχώρου Ω ισχύει: $P(A)+P(A')=1$	 Τα ενδεχόμενα A και A' είναι ασυμβίβαστα και για την ένωσή τους ισχύει: $A\cup A'=\Omega$. Επομένως, από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε διαδοχικά: $P(A\cup A')=P(A)+P(A')$ $P(\Omega)=P(A)+P(A')$ $1=P(A)+P(A')$.

ΚΑΝΟΝΑΣ	ΑΠΟΔΕΙΞΗ
2. Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματοχώρου Ω ισχύει: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$	 Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα $A-B$ και $A\cap B$ είναι ασυμβίβαστα και για την ένωσή τους ισχύει: $(A-B)\cup(A\cap B)=A.$ Από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε: $P(A)=P\big((A-B)\cup(A\cap B)\big)=P(A-B)+P(A\cap B)$ ή $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B).$
3. Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματοχώρου Ω ισχύει: Αν $A\subseteq B$ τότε $P(A)\leq P(B)$	 Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα A και $B-A$ είναι ασυμβίβαστα και για την ένωσή τους ισχύει: $A\cup(B-A)=B.$ Από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε: $P(B)=P\big(A\cup(B-A)\big)=P(A)+P(B-A)$ Επομένως, $P(B)\geq P(A)$, διότι $P(B-A)\geq 0.$
4. Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματοχώρου Ω ισχύει: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ (προσθετικός νόμος)	 Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα A και $B-A$ είναι ασυμβίβαστα και για την ένωσή τους ισχύει: $A\cup B=A\cup(B-A).$ Από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε: $P(A\cup B)=P(A\cup(B-A)))$ ή $P(A\cup B)=P(A)+P(B-A)$ ή, από τον κανόνα 2, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

ΘΕΜΑ 1. **Να αποδείξετε τον προσθετικό νόμο:**

Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματοχώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ΘΕΜΑ 2. **Έστω τα ενδεχόμενα** $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ **και** $B = \{\gamma, \delta, \varepsilon\}$ **του δειγματοχώρου** $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ **με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):**

1. Είναι $A \cap B = \{\gamma\}$.	**Σ**	**Λ**
2. Είναι $P(A \cup B) < 1$.	**Σ**	**Λ**
3. Το συμπληρωματικό του Β είναι το Α.	**Σ**	**Λ**
4. Όταν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $\{\gamma\}$, τότε πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β.	**Σ**	**Λ**
5. Είναι $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.	**Σ**	**Λ**

ΘΕΜΑ 3. **Οι έδρες ενός αμερόληπτου ζαριού φέρουν ενδείξεις**

1, 1, 2, 2, 2, 3

Ρίχνουμε το ζάρι δύο φορές.

1. **Να βρεθεί ο δειγματοχώρος του πειράματος.**
2. **Είναι τα απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα;**
3. **Ποια πιθανότητα θα αποδώσετε σε κάθε απλό ενδεχόμενο;**

ΘΕΜΑ 4. **Η πιθανότητα να επιλεγεί ένας μαθητής για την ομάδα ποδοσφαίρου του σχολείου του είναι** $\frac{18}{60}$**, ενώ για την ομάδα μπάσκετ είναι** $\frac{11}{60}$**. Η πιθανότητα να επιλεγεί και στις δυο ομάδες είναι** $\frac{5}{60}$**. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:**

1. **Ο μαθητής να επιλεγεί τουλάχιστον σε μια ομάδα.**
2. **Ο μαθητής να επιλεγεί μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου.**
3. **Ο μαθητής να μην επιλεγεί σε καμία ομάδα.**

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

βλέπε σελ. 6, κανόνας 4.

ΘΕΜΑ 2

1. Σ **2.** Λ **3.** Λ **4.** Σ **5.** Λ

ΘΕΜΑ 3

1. Ο δειγματοχώρος Ω του πειράματος είναι:

$$\Omega = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

2. Τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα όπως μπορούμε να δούμε από τον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου:

	1	**1**	**2**	**2**	**2**	**3**
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 3)
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 3)
2	(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 3)
2	(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 3)
2	(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 3)
3	(3, 1)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 2)	(3, 2)	(3, 3)

3. Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα αποδίδουμε στα απλά ενδεχόμενα του δειγματοχώρου τις παρακάτω πιθανότητες:

$$P((1, 1)) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \qquad P((1, 2)) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P((1, 3)) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P((2, 1)) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P((2, 2)) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \qquad P((2, 3)) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P((3, 1)) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \qquad P((3, 2)) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \qquad P((3, 3)) = \frac{1}{36}$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω τα ενδεχόμενα:

Α: «Ο μαθητής να επιλεγεί στην ομάδα ποδοσφαίρου».

Β: «Ο μαθητής να επιλεγεί στην ομάδα μπάσκετ».

Τότε το ενδεχόμενο «ο μαθητής να επιλεγεί και στις δυο ομάδες» είναι το $A \cap B$.

Έχουμε από τα δεδομένα:

$$P(A) = \frac{18}{60}, \quad P(B) = \frac{11}{60}, \quad P(A \cap B) = \frac{5}{60}.$$

1. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup B$. Είναι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{18}{60} + \frac{11}{60} - \frac{5}{60} = \frac{24}{60}.$$

2. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A - B$. Είναι:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{18}{60} - \frac{5}{60} = \frac{13}{60}.$$

3. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(A \cup B)'$. Είναι:

$$P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{24}{60} = \frac{46}{60}$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

ΘΕΜΑ 1. **Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α ενός δειγματοχώρου Ω ισχύει:**

$$P(A)+P(A')=1$$

ΘΕΜΑ 2. **Από τα αγόρια μιας τάξης επιλέγουμε ένα και το ρωτάμε αν παίζει ποδόσφαιρο ή μπάσκετ. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:**

Α : «Το αγόρι παίζει ποδόσφαιρο»

Β: «Το αγόρι παίζει μπάσκετ»

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις επόμενες ερωτήσεις:

1. Το ενδεχόμενο το αγόρι να παίζει ποδόσφαιρο ή μπάσκετ συμβολίζεται:

   $A\cap B$ $\quad$ $A\cup B$ $\quad$ $A-B$ $\quad$ $B-A$ $\quad$ Α΄ $\quad$ Β΄

2. Το ενδεχόμενο το αγόρι να παίζει τουλάχιστον ένα από τα δύο αθλήματα συμβολίζεται:

   $A\cap B$ $\quad$ $A\cup B$ $\quad$ $A-B$ $\quad$ $B-A$ $\quad$ Α΄ $\quad$ Β΄

3. Το ενδεχόμενο το αγόρι να μην παίζει μπάσκετ συμβολίζεται:

   $A\cap B$ $\quad$ $A\cup B$ $\quad$ $A-B$ $\quad$ $B-A$ $\quad$ Α΄ $\quad$ Β΄

4. Το ενδεχόμενο το αγόρι να παίζει ποδόσφαιρο και μπάσκετ συμβολίζεται:

   $A\cap B$ $\quad$ $A\cup B$ $\quad$ $A-B$ $\quad$ $B-A$ $\quad$ Α΄ $\quad$ Β΄

5. Το ενδεχόμενο το αγόρι να παίζει μόνο ποδόσφαιρο συμβολίζεται:

   $A\cap B$ $\quad$ $A\cup B$ $\quad$ $A-B$ $\quad$ $B-A$ $\quad$ Α΄ $\quad$ Β΄

ΘΕΜΑ 3. **Για τον υπολογισμό της πιθανότητας ένα ζευγάρι με δύο παιδιά να έχει ένα αγόρι και ένα κορίτσι ένας μαθητής πρότεινε την παρακάτω λύση:**

Ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι το σύνολο $\Omega=\{2A, 2K, 1A1K\}$ αφού τα δυνατά αποτελέσματα είναι 2 αγόρια ή 2 κορίτσια ή 1 αγόρι και ένα κορίτσι. Το ενδεχόμενο η οικογένεια να έχει 1 αγόρι και 1 κορίτσι είναι το $A=\{1A1K\}$. Επειδή τα δυνατά αποτελέσματα είναι 3 και οι ευνοϊκές περιπτώσεις του Α είναι 1, η πιθανότητα εμφάνισης του Α θα είναι: P(A) = $\frac{1}{3}$.

Να εξηγήσετε γιατί η παραπάνω λύση είναι λανθασμένη.

ΘΕΜΑ 4. **Ένας μαθητής έχει διαβάσει μόνο δύο ασκήσεις α, β για το διαγώνισμα των μαθηματικών. Η πιθανότητα να πέσει η άσκηση α είναι P(A) = $\frac{1}{10}$, η πιθανότητα να πέσει η άσκηση β είναι P(B) = $\frac{3}{10}$ και τέλος η πιθανότητα να πέσει μόνο η άσκηση α είναι $\frac{7}{100}$.**

Να βρείτε τις πιθανότητες:

1. Να πέσουν και οι δυο ασκήσεις.
2. Να μην πέσει καμία από τις δυο ασκήσεις.
3. Να πέσει τουλάχιστον μία από τις δύο ασκήσεις.

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

βλέπε σελ. 5, κανόνας 1.

ΘΕΜΑ 2

1. $A \cup B$ **2.** $A \cup B$ **3.** Β΄ **4.** $A \cap B$ **5.** $A - B$

ΘΕΜΑ 3

Ο μαθητής δεν έλαβε υπόψη τη σειρά γέννησης των δύο παιδιών. Λαμβάνοντας υπόψη τη σειρά γέννησης έχουμε τον δειγματοχώρο: $\Omega = \{AA, AK, KA, KK\}$

Το ενδεχόμενο η οικογένεια να έχει 1 αγόρι και 1 κορίτσι είναι το $A = \{AK, KA\}$. Επειδή τα δυνατά αποτελέσματα είναι 4 και οι ευνοϊκές περιπτώσεις του Α είναι 2, η πιθανότητα εμφάνισης του Α θα είναι: $P(A) = \frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 4

Ονομάζουμε Α, Β τα ενδεχόμενα:

Α: «Να πέσει η άσκηση α».

Β: «Να πέσει η άσκηση β».

Τότε το ενδεχόμενο να πέσει μόνο η άσκηση α είναι το Α – Β. Από τα δεδομένα είναι:

$$P(A) = \frac{1}{10}, \quad P(B) = \frac{3}{10} \text{ και } P(A-B) = \frac{7}{100}.$$

1. Το ενδεχόμενο να πέσουν και οι δυο ασκήσεις είναι το $A \cap B$. Έχουμε:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) \quad \text{ή} \quad \frac{7}{100} = \frac{1}{10} - P(A \cap B) \quad \text{ή} \quad P(A \cap B) = \frac{3}{100}.$$

2. Το ενδεχόμενο να μην πέσει καμία από τις δύο ασκήσεις είναι το $(A \cup B)΄$. Έχουμε:

$$P((A \cup B)΄) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{63}{100}.$$

3. Το ενδεχόμενο να πέσει τουλάχιστον μια από τις δυο ασκήσεις είναι το $A \cup B$. Έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} - \frac{3}{100} = \frac{37}{100}.$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 3

ΘΕΜΑ 1. **Να αποδείξετε ότι για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματοχώρου Ω ισχύει:**

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

ΘΕΜΑ 2. **Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).**

1. Η πιθανότητα κάθε ενδεχομένου είναι μη αρνητικός αριθμός. **Σ Λ**
2. Είναι $P(\Omega)=0$. **Σ Λ**
3. Ο προσθετικός νόμος ισχύει για οποιοδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματοχώρου Ω. **Σ Λ**
4. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το αδύνατο ενδεχόμενο είναι 1. **Σ Λ**
5. Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των απλών ενδεχομένων του. **Σ Λ**

ΘΕΜΑ 3. **Δίνεται ο δειγματοχώρος Ω = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} και το ενδεχόμενο του Α = { 1, 3, 5, 7}. Καθένα από τα ενδεχόμενα Α και Α΄ αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.**

1. Να αποδείξετε ότι: $P(1)+P(2)=\frac{1}{4}$.
2. Έστω ότι $P(8) = 2P(7)$.
   i. Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω.
   ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $B = A'\cap \{1, 2, 3, 4\}$.

ΘΕΜΑ 4. **Έστω Α, Β δυο ενδεχόμενα ενός δειγματοχώρου Ω με**

$P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$ και $P(A\cap B) = 0,2$.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

1. $P(A'\cap B')$
2. $P((A-B)\cup(B-A))$

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

βλέπε σελ. 5, κανόνας 2.

ΘΕΜΑ 2

1. Σ **2.** Λ **3.** Σ **4.** Λ **5.** Σ

ΘΕΜΑ 3

1. Είναι $A = \{1, 3, 5, 7\}$ και $A' = \{2, 4, 6, 8\}$.

Επειδή καθένα από τα A και A΄ αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα έχουμε

$$P(1) = P(3) = P(5) = P(7) \quad (1) \qquad \text{και} \qquad P(2) = P(4) = P(6) = P(8) \quad (2)$$

Ακόμα

$$P(1)+ P(2)+ P(3)+ P(4)+ P(5)+ P(6)+ P(7)+ P(8) = 1$$

και λόγω των (1) και (2):

$$4P(1)+ 4P(2) = 1 \quad \text{ή} \quad P(1)+ P(2) = \frac{1}{4} \qquad (3)$$

2.

i. Έχουμε: $P(8) = 2P(7)$ ή $P(2) = 2P(1)$.

Η τελευταία ισότητα και η (3) δίνουν: $P(2) = \frac{2}{12}$ και $P(1) = \frac{1}{12}$

Οπότε

$$P(1) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{12} \quad \text{και} \quad P(2) = P(4) = P(6) = P(8) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

ii. Είναι $B = A' \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 4\}$ και

$$P(B) = P(2)+ P(4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ 4

1. **(δείτε πρώτα την άσκηση 7 σελ.68 του βιβλίου)**

Από τους τύπους De Morgan έχουμε:

$$A' \cap B' = (A \cup B)'$$

και επομένως

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)')$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= P((A \cup B)') \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - (0,5 + 0,3 - 0,2) \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

2. Τα ενδεχόμενα A – B και B – A είναι ξένα μεταξύ τους.

Από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$
\begin{aligned}
P((A-B)\cup(B-A)) &= P(A-B)+P(B-A)\\
&= P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)\\
&= 0{,}5-0{,}2+0{,}3-0{,}2\\
&= 0{,}4
\end{aligned}
$$

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων · ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού · ΙΕΠ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ · Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης · ΕΣΠΑ 2021-2027 · Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή

Τίτλος: Οδηγός επανάληψης-Πιθανότητες

Έκδοση: 1.0 Ημερομηνία: 26.04.2024

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

ΕΜΠΝΕΥΣΤΕΣ/ ΟΜΑΔΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ/ ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Κωνσταντίνος Ρεκούμης
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Λάμπρος Κατσάπας
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Νικόλαος Κουμάντος
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Ελένη Ρεκούμη
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03