ΨΗΦΙΑΚΟ ΥΛΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1

ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΟΣΟΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ ΕΝΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

Να διατυπώνουμε ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.

Παρατηρήσεις

I. Ο ρόλος των ερευνητικών ερωτημάτων στη Στατιστική.

Κύριο αντικείμενο έρευνας της Στατιστικής επιστήμης είναι η **διατύπωση ερευνητικών ερωτημάτων**, η **συλλογή δεδομένων**, η **ανάλυση δεδομένων** και η **ερμηνεία αποτελεσμάτων**. Τα ερευνητικά ερωτήματα αποτελούν την αφετηρία για τη διεξαγωγή στατιστικών ερευνών. Τέτοια ερωτήματα στοχεύουν στην κατανόηση της μεταβλητότητας των δεδομένων και απαιτούν τη συλλογή δεδομένων για να απαντηθούν. Τα δεδομένα συλλέγονται με τρόπο ώστε, όταν αναλυθούν, να παρέχουν μια πορεία για να απαντηθούν τα ερωτήματα, οι αναλύσεις διεξάγονται για να περιγράψουν τα δεδομένα προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα τη μεταβλητότητα που παρουσιάζουν ώστε να απαντηθούν τα ερωτήματα. Στο πλαίσιο αυτό, οι περιγραφικοί δείκτες και οι γραφικές αναπαραστάσεις διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο. Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι **οι περιγραφικοί δείκτες καθώς και οι γραφικές αναπαραστάσεις, απλά μας δίνουν μια συνοπτική παρουσίαση των «τιμών» του δείγματος, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να βγάλουμε κάποια χρήσιμα συμπεράσματα μόνο για τις εν λόγω «τιμές», χωρίς όμως αυτό να σημαίνει πως αναγκαστικά τα ίδια συμπεράσματα διέπουν και τον πληθυσμό. Υπό τη σκοπιά της Επαγωγικής Στατιστικής, χρησιμοποιώντας ελέγχους υποθέσεων καθώς και στατιστικά μοντέλα, είναι εφικτό να βγουν συμπεράσματα για τον υπό μελέτη πληθυσμό.** Τέλος, η ερμηνεία των αποτελεσμάτων αποτελεί εκείνο το στάδιο της διαδικασίας, όπου τα ερωτήματα απαντώνται με βάση τα δεδομένα και τις αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν. Γενικά, τα ερευνητικά ερωτήματα καθορίζουν όλα στάδια μιας στατιστικής έρευνας.

II. Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ μεταβλητών.

Συχνά ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε αν δύο μεταβλητές **συσχετίζονται** ή όπως λέμε αλλιώς, αν υπάρχει **σχέση εξάρτησης** μεταξύ των μεταβλητών. Για παράδειγμα,

μπορεί να θέλουμε να μάθουμε εάν οι προφορικές βαθμολογίες των μαθητών συσχετίζονται με τις γραπτές βαθμολογίες τους, αν η κατανάλωση πρωινού συσχετίζεται με την επίδοση των μαθητών στις εξετάσεις, ή αν η αγάπη κάποιου για την παρακολούθηση αθλητικών
εκδηλώσεων συνδέεται με το να αθλείται. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, έχουμε δύο μεταβλητές και θέλουμε να εξετάσουμε πως σχετίζονται μεταξύ τους.

Γενικά, υπάρχουν δύο τύποι μεταβλητών, οι **κατηγορικές ή ποιοτικές** και οι **ποσοτικές**. Όταν εξετάζουμε τη συσχέτιση μεταξύ μεταβλητών, υπάρχουν τρεις πιθανές καταστάσεις προς εξέταση:

- Μια κατηγορική μεταβλητή και μια ποσοτική μεταβλητή
- Μια κατηγορική μεταβλητή και μια κατηγορική μεταβλητή
- Μια ποσοτική μεταβλητή και μια ποσοτική μεταβλητή

Στην Α' Λυκείου εξετάζουμε μόνο την πρώτη περίπτωση. Μια σχέση εξάρτησης υπάρχει αν οι αλλαγές σε μια μεταβλητή οδηγούν σε συστηματικές αλλαγές στην άλλη μεταβλητή. Για να μελετήσουμε συσχετίσεις και σχέσεις, πρέπει να αναγνωρίσουμε τον τύπο των μεταβλητών που έχουμε και να κατανοήσουμε ποια μεταβλητή είναι η **μεταβλητή απόκρισης** και ποια είναι η **επεξηγηματική μεταβλητή** για την διατυπωμένη ερευνητική ερώτηση. Μια μεταβλητή απόκρισης είναι η μεταβλητή με την οποία γίνονται οι συγκρίσεις. Η επεξηγηματική μεταβλητή είναι η μεταβλητή που υποθέτουμε ότι εξηγεί το αποτέλεσμα της μεταβλητής απόκρισης. Η μεταβλητή απόκρισης και η επεξηγηματική μεταβλητή μπορούν να είναι γενικά είτε κατηγορικές είτε ποσοτικές.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να ερευνήσουμε αν η κατανάλωση πρωινού μπορεί να συσχετίζεται με την επίδοση των μαθητών στις εξετάσεις. Η έρευνα αυτή θα μπορούσε να αναδιατυπωθεί ως μια ερώτηση σύγκρισης χρησιμοποιώντας την εξής ερευνητική ερώτηση:

Διαφέρουν, κατά μέσο όρο, οι βαθμολογίες των μαθητών/τριών που τρώνε πρωινό από αυτές των μαθητών/τριών που δεν τρώνε πρωινό;

Εάν ένας μαθητής ή μαθήτρια τρώει πρωινό ή όχι είναι μια κατηγορική μεταβλητή, ενώ ο βαθμός εξέτασης του μαθητή/τριας είναι μια ποσοτική μεταβλητή. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορεί να υποθέσουμε ότι αν κάποιος τρώει πρωινό, τότε είναι πιθανό να παίρνει κατά μέσο όρο καλύτερο βαθμό σε μια εξέταση. Επομένως, θα λέγαμε ότι η κατανάλωση πρωινού είναι η επεξηγηματική μεταβλητή και ο βαθμός εξέτασης θα ήταν η μεταβλητή απόκρισης. Για να εξετάσουμε εάν οι τιμές μιας μεταβλητής είναι πιο πιθανό να συμβούν με κάποιες τιμές της άλλης μεταβλητής, δημιουργούμε κατάλληλα στατιστικά γραφήματα όπως τα θηκογράμματα που παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2

ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΘΗΚΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

Να κατασκευάζουν πολλαπλά θηκογράμματα, υπολογίζοντας και οριακές τιμές.

Να χρησιμοποιούν τα πολλαπλά θηκογράμματα για να περιγράψουν τις τιμές ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού ενός πληθυσμού.

Παρατηρήσεις

I. Οι μαθητές/τριες έχουν μάθει στο Γυμνάσιο να κατασκευάζουν ένα απλό θηκόγραμμα χρησιμοποιώντας την **περίληψη-σύνοψη πέντε αριθμών** (ελάχιστη παρατήρηση, 1^{ο} τεταρτημόριο, διάμεσος - 2^{ο} τεταρτημόριο, 3^{ο} τεταρτημόριο, μέγιστη παρατήρηση) για συνεχή ποσοτικά δεδομένα. Η νέα γνώση περιλαμβάνει τον υπολογισμό άνω-κάτω φραγμάτων και άνω-κάτω οριακών τιμών καθώς και τον χαρακτηρισμό ορισμένων παρατηρήσεων ως ακραίων-απόμακρων.

II. **Θηκόγραμμα.** Το θηκόγραμμα βοηθάει στο σχηματισμό μιας ολοκληρωμένης εικόνας της κατανομής των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. Τα πολλαπλά θηκογράμματα μας επιτρέπουν να δούμε την κατανομή της ποσοτικής μεταβλητής σε κάθε στάθμη της κατηγορικής μεταβλητής. Χρησιμοποιώντας τα πολλαπλά θηκογράμματα, μπορούμε να παρατηρήσουμε αν στο δείγμα υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών.

III. **Ακραίες τιμές.** Ο χαρακτηρισμός κάποιων παρατηρήσεων ως ακραίων-απόμακρων[1] βασίζεται στον κανόνα που εισήγαγε ο John Tukey[2]. Σύμφωνα με αυτόν τον κανόνα, μια παρατήρηση θεωρείται ακραία αν είναι εκτός του διαστήματος $[Q_1-1{,}5Q,\ Q_3+1{,}5Q]$. Ο κανόνας αυτός χρησιμοποιείτε σε ολόκληρο το βιβλίο για τον χαρακτηρισμό μιας παρατήρησης ως ακραία.

IV. **Τεταρτημόρια-Ενδοτεταρτημοριακό εύρος.** Ο ορισμός των τεταρτημορίων (Q_1), δ (ή Q_2) και (Q_3) ενός δείγματος δίνεται παρακάτω:

— Το **1^{ο} τεταρτημόριο** Q_1 είναι η τιμή εκείνη για την οποία το πολύ το 25% των παρατηρήσεων βρίσκονται αριστερά της και το πολύ το 75% των παρατηρήσεων βρίσκονται δεξιά της.

— Το **2^{ο} τεταρτημόριο -διάμεσος** δ είναι η τιμή εκείνη για την οποία το πολύ το 50% των παρατηρήσεων βρίσκονται αριστερά της και το πολύ το 50% των παρατηρήσεων βρίσκονται δεξιά της.

[1] Οι ακραίες-απόμακρες τιμές καλούνται επίσης και έκτροπες τιμές.

[2] John Wilder Tukey (1915-2000). Αμερικάνος μαθηματικός και στατιστικός.

— Το **3ο τεταρτημόριο** Q_3 είναι η τιμή εκείνη για την οποία το πολύ το 75% των παρατηρήσεων βρίσκονται αριστερά της και το πολύ το 25% των παρατηρήσεων βρίσκονται δεξιά της.

— Το **ενδοτεταρτημοριακό εύρος** Q ορίζεται ως η διαφορά $Q_3 - Q_1$ και εκφράζει το πλάτος του κεντρικού διαστήματος εντός του οποίου περιλαμβάνεται το 50% των παρατηρήσεων.

Για μικρά σύνολα παρατηρήσεων είναι συχνά αδύνατο να διαιρεθεί το σύνολο σε τέσσερις ομάδες, καθεμία από τις οποίες περιέχει ακριβώς το 25% των παρατηρήσεων. Για παράδειγμα, όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n=10$, θα χρειαζόσασταν 2,5 μετρήσεις σε κάθε ομάδα, πράγμα αδύνατο.

Για πρακτικούς λόγους, ο υπολογισμός των τεταρτημορίων γίνεται προσεγγιστικά υπολογίζοντας τις διαμέσους του πρώτου και του δεύτερου μισού (η διάμεσος δ δεν συμπεριλαμβάνεται) των διατεταγμένων παρατηρήσεων, αντίστοιχα.

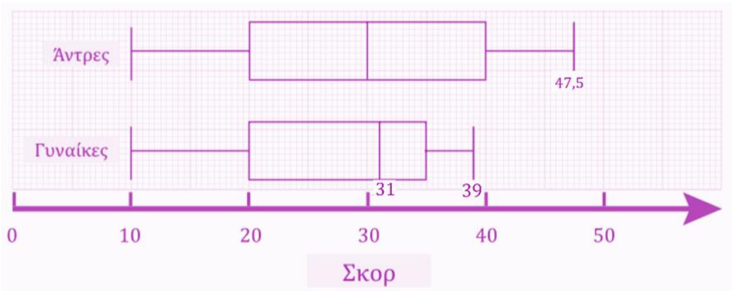
Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω κανόνα υπολογισμού των τεταρτημορίων είναι απλό να δούμε ότι ο παραπάνω ορισμός καταστρατηγείται όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n=5, 9, 13, 17, \ldots$. Γι'αυτές τις τιμές του n ισχύει:

— Το πολύ το 25% των παρατηρήσεων βρίσκονται αριστερά από το Q_1 και τουλάχιστον το 75% των παρατηρήσεων βρίσκονται δεξιά από το Q_1.

— Το πολύ το 25% των παρατηρήσεων βρίσκονται δεξιά από το Q_3 και τουλάχιστον το 75% των παρατηρήσεων βρίσκονται αριστερά από το Q_3.

Δραστηριότητα ενότητας

Στα θηκογράμματα του επόμενου σχήματος, διακρίνονται οι βαθμοί που έλαβαν 30 άντρες και 30 γυναίκες σε ένα τεστ αξιολόγησης για μία συγκεκριμένη θέση εργασίας.



Προσπαθήστε να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις:

α. Ποια είναι η διάμεσος, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των βαθμών των αντρών;

β. Ποια είναι η διάμεσος, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των βαθμών των γυναικών;

γ. Σε τι εξυπηρετεί η ταυτόχρονη αναπαράσταση δύο θηκογραμμάτων;

Λύση

α. Η διάμεσος είναι $\delta_A = 30$, το εύρος $R_A = 47{,}5 - 10 = 37{,}5$ και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος $Q_A = 40 - 20 = 20.$

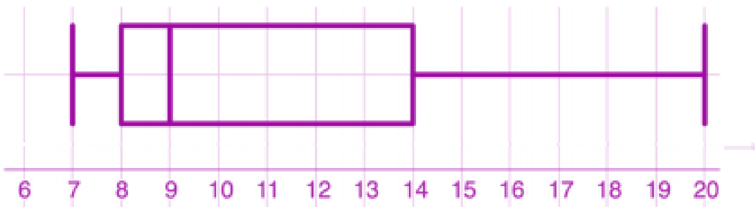
β. Η διάμεσος είναι $\delta_B = 31$, το εύρος $R_B = 39 - 10 = 29$ και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος $Q_B = 35 - 20 = 15.$

γ. Η ταυτόχρονη αναπαράσταση δύο θηκογραμμάτων μας βοηθά να εντοπίσουμε πιθανές σχέσεις εξάρτησης στο δείγμα μεταξύ της κατηγορικής μεταβλητής «Φύλο» και της ποσοτικής μεταβλητής «Βαθμός».

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΥΛΙΚΟ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

1. Ο καθηγητής της Στατιστικής βαθμολόγησε τα γραπτά 20 μαθητών του σε κλίμακα από το 1 μέχρι 20 (ακέραιες τιμές) και βρήκε $Q_1 = 8$ και $Q_3 = 14.$

α. Υπάρχουν ακραίες (απόμακρες) τιμές στις βαθμολογίες του;
β. Τι ποσοστό (περίπου) των βαθμολογιών ανήκουν στο διάστημα [8, 14];
γ. Ο καθηγητής έδωσε τις βαθμολογίες στους μαθητές και τους ζήτησε να κατασκευάσουν το αντίστοιχο θηκόγραμμα, το οποίο φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Να βρείτε:
i. Την μικρότερη και μεγαλύτερη βαθμολογία.
ii. Την διάμεσο της βαθμολογίας.
iii. Υπάρχει μαθητής που έγραψε βαθμό 17;
iv. Πόσοι μαθητές έγραψαν τουλάχιστον 14;
v. Τι είδους ασυμμετρία παρουσιάζουν οι βαθμολογίες;

Υπόδειξη
α. Δεν υπάρχουν επειδή $[Q_1 - 1{,}5Q, Q_3 + 1{,}5Q] = [-1, 23]$.
β. 50%.
γ.i. 7 και 20, αντίστοιχα.
γ.ii. 9.
γ.iii. Δεν μπορεί να απαντηθεί η ερώτηση με βάση τις πληροφορίες που μας παρέχει το θηκόγραμμα.
γ.iv. 5
γ.v. Θετική ασυμμετρία.

2. Οι ερευνητές μέτρησαν το πάχος του δέρματος (σε χιλιοστά), έναν έμμεσο δείκτη του σωματικού λίπους, σε δείγματα δρομέων και μη δρομέων στην ίδια ηλικιακή ομάδα. Τα δεδομένα του δείγματος παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΔΡΟΜΕΙΣ			ΜΗ ΔΡΟΜΕΙΣ			
7.3	6.7	8.7	24.0	19.9	7.50	18.4
3.0	5.1	8.8	28.0	29.4	20.3	19.0
7.8	3.8	6.2	9.30	18.1	22.8	24.2
5.4	6.4	6.3	9.60	19.4	16.3	16.3
3.7	7.5	4.6	12.4	5.20	12.2	15.6

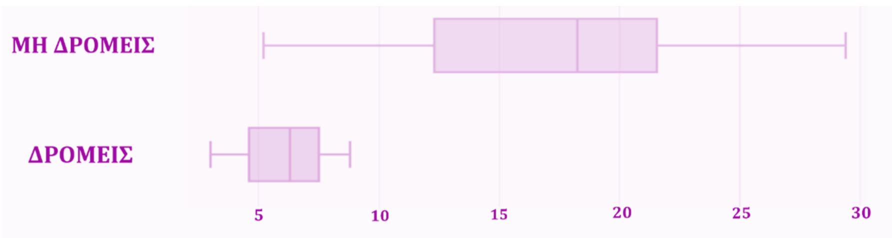
α. Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια ($1^ο$, $2^ο$, $3^ο$) των δύο δειγμάτων.
β. Να υπολογίσετε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των δύο δειγμάτων.
γ. Υπάρχουν ακραίες (απόμακρες) τιμές στα δύο δείγματα;
δ. Να κατασκευάσετε τα θηκογράμματα των δύο δειγμάτων και να τα σχολιάσετε ως προς το σχήμα (συμμετρία-ασυμμετρία).

Υπόδειξη

α. Δρομείς: $Q_1=4{,}6$, $\delta=6{,}3$, $Q_3=7{,}5$. **Μη Δρομείς:** $Q_1=12{,}3$, $\delta=18{,}25$, $Q_3=21{,}55$.

β. Δρομείς: $R=8{,}8-3=5{,}8$, $Q=7{,}5-4{,}6=2{,}9$. **Μη Δρομείς:** $R=29{,}4-5{,}2=24{,}2$, $Q=21{,}55-12{,}3=9{,}25$.

γ. Δεν υπάρχουν.
δ. Τα θηκογράμματα δίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Και τα δύο θηκογράμματα παρουσιάζουν αρνητική ασυμμετρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.1

ΜΕΤΡΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

Να περιγράφουν και να προσδιορίζουν τη διασπορά και την τυπική απόκλιση ποσοτικών δεδομένων χρησιμοποιώντας απόλυτες και τετραγωνικές αποκλίσεις.

Δραστηριότητα ενότητας

Μετρήσαμε τη θερμοκρασία (σε C^o) στο κέντρο μιας πόλης την πρώτη μέρα κάθε μήνα και ώρα 12.00 μ.μ., τους πρώτους πέντε μήνες του έτους 2023 και πήραμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

	Ιαν	Φεβ	Μάρ	Απρ	Μάι
θερμοκρασία	$x_1 = 5C^o$	$x_2 = 8C^o$	$x_3 = 14C^o$	$x_4 = 17C^o$	$x_5 = 26C^o$

α. Να υπολογίσετε τη μέση θερμοκρασία $\bar{x}$ της πόλης για τους παραπάνω μήνες.

β. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

	Ιαν	Φεβ	Μάρ	Απρ	Μάι
x_i	$x_1 = 5C^o$	$x_2 = 8C^o$	$x_3 = 14C^o$	$x_4 = 17C^o$	$x_5 = 26C^o$
$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$					
$(x_i - \bar{x})^2$					

γ. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των τιμών $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$ της δεύτερης γραμμής και των τιμών $(x_i - \bar{x})^2$ της τρίτης γραμμής. Τι περιγράφουν αυτές οι μέσες τιμές;

<u>Λύση</u>

α. Είναι $\bar{x} = \frac{5+8+14+17+26}{5} = \frac{70}{5} = 14C^o$.

β.

	Ιαν	Φεβ	Μάρ	Απρ	Μάι
x_i	$x_1=5C^o$	$x_2=8C^o$	$x_3=14C^o$	$x_4=17C^o$	$x_5=26C^o$
$\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	9	6	0	3	12
$(x_i-\bar{x})^2$	81	36	0	9	144

γ. Μέση τιμή δεύτερης γραμμής:

$$\frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+|x_3-\bar{x}|+|x_4-\bar{x}|+|x_5-\bar{x}|}{5}=\frac{9+6+0+3+12}{5}=\frac{30}{5}=6$$

Μέση τιμή τρίτης γραμμής:

$$\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+(x_4-\bar{x})^2+(x_5-\bar{x})^2}{5}=\frac{81+36+0+9+144}{5}=54$$

Και οι δύο μέσες τιμές περιγράφουν, με διαφορετικό τρόπο, την μέση απόσταση των τιμών $x_1, x_2, \dots, x_5$ από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$.

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΥΛΙΚΟ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

1. Αν η διασπορά ν παρατηρήσεων είναι $s^2=0$, να δείξετε ότι οι παρατηρήσεις είναι ίσες μεταξύ τους και αντιστρόφως.

<u>Υπόδειξη</u>

$$\begin{aligned}\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_\nu-\bar{x})^2}{\nu}=0 &\Leftrightarrow (x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_\nu-\bar{x})^2=0\\ &\Leftrightarrow (x_1-\bar{x})^2=(x_2-\bar{x})^2=\dots=(x_\nu-\bar{x})^2=0\\ &\Leftrightarrow x_1=x_2=\dots=\bar{x}\end{aligned}$$

2. Ένας καθηγητής Μαθηματικών έδωσε το ίδιο διαγώνισμα σε δύο τμήματα, το Τμήμα Α και το Τμήμα Β. Οι βαθμοί των μαθητών/τριών σε κάθε τμήμα παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα:

ΤΜΗΜΑ Α	ΤΜΗΜΑ Β
17, 18, 19, 15, 18, 17, 14, 17, 20, 14, 17, 17, 15, 17, 15, 18, 16, 14, 19, 17, 14	20, 16, 14, 17, 17, 20, 12, 16, 19, 16, 17, 20, 15, 17, 12, 16, 17, 11, 20, 17, 19

Ο καθηγητής πληροφόρησε τα παιδια των δύο τμημάτων ότι η μέση τιμή των βαθμών είναι ίδια και στα δύο τμήματα.

Πολλοί μαθητές και μαθήτριες σχολίασαν:

"Αφού οι βαθμοί των δύο τμημάτων έχουν την ίδια μέση τιμή, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι επιδόσεις των μαθητών/τριών των δύο τμημάτων είναι εξίσου καλές."

Συμφωνείτε με αυτή την άποψη;

<u>Λύση</u>

Για να έχουμε καλύτερη εικόνα των επιδόσεων των μαθητών/τριών των δύο τμημάτων, πρέπει να λάβουμε υπόψη τη μεταβλητότητα των βαθμών σε κάθε τμήμα. Ένα μέτρο μεταβλητότητας είναι η τυπική απόκλιση, η οποία δείχνει πόσο απέχουν, κατά μέσο όρο, οι βαθμοί από τη μέση τιμή τους. Εάν οι βαθμοί ενός τμήματος έχουν μεγάλη τυπική απόκλιση, αυτό σημαίνει ότι οι επιδόσεις των μαθητών/τριών του διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους, ενώ αν η τυπική απόκλιση είναι μικρή, οι βαθμοί είναι πιο συγκεντρωμένοι γύρω από τη μέση τιμή τους, κάτι που δείχνει ότι οι μαθητές/τριες αυτού του τμήματος είχαν σχετικά όμοιες επιδόσεις στο συγκεκριμένο διαγώνισμα, χωρίς μεγάλες αποκλίσεις από τη μέση τιμή.

Υπολογίζοντας τις τυπικές αποκλίσεις των βαθμών των μαθητών/τριών των δύο τμημάτων βρίσκουμε:

$$s_A \approx 1{,}76 \quad \text{και} \quad s_B \approx 2{,}61$$

Παρατηρούμε ότι $s_A < s_B$. Αυτό σημαίνει ότι οι βαθμοί των μαθητών/τριών του τμήματος Α είναι πιο συγκεντρωμένοι γύρω από τη μέση τιμή τους σε σχέση με αυτούς του τμήματος Β. Μπορούμε να πούμε ότι το Τμήμα Α είναι "καλύτερο" σε σχέση με το Τμήμα Β, όσον αφορά τη "σταθερότητα" των επιδόσεων.

3. Ένας οδηγός Formula I έκανε σε 5 πίστες το γύρο σε χρόνους (σε sec)

58, 12, 58, 15, 58, 41, 58, 60, 57, 22

α. Να βρείτε το μέσο χρόνο των γύρων.

β. Να βρείτε τη μέση τετραγωνική απόκλιση, τη διασπορά και την τυπική απόκλιση των χρόνων.

<u>Λύση</u>

α. $\bar{x} = \dfrac{58+12+58+15+58+41+58+60+57+22}{10} = 43{,}9$ sec

β. $\text{MAD} = \dfrac{|58-43{,}9|+|12-43{,}9|+|58-43{,}9|+\ldots+|22-43{,}9|}{10} = 17{,}12$ sec

$s^2 = \dfrac{(58-43{,}9)^2+(12-43{,}9)^2+(58-43{,}9)^2+\ldots+(22-43{,}9)^2}{10} = 356{,}69$ sec^2

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{356{,}69} \approx 18{,}89$ sec

4. **α.** Να βρείτε την μέση τιμή, τη μέση τετραγωνική απόκλιση, τη διασπορά και την τυπική απόκλιση των αριθμών: 1, 2, 3, 4, 5.

β. Ομοίως των αριθμών

i. 3, 4, 5, 6, 7

ii. 3, 6, 9, 12, 15

Λύση

α. Είναι $$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$$

$$MAD=\frac{|1-3|+|2-3|+|3-3|+|4-3|+|5-3|}{5}=1{,}2$$

$$s^2=\frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}=2$$

$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{2}$$

β. i. Οι αριθμοί 3, 4, 5, 6, 7 προκύπτουν αν προσθέσουμε στους αριθμούς του (α) ερωτήματος το c = 2. Επομένως, έχουν μέση τιμή $\bar{x}+2=5$ και ίδια MAD, s^2 και s με τους αριθμούς του ερωτήματος (α).

ii. Οι αριθμοί 3, 6, 9, 12, 15 προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς του (α) ερωτήματος επί 3. Έτσι, έχουν μέση τιμή $3\bar{x}=9$, $MAD=3\cdot 1{,}2=3{,}6$, $s^2=3^2\cdot 2=18$ και $s=3\sqrt{2}$.

5. Οι παρατηρήσεις x_1, x_2, …, x_ν έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s. Να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων που προκύπτουν αν τις αυξήσουμε κατά 10%. Ομοίως αν τις ελαττώσουμε κατά 10%.

Λύση

Αν η τιμή x_i αυξηθεί κατά 10% γίνεται

$$y_i=x_i+\frac{10}{100}x_i=1{,}1x_i,\quad i = 1, 2, \ldots, \nu$$

Έτσι, είναι $\bar{y}=1{,}1\bar{x}$ και $s_y = 1{,}1s$.

Ομοίως, αν οι παρατηρήσεις x_i μειωθούν κατά 10% γίνονται

$$z_i=x_i-\frac{10}{100}x_i=0{,}9x_i,\quad i = 1, 2, \ldots, \nu$$

οπότε $\bar{z}=0{,}9\bar{x}$ και $s_z = 0{,}9s$.

6. Σε μια κλινική διαχείρισης βάρους, οι ασθενείς ακολουθούν ένα πρόγραμμα διατροφής και άσκησης. Γνωρίζουμε ότι η τυπική απόκλιση του βάρους των ασθενών κατά την έναρξη του προγράμματος είναι 8 κιλά, καθώς επίσης ότι μετά από ένα μήνα, λόγω της διατροφής και της άσκησης, το συνολικό βάρος όλων των ασθενών έχει μειωθεί κατά 2%. Ποια υπόθεση πρέπει να διατυπώσουμε ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση του βάρους των ασθενών μετά από ένα μήνα;

Λύση

Πρέπει να υποθέσουμε ότι όλοι οι ασθενείς χάνουν το ίδιο ποσοστό του βάρους τους (2%), ανεξάρτητα από το αρχικό τους βάρος. Υπό αυτή την προϋπόθεση, μετά από ένα μήνα, κάθε ασθενής έχει χάσει το 2% του βάρους του. Συνεπώς, το βάρος κάθε ασθενούς μετά από ένα μήνα θα αντιστοιχεί στο:

100% – 2% = 98% του αρχικού του βάρους

Αν η αρχική τυπική απόκλιση των βαρών των ασθενών είναι s = 8 κιλά τότε μετά τη μείωση του βάρους κατά 2%, η νέα τυπική απόκλιση, έστω s', θα είναι:

s' = 98% s = 7,84 κιλά.

7. Σε ένα κουτί υπάρχουν 4 τύποι μολυβιών με διαφορετικές σκληρότητες: 1, 2, 3 και 4. Η αναλογία των μολυβιών στο κουτί είναι:

- 20% με σκληρότητα 1
- 10% με σκληρότητα 2
- 30% με σκληρότητα 3
- 40% με σκληρότητα 4.

Να βρείτε:

Τη μέση τιμή, τη διάμεσο και τη διασπορά της σκληρότητας των μολυβιών αν στο κουτί:

α. υπάρχουν 10 μολύβια,

β. υπάρχει άγνωστος αριθμός μολυβιών.

Τι παρατηρείτε;

Λύση

α. Αρχικά, θα υπολογίσουμε το πλήθος των μολυβιών κάθε τύπου.

- το 20% των 10 μολυβιών είναι 2 μολύβια. Άρα, έχουμε 2 μολύβια με σκληρότητα 1
- το 10% των 10 μολυβιών είναι 1 μολύβι. Άρα, έχουμε 1 μολύβι με σκληρότητα 2
- το 30% των 10 μολυβιών είναι 3 μολύβια. Άρα, έχουμε 3 μολύβια με σκληρότητα 3
- το 40% των 10 μολυβιών είναι 4 μολύβια. Άρα, έχουμε 4 μολύβια με σκληρότητα 4

Μέση τιμή: $\bar{x} = \dfrac{2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot 4}{10} = 2,9$

Διάμεσος: Η διάταξη των παρατηρήσεων σε αύξουσα σειρά είναι:

1 1 2 3 3 3 4 4 4 4

Η διάμεσος είναι η μέση τιμή της 5ης και 6ης παρατήρησης. Αυτές είναι οι τιμές 3 και 3, άρα η διάμεσος είναι ο αριθμός 3.

Διασπορά: $s^2 = \dfrac{2\cdot(1-2,9)^2 + 1\cdot(2-2,9)^2 + 3\cdot(3-2,9)^2 + 4\cdot(4-2,9)^2}{10} = 1,29$

β. Έστω Ν το πλήθος των μολυβιών στο κουτί. Τότε έχουμε:

- $20\% \cdot N = 0,2N$ μολύβια με σκληρότητα 1
- $10\% \cdot N = 0,1N$ μολύβια με σκληρότητα 2
- $30\% \cdot N = 0,3N$ μολύβια με σκληρότητα 3
- $40\% \cdot N = 0,4N$ μολύβια με σκληρότητα 4

Μέση τιμή: $\bar{x} = \dfrac{0,2N \cdot 1 + 0,1N \cdot 2 + 0,3N \cdot 3 + 0,4N \cdot 4}{N} = 0,2 \cdot 1 + 0,1 \cdot 2 + 0,3 \cdot 3 + 0,4 \cdot 4 = 2,9$

Διάμεσος: Η διάταξη των παρατηρήσεων σε αύξουσα σειρά είναι:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{1\,1 \ldots 1}_{20\% \cdot N}\ \underbrace{2\,2 \ldots 2}_{10\% \cdot N}}_{30\% \cdot N}\ \underbrace{3\,3 \ldots 3}_{30\% \cdot N}}_{60\% \cdot N}\ \underbrace{4\,4 \ldots 4}_{40\% \cdot N}$$

Η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει το σύνολο των διατεταγμένων παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη. Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι:

- Το 20% των παρατηρήσεων αντιστοιχεί στο 1.
- Το επόμενο 10% (από το 20% έως το 30%) αντιστοιχεί στο 2.
- Το επόμενο 30% των παρατηρήσεων (από το 30% έως το 60%) αντιστοιχεί στο 3.
- Το υπόλοιπο 40% (από το 60% έως το 100%) αντιστοιχεί στο 4.

Το σημείο που αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα από το 30% έως το 60%. Επειδή το συγκεκριμένο διάστημα καλύπτεται από τις παρατηρήσεις με αριθμό 3, η διάμεσος είναι ο αριθμός 3.

Διασπορά:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{0,2N \cdot (1-2,9)^2 + 0,1N \cdot (2-2,9)^2 + 0,3N \cdot (3-2,9)^2 + 0,4N \cdot (4-2,9)^2}{N} \\ &= 0,2 \cdot (1-2,9)^2 + 0,1 \cdot (2-2,9)^2 + 0,3 \cdot (3-2,9)^2 + 0,4 \cdot (4-2,9)^2 \\ &= 1,29 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή, η διάμεσος και η διασπορά είναι ίδιες και στις δύο περιπτώσεις (10 μολύβια και N μολύβια). Οι αναλογίες (20%, 10%, 30%, 40%) παραμένουν σταθερές, με αποτέλεσμα τα τρία στατιστικά μέτρα να μην επηρεάζονται από το μέγεθος του δείγματος.

8. Οκτώ άτομα έγραψαν ένα διαγώνισμα στο οποίο οι δυνατοί βαθμοί είναι τρεις: 1, 2 ή 3.

α. Γνωρίζετε ότι ακριβώς δύο άτομα έγραψαν 1 και ότι η κατανομή των βαθμών είναι συμμετρική. Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά των βαθμών;

β. Δεδομένου ότι η μέση τιμή των βαθμών είναι 3, ποια είναι η διασπορά τους;

<u>Υπόδειξη</u>

α. Οι βαθμοί είναι: 1 1 2 2 2 2 3 3

Η μέση τιμή είναι 2 και η διασπορά 0,5.

β. Οι βαθμοί είναι: 3 3 3 3 3 3 3 3

Η διασπορά τους είναι 0.

ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΠΟΣΟΤΙΚΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΙΣ ΣΤΑΘΜΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

Να περιγράφουν και να προσδιορίζουν τη μέση τιμή και τη διάμεσο, καθώς και τη διασπορά, την τυπική απόκλιση και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των τιμών ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΥΛΙΚΟ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

1. Μετρήσαμε τους παλμούς (ανά λεπτό) ενός δείγματος ανδρών και γυναικών σε ένα εμπορικό κέντρο και πήραμε τον παρακάτω πίνακα δεδομένων.

ΑΝΤΡΕΣ	ΓΥΝΑΙΚΕΣ
68 72 75 73 81	82 61 79 77 75
77 69 68 79 83	68 86 81 72 77
65 59 60 72 70	78 81 90 83 73

α. Βρείτε τη διάμεσο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παλμών των δύο φύλων.

β. Βρείτε τη μέση τιμή, τη διασπορά και την τυπική απόκλιση των παλμών των δύο φύλων.

γ. Παρατηρείτε διαφορές στους παλμούς μεταξύ ανδρών και γυναικών;

<u>Λύση</u>

α. Τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά είναι:

ΑΝΤΡΕΣ: 59, 60, 65, 68, 68, 69, 70, 72, 72, 73, 75, 77, 79, 81, 83

ΓΥΝΑΙΚΕΣ: 61, 68, 72, 73, 75, 77, 77, 78, 79, 81, 81, 82, 83, 86, 90

Η διάμεσος για τους άντρες είναι: $\delta_A = 72$.

Η διάμεσος για τις γυναίκες είναι: $\delta_\Gamma = 78$.

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος για τους άντρες είναι: $Q_A = 77 - 68 = 9$.

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος για τις γυναίκες είναι: $Q_\Gamma = 82 - 73 = 9$.

β. Η μέση τιμή για τους άντρες είναι: $\bar{x}_A = 71{,}4$.

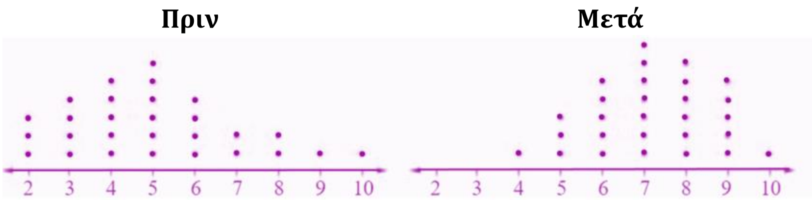
Η μέση τιμή για τις γυναίκες είναι: $\bar{x}_\Gamma = 77{,}53$.

Η διασπορά και η τυπική απόκλιση για τους άντρες είναι αντίστοιχα: $s_A^2 = 45{,}84,\ s_A \approx 6{,}77$.

Η διασπορά και η τυπική απόκλιση για τις γυναίκες είναι αντίστοιχα: $s_\Gamma^2 \approx 48{,}38,\ s_\Gamma \approx 6{,}96$.

γ. Παρατηρούμε σημαντική διαφορά στα μέτρα θέσης (διάμεσο και μέση τιμή) στα δύο φύλα. Οι άντρες παρουσιάζουν, κατά μέσο όρο, 6 παλμούς λιγότερους από τις γυναίκες. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και η τυπική απόκλιση κυμαίνονται στα ίδια επίπεδα για τα δύο φύλα.

2. Τα παρακάτω σημειογράμματα δείχνουν τα αποτελέσματα ενός τεστ μιας τάξης πριν και μετά τη χρήση μιας ιστοσελίδας με εκπαιδευτικό υλικό.



Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

α. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αυξήθηκαν.

β. Η μέση τιμή αυξήθηκε και η τυπική απόκλιση μειώθηκε.

γ. Η μέση τιμή μειώθηκε και η τυπική απόκλιση αυξήθηκε.

δ. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση μειώθηκαν.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

3. Οι χρόνοι δύο κοριτσιών, της Άννας και της Δήμητρας, για τα δοκιμαστικά του αγωνίσματος των 100 μέτρων τρεξίματος δίνονται παρακάτω:

ΑΝΝΑ		ΔΗΜΗΤΡΑ	
13,0	13,5	14,2	13,2
14,2	13,7	15,1	13,8
13,2	14,7	14,2	15,2
13,5	14,3	13,9	13,5

α. Βρείτε τη διάμεσο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των χρόνων των δύο κοριτσιών.

β. Βρείτε τη μέση τιμή, τη διασπορά και την τυπική απόκλιση των χρόνων των δύο κοριτσιών.

γ. Ποιο από τα δύο κορίτσια πετυχαίνει, κατά μέσο όρο, μικρότερους χρόνους; Ποιο παρουσίασε μεγαλύτερη συνέπεια ως προς τους χρόνους τρεξίματος;

<u>Λύση</u>

α. Τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά είναι:

ΑΝΝΑ:	13,0,	13,2,	13,5,	13,5,	13,7,	14,2,	14,3,	14,7
ΔΗΜΗΤΡΑ:	13,2,	13,5,	13,8,	13,9,	14,2,	14,2,	15,1,	15,2

Η διάμεσος για την Άννα είναι: $\delta_A = \dfrac{13,5+13,7}{2} = 13,6.$

Η διάμεσος για τη Δήμητρα είναι: $\delta_\Delta = \dfrac{13,9+14,2}{2} = 14,05.$

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος για την Άννα είναι: $Q_A = 14,25 - 13,35 = 0,9.$

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος για τη Δήμητρα είναι: $Q_\Delta = 14,65 - 13,65 = 1.$

β. Η μέση τιμή για την Άννα είναι: $\overline{x}_A \approx 13,76.$

Η μέση τιμή για τη Δήμητρα είναι: $\overline{x}_\Delta \approx 14,14.$

Η διασπορά και η τυπική απόκλιση για την Άννα είναι αντίστοιχα: $s_A^2 \approx 0,3,\ s_A \approx 0,55.$

Η διασπορά και η τυπική απόκλιση για τη Δήμητρα είναι αντίστοιχα: $s_\Delta^2 \approx 0,44,\ s_\Delta \approx 0,66.$

γ. Παρατηρούμε ότι η Άννα πετυχαίνει, κατά μέσο όρο, μικρότερους χρόνους από τη Δήμητρα στα 100 μέτρα αφού η μέση τιμή και η διάμεσος των χρόνων της είναι μικρότερες αυτών της Δήμητρας. Επίσης, συγκρίνοντας το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση των χρόνων των δύο κοριτσιών βλέπουμε ότι οι χρόνοι της Άννας παρουσιάζουν μικρότερη μεταβλητότητα. Επομένως, η Άννα παρουσιάζει μεγαλύτερη συνέπεια ως προς τους χρόνους τρεξίματος από τη Δήμητρα.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.3

ΜΕΤΡΑ ΣΧΕΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

Να μάθουν την έννοια του συντελεστή μεταβλητότητας και τη χρησιμότητά του στη σύγκριση της μεταβλητότητας ομάδων τιμών με διαφορετικούς μέσους ή με διαφορετική μονάδα μέτρησης.

Να προσδιορίζουν και να περιγράφουμε τον συντελεστή μεταβλητότητας ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΥΛΙΚΟ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

1. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας του δείγματος 2, 4, 6, 8, 10. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

Λύση

Για τη μέση τιμή έχουμε: $\bar{x} = \dfrac{2+4+6+8+10}{5} = 6.$

Για τη διασπορά έχουμε: $s^2 = \dfrac{(2-6)^2+(4-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2+(10-6)^2}{5} = 8.$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι: $CV = \dfrac{s}{|\bar{x}|} = \dfrac{\sqrt{8}}{6} \approx 0{,}47 = 47\%.$

Επειδή CV > 10%, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

2. Πώς θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβλητότητας CV ενός συνόλου παρατηρήσεων με μέση τιμή $\bar{x} > 0$ και τυπική απόκλιση $s > 0$ αν

α. σε κάθε παρατήρηση προσθέσουμε τον ίδιο θετικό αριθμό α;

β. κάθε παρατήρηση την πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό α;

Λύση

Ο CV του συνόλου είναι: $CV = \dfrac{s}{|\bar{x}|} = \dfrac{s}{\bar{x}}$

α. Με την πρόσθεση σε κάθε παρατήρηση του αριθμού α η μέση τιμή γίνεται: $\bar{x}' = \bar{x} + \alpha$ ενώ η τυπική απόκλιση παραμένει ίδια. Άρα ο συντελεστής μεταβλητότητας θα είναι:

$$CV' = \frac{s}{\bar{x}+\alpha} < \frac{s}{\bar{x}} = CV$$

δηλαδή θα ελαττωθεί.

β. Έπειτα από τον πολλαπλασιασμό κάθε παρατήρησης με τον μη μηδενικό αριθμού α η μέση τιμή γίνεται: $\bar{x}' = \alpha\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση $s' = |\alpha| s$. Άρα ο συντελεστής μεταβλητότητας θα είναι:

$$CV'' = \frac{|\alpha| s}{|\alpha\bar{x}|} = \frac{|\alpha| s}{|\alpha|\bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}} = CV$$

δηλαδή θα παραμένει ίδιος.

3. Η μέση τιμή και τυπική απόκλιση των πόντων τριών παιδιών, του Βαγγέλη, της Χριστίνας και του Πέτρου, σε ένα παιχνίδι τράπουλας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	Βαγγέλης	Χριστίνα	Πέτρος
Μέσος όρος βαθμών	$\bar{x}_1 = 50$	$\bar{x}_2 = 110$	$\bar{x}_3 = 80$
Τυπική απόκλιση βαθμών	$s_1 = 8$	$s_2 = 11$	$s_3 = 10$

α. Ποιο θεωρείτε ότι είναι το καταλληλότερο μέτρο για να συγκρίνουμε τη μεταβλητότητα των πόντων των τριών παικτών;

β. Να κατατάξετε τα τρία παιδιά σε σειρά ξεκινώντας από το παιδί που παρουσίασε μεγαλύτερη ομοιογένεια στους πόντους του.

Λύση

α. Οι τρεις μέσες τιμές διαφέρουν αρκετά. Επομένως, το καταλληλότερο μέτρο για να συγκρίνουμε τη μεταβλητότητα των πόντων των τριών παικτών είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας.

β. Υπολογίζουμε τους συντελεστές μεταβλητότητας των πόντων των τριών παιδιών. Έχουμε:

Βαγγέλης: $CV_1 = \frac{s_1}{\bar{x}_1} = \frac{8}{50} = 16\%$

Χριστίνα: $CV_2 = \frac{s_2}{\bar{x}_2} = \frac{11}{110} = 10\%$

Πέτρος: $CV_3 = \frac{s_3}{\bar{x}_3} = \frac{10}{80} = 12{,}5\%$

Συμπεραίνουμε ότι η Χριστίνα παρουσίασε μεγαλύτερη ομοιογένεια στους πόντους της. Ακολουθεί ο Πέτρος και Βαγγέλης με αυτή τη σειρά.

4. Οι σημερινές ηλικίες μιας παρέας φίλων έχουν συντελεστή μεταβλητότητας $CV_1 = 6\%$. Πριν από 10 έτη ο συντελεστής μεταβλητότητας ήταν $CV_2 = 20\%$.
α. Να βρεθεί η μέση σημερινή ηλικία τους.
β. Πριν πόσα περίπου χρόνια από σήμερα οι ηλικίες τους είχαν συντελεστή μεταβλητότητας 10%;

Λύση

α. Αν συμβολίσουμε $\bar{x}_1$ τη σημερινή μέση ηλικία και s_1 την τυπική απόκλιση των σημερινών ηλικιών τότε έχουμε: $CV_1 = \frac{s_1}{\bar{x}_1}$ ή $\frac{s_1}{\bar{x}_1} = 6\%$.

Αν συμβολίσουμε $\bar{x}_2$ τη μέση ηλικία πριν 10 έτη και s_2 την τυπική απόκλιση των ηλικιών πριν 10 έτη τότε έχουμε: $CV_2 = \frac{s_2}{\bar{x}_2}$ ή $\frac{s_2}{\bar{x}_2} = 20\%$. Ισχύει: $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 - 10$ και $s_2 = s_1$.

Άρα $\frac{s_1}{\bar{x}_1} = 6\%$ και $\frac{s_1}{\bar{x}_1 - 10} = 20\%$. Από αυτές τις σχέσεις βρίσκουμε:

$$s_1 = 6\%\bar{x}_1 \quad \text{και} \quad s_1 = 20\%(\bar{x}_1 - 10)$$

Επομένως

$$6\%\bar{x}_1 = 20\%(\bar{x}_1 - 10) \text{ ή } \bar{x}_1 = \frac{100}{7} \approx 14{,}29.$$

β. Έστω ότι για πρώτη φορά οι ηλικίες τους είχαν συντελεστή μεταβλητότητας 10% πριν από α χρόνια. Τότε:

$$\frac{s_1}{\bar{x}_1} = 6\% \quad \text{και} \quad \frac{s_1}{\bar{x}_1 - \alpha} = 10\%.$$

Από αυτές τις σχέσεις βρίσκουμε: $s_1 = 6\% \cdot 14{,}29 \approx 0{,}86$ και $s_1 = 10\%(14{,}29 - \alpha)$.
Επομένως $0{,}86 = 10\%(14{,}29 - \alpha)$ ή α ≈ 5,69 χρόνια.

5. Έστω το σύνολο παρατηρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ με μέση τιμή $\bar{x} = 4$ και συντελεστή μεταβλητότητας $CV = 0{,}25$. Να αποδείξετε ότι:

α. Η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων είναι $s = 1$.
β. Υπάρχει μία, τουλάχιστον, παρατήρηση x_κ του συνόλου, με $3 \le x_\kappa \le 5$.

Λύση

α. Έχουμε: $CV = \frac{s}{\bar{x}}$ ή $s = CV \cdot \bar{x} = 0{,}25 \cdot 4 = 1$.

β. Ας υποθέσουμε ότι κάθε παρατήρηση x_i είναι μικρότερη του 3 ή μεγαλύτερη του 5:

$$x_i < 3 \quad \text{ή} \quad x_i > 5$$

Αν $x_i < 3$ τότε $x_i - \bar{x} < -1$ και επομένως $\left(x_i - \bar{x}\right)^2 > 1$.

Αν $x_i > 5$ τότε $x_i - \bar{x} > 1$ και επομένως $\left(x_i - \bar{x}\right)^2 > 1$.

Η τυπική απόκλιση τότε θα είναι

$$s = \sqrt{\frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \dots + \left(x_\nu - \bar{x}\right)^2}{\nu}} > \sqrt{\frac{1 + 1 + \dots + 1}{\nu}} = \sqrt{\frac{\nu}{\nu}} = 1.$$

Όμως το τελευταίο αποτέλεσμα συνιστά αντίφαση αφού στο (α) ερώτημα αποδείξαμε ότι s = 1. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι υπάρχει μία, τουλάχιστον, παρατήρηση x_κ του συνόλου, με $3 \le x_\kappa \le 5$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.4

ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΤΑ ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

Να μάθουν πως επηρεάζονται τα μέτρα θέσης και τα μέτρα μεταβλητότητας από την ύπαρξη ακραίων τιμών.
Να επιλέγουν κατάλληλα μέτρα θέσης και μέτρα μεταβλητότητας ποσοτικών δεδομένων ανάλογα με την ύπαρξη ακραίων τιμών.

Δραστηριότητα ενότητας

Δραστηριότητα

Οι κριτικές σε κλίμακα από το 1 έως το 10 μιας ξενοδοχειακής μονάδας από 10 πελάτες της είναι:

$$1,\ 7,\ 7,\ 7,\ 8,\ 8,\ 8,\ 9,\ 9,\ 10$$

α. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων.

β. Να βρείτε τη διασπορά, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων.

γ. Υπάρχουν ακραίες τιμές στις παραπάνω παρατηρήσεις;

δ. Ο πελάτης που βαθμολόγησε τη μονάδα με 1 απέσυρε την κριτική του γιατί έκανε λάθος. Υπάρχουν ακραίες τιμές στις νέες παρατηρήσεις;

ε. Να υπολογίσετε τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας των ερωτημάτων (α) και (β) για τα δεδομένα που απομένουν μετά την απόσυρση της κριτικής. Τι παρατηρείτε;

<u>Λύση</u>

α. Μέση τιμή: $\bar{x}=\dfrac{1+7+7+7+8+8+8+9+9+10}{10}=7{,}4$

Τα δεδομένα είναι διατεταγμένα σε αύξουσα σειρά. Επομένως $\delta=\dfrac{8+8}{2}=8$.

β. Βρίσκουμε: $\min=1\ Q_1=7,\ Q_3=9,\ \max=10$.

Επομένως $R=10-1=9$ και $Q=9-7=2$. Επίσης, $s^2=5{,}44$.

γ. Τα δεδομένα περιέχουν μία ακραία τιμή, την 1. Πράγματι, είναι

$$[Q_1-1{,}5Q, Q_3+1{,}5Q]=[4,12]$$

και το 1 είναι η μοναδική τιμή που δεν ανήκει στο παραπάνω διάστημα.

δ. Μετά την απόσυρση της κριτικής οι νέες παρατηρήσεις είναι: $7,\ 7,\ 7,\ 8,\ 8,\ 8,\ 9,\ 9,\ 10$

Από αυτές βρίσκουμε: $\delta'=8,\ Q_1=\frac{7+7}{2}=7,\ Q_3=\frac{9+9}{2}=9,\ Q=9-7=2.$

Επίσης, $[Q_1-1{,}5Q, Q_3+1{,}5Q]=[4,12]$.

Παρατηρούμε ότι όλες οι νέες παρατηρήσεις βρίσκονται στο διάστημα $[4,12]$ και επομένως δεν υπάρχουν ακραίες τιμές.

ε. Βρίσκουμε ότι τα νέα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας είναι τα παρακάτω:

$$\bar{x}=\frac{7+7+7+8+8+8+9+9+10}{9}\approx 8{,}11,\qquad \delta=8,$$

$$R=10-7=3,\qquad Q=9-7=2,\qquad s^2\approx 0{,}99.$$

Παρατηρούμε ότι μετά την απόσυρση της κριτικής η μέση τιμή ελαττώθηκε σημαντικά σε αντίθεση με τη διάμεσο η οποία παρέμεινε ίδια. Επίσης, το εύρος και η διασπορά μειώθηκαν σημαντικά ενώ το ενδοτεταρτημοριακό εύρος παρέμεινε ίδιο.

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΥΛΙΚΟ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

1. Ο αριθμός των πόντων που σημειώθηκαν ανά αγώνα ράγκμπι από μια ομάδα κατά τη διάρκεια της σεζόν 2013 ήταν:

17, 31, 6, 26, 30, 23, 29, 25, 19, 72, 21, 28, 22, 28, 12

α. Να βρείτε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των πόντων.

β. Ποιο από τα δύο είναι το καλύτερο μέτρο μεταβλητότητας των πόντων που σημείωσε η ομάδα, το εύρος ή το ενδοτεταρτημοριακό εύρος;

<u>Λύση</u>

α. Πρώτα διατάσσουμε σε αύξουσα σειρά του πόντους:

6, 12, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 28, 29, 30, 31, 72

Βρίσκουμε: $\min=6,\ Q_1=19,\ \delta=25,\ Q_3=29,\ \max=72.$

Επομένως $R=72-6=66$ και $Q=29-19=10.$

β. Τα δεδομένα περιέχουν μία ακραία τιμή, την 72. Πράγματι, είναι

$$[Q_1-1{,}5Q, Q_3+1{,}5Q]=[4,44]$$

και η μοναδική τιμή που δεν περιέχεται σε αυτό το διάστημα είναι η τιμή 72. Καταλληλότερο μέτρο μεταβλητότητας για να περιγράψει τα δεδομένα είναι το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, το οποίο δεν επηρεάζεται από την ακραία τιμή όσο το εύρος.

2. Παρακάτω ο αριθμός των αναψυκτικών που πίνουν, κατά μέσο όρο, σε μία εβδομάδα 6 άνθρωποι:

0, 2, 5, 3, 10, 4

α. Να υπολογίσετε:

- τη μέση τιμή και τη διάμεσο των δεδομένων.
- το εύρος, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση των δεδομένων.

β. Υπάρχουν ακραίες τιμές στα παραπάνω δεδομένα;

γ. Αφού απομακρύνετε τις ακραίες τιμές να υπολογίσετε:

- τη μέση τιμή και τη διάμεσο των δεδομένων.
- το εύρος, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και την τυπική απόκλιση των δεδομένων.

δ. Ποιο μέτρο θέσης και ποιο μέτρο μεταβλητότητας θεωρείτε κατάλληλο για να περιγράψει τα δεδομένα πριν την απομάκρυνση των ακραίων τιμών;

<u>Λύση</u>

α. Μέση τιμή: $\bar{x}=\dfrac{0+2+5+3+10+4}{6}=\dfrac{24}{6}=4.$

Τα διατεταγμένα σε αύξουσα σειρά δεδομένα είναι: 0, 2, 3, 4, 5, 10.

Διάμεσος: $\delta=3{,}5$

Επιπλέον βρίσκουμε: $\min=0,\ Q_1=2,\ Q_3=5,\ \max=10.$

Εύρος: $R=10-0=10$ Ενδοτεταρτημοριακό εύρος: $Q=5-2=3$

Τυπική απόκλιση:

$$s=\sqrt{\frac{(0-4)^2+(2-4)^2+(5-4)^2+(3-4)^2+(10-4)^2+(4-4)^2}{6}}=\sqrt{\frac{16+4+1+1+36+0}{6}}\approx 3{,}11.$$

β. Είναι $[Q_1-1{,}5Q, Q_3+1{,}5Q]=[-2{,}5, 9{,}5]$. Τα δεδομένα περιέχουν μία ακραία τιμή, την τιμή 10.

γ. Αφαιρώντας την τιμή 10 βρίσκουμε: $\bar{x}=2{,}8$ και $\delta=3$.

Επίσης, $R=5-0=5,\ Q=4{,}5-1=3{,}5$ και $s\approx 1{,}72.$

δ. Βασιζόμενοι στις απαντήσεις των ερωτημάτων (α) και (γ) συμπεραίνουμε ότι καταλληλότερο μέτρο θέσης για να περιγράψει τα δεδομένα πριν την απομάκρυνση της ακραίας τιμής είναι η διάμεσος αφού δεν επηρεάστηκε από την απομάκρυνση της ακραίας τιμής όσο η μέση τιμή. Επίσης, καταλληλότερο μέτρο μεταβλητότητας για να περιγράψει τα δεδομένα πριν την απομάκρυνση της ακραίας τιμής είναι το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, το οποίο δεν επηρεάστηκε από την απομάκρυνση της ακραίας τιμής όσο το εύρος και η τυπική απόκλιση.

3. Μετρήσαμε τους χρόνους αντίδρασης (σε δευτερόλεπτα) για το κυρίαρχο και το μη κυρίαρχο χέρι μιας ομάδας 18 αθλητών. Τα αποτελέσματα της μέτρησης παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΧΕΡΙ			ΜΗ ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΧΕΡΙ		
0,41	0,29	0,35	0,46	0,34	0,38
0,42	0,42	0,43	0,39	0,39	0,39
0,39	0,61	0,38	0,51	0,50	0,47
0,34	0,75	0,34	0,40	2,60	0,34
0,38	0,47	0,34	0,39	0,51	0,35
0,32	0,29	0,30	0,37	0,31	0,32

α. Βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση για κάθε σύνολο δεδομένων.

β. Υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ. i. Υπάρχουν ακραίες τιμές στα δύο σύνολα δεδομένων;

ii. Βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των δύο συνόλων χωρίς τις ακραίες τιμές.

iii. Πώς επιδρά η απομάκρυνση των ακραίων τιμών στη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των δύο συνόλων δεδομένων;

<u>Λύση</u>

α.	**ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΧΕΡΙ**	**ΜΗ ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΧΕΡΙ**
	Μέση τιμή: $\bar{x} \approx 0{,}40$	Μέση τιμή: $\bar{x} \approx 0{,}52$
	Τυπική απόκλιση: $s \approx 0{,}11$	Τυπική απόκλιση: $s \approx 0{,}51$

β. Παρατηρούμε ότι στο δεύτερο σύνολο δεδομένων (μη κυρίαρχο χέρι) η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση είναι μεγαλύτερες. Ειδικότερα, η τυπική απόκλιση στο δεύτερο σύνολο δεδομένων είναι περίπου πέντε φορές μεγαλύτερη. Συμπεραίνουμε ότι στο δείγμα υπάρχει σημαντική διαφορά στους μέσους χρόνους αντίδρασης μεταξύ των δύο χεριών των αθλητών.

γ.i. Τα διατεταγμένα σε αύξουσα σειρά δεδομένα είναι:

ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΧΕΡΙ: 0,29, 0,29, 0,30, 0,32, 0,34, 0,34, 0,34, 0,35, 0,38, 0,38, 0,39, 0,41, 0,42, 0,42, 0,43, 0,47, 0,61, 0,75

ΜΗ ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΧΕΡΙ: 0,31, 0,32, 0,34, 0,34, 0,35, 0,37, 0,38, 0,39, 0,39, 0,39, 0,39, 0,40, 0,46, 0,47, 0,50, 0,51, 0,51, 2,60

ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΧΕΡΙ: Βρίσκουμε: $Q_1 = 0{,}34$, $Q_3 = 0{,}42$.

Άρα $Q = 0{,}08$ και $[Q_1 - 1{,}5Q,\ Q_3 + 1{,}5Q] = [0{,}22,\ 0{,}54]$. Ακραίες τιμές είναι οι 0,61 και 0,75.

ΜΗ ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΧΕΡΙ: Βρίσκουμε: $Q_1 = 0{,}35$, $Q_3 = 0{,}47$.

Άρα $Q = 0{,}12$ και $[Q_1 - 1{,}5Q,\ Q_3 + 1{,}5Q] = [0{,}17,\ 0{,}65]$. Ακραία τιμή είναι η 2,60.

ii. Μετά την αφαίρεση των ακραίων τιμών βρίσκουμε:

ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΧΕΡΙ	**ΜΗ ΚΥΡΙΑΡΧΟ ΧΕΡΙ**
Μέση τιμή: $\overline{x} \approx 0{,}37$	Μέση τιμή: $\overline{x} \approx 0{,}40$
Τυπική απόκλιση: $s \approx 0{,}05$	Τυπική απόκλιση: $s \approx 0{,}06$

iii. Παρατηρούμε ότι μετά την αφαίρεση των ακραίων τιμών από τα δύο σύνολα δεδομένων οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις μειώθηκαν. Ιδιαιτέρως, στο δεύτερο σύνολο δεδομένων η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση μειώθηκαν σημαντικά. Η τιμή 2,60 που περιείχε αυτό το σύνολο ήταν αρκετά ακραία (μεγάλη).

4. Τα παρακάτω στατιστικά στοιχεία περιγράφουν τις βαθμολογίες (σε κλίμακα 0-100) στα Μαθηματικά δύο τμημάτων ενός σχολείου:

	Τμήμα Α	Τμήμα Β
Μέση τιμή	78	72
Τυπική απόκλιση	16	6

α. Σε ποιο από τα δύο τμήματα πρέπει ο καθηγητής να επενδύσει περισσότερο χρόνο για ατομική ενισχυτική διδασκαλία;

β. Σε ποιο από τα δύο τμήματα είναι πιο πιθανό να βρεθούν εξαιρετικά ταλαντούχοι/ες μαθητές/τριες, δηλαδή μαθητές/τριες με ιδιαίτερα υψηλές βαθμολογίες;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

<u>Λύση</u>

α. Οι βαθμολογίες του τμήματος Α έχουν μεγαλύτερη τυπική απόκλιση (16) σε σχέση με αυτές του τμήματος Β (6), που σημαίνει ότι οι μαθητές/τριες του τμήματος Α έχουν μεγαλύτερες διαφορές στις επιδόσεις τους. Ο καθηγητής πρέπει να επενδύσει περισσότερο χρόνο στο Τμήμα Α για ατομική διδασκαλία, καθώς οι μεγάλες διαφορές στις επιδόσεις υποδεικνύουν ότι υπάρχουν μαθητές/τριες που ίσως χρειάζονται περισσότερη υποστήριξη.

β. Η ύπαρξη εξαιρετικά ταλαντούχων μαθητών/τριων σχετίζεται με:

- την υψηλή μέση τιμή, και
- τη μεγάλη τυπική απόκλιση (αυξημένη πιθανότητα ακραίων τιμών).

Το Τμήμα Α έχει υψηλότερη μέση τιμή (78) συγκριτικά με το Τμήμα Β (72), γεγονός που υποδηλώνει ότι οι συνολικές επιδόσεις των μαθητών είναι καλύτερες.

Επιπλέον, στο Τμήμα Α παρατηρούμε μεγαλύτερη τυπική απόκλιση, που δείχνει ότι οι βαθμολογίες ποικίλλουν περισσότερο, άρα είναι πιθανότερο να υπάρχουν ακραίες υψηλές βαθμολογίες (ταλαντούχοι μαθητές/τριες).

Στο Τμήμα Α, η υψηλότερη μέση τιμή και η μεγαλύτερη τυπική απόκλιση καθιστά πιο πιθανή την παρουσία εξαιρετικά ταλαντούχων μαθητών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.1

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΤΡΩΝ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΠΟΣΟΤΙΚΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ ΣΤΙΣ ΣΤΑΘΜΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΘΗΚΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

Να ερμηνεύουν το πολλαπλό θηκόγραμμα για να κάνουν συγκρίσεις και να εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που έχουν οι τιμές ενός ποσοτικού χαρακτηριστικού σε κάθε στάθμη του κατηγορικού χαρακτηριστικού του υπό μελέτη πληθυσμού.

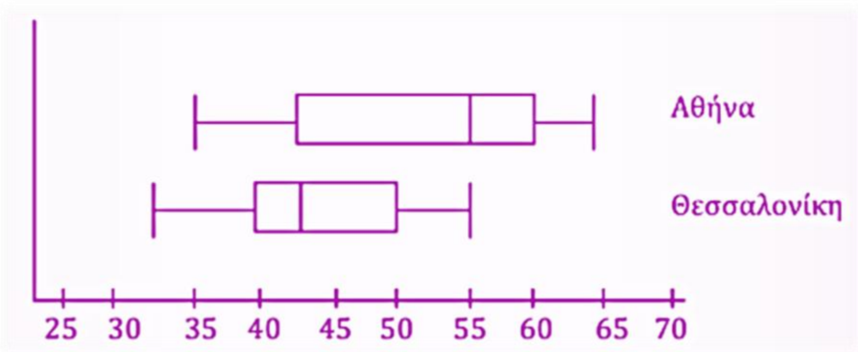
Δραστηριότητα ενότητας

Με βάση τον κώδικα οδικής κυκλοφορίας (ΚΟΚ), το ανώτατο επιτρεπόμενο όριο ταχύτητας για τα αυτοκίνητα, σε κατοικημένες περιοχές, είναι 50 km/h. Για να ελέγξουμε την οδική συμπεριφορά των κατοίκων της Αθήνας και της Θεσσαλονίκης, συλλέξαμε αντιπροσωπευτικά δείγματα από κάθε πόλη καταγράφοντας τις ταχύτητες των αυτοκινήτων. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων προέκυψαν τα θηκογράμματα της εικόνας.

α. Σε ποια από τα δύο δείγματα είναι πιο πιθανό να παρατηρήσουμε οδηγό που υπερβαίνει το όριο ταχύτητας;

β. Σε ποιο δείγμα οι ταχύτητες παρουσιάζουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα;

γ. Σε ποια από τα δύο δείγματα θεωρείτε ότι οι κάτοικοι έχουν καλύτερη οδική συμπεριφορά;



<u>Λύση</u>

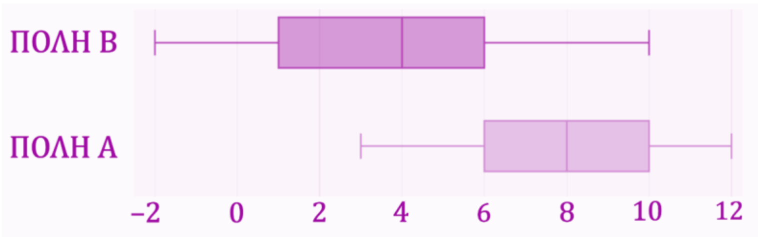
α. Συγκρίνοντας τα θηκογράμματα των ταχυτήτων των δύο πόλεων παρατηρούμε ότι η διάμεση ταχύτητα στην Αθήνα είναι 55 και ότι το τρίτο τεταρτημόριο στο θηκόγραμμα της Θεσσαλονίκης είναι 50. Αυτό σημαίνει ότι περίπου το 50% των οδηγών του δείγματος της Αθήνας υπερβαίνει το όριο ταχύτητας ενώ το αντίστοιχο ποσοστό στη Θεσσαλονίκη είναι μόλις 25%. Είναι λοιπόν πιο πιθανό να παρατηρήσουμε οδηγό που υπερβαίνει το όριο ταχύτητας στο δείγμα της Αθήνας.

β. Παρατηρούμε ότι το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των ταχυτήτων στο δείγμα της Αθήνας είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα της Θεσσαλονίκης. Επομένως, οι ταχύτητες στην Αθήνα παρουσιάζουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα.

γ. Όλα τα μέτρα που μπορούμε να παρατηρήσουμε από τα θηκογράμματα (διάμεσος, min, max, εύρος, ενδοτεταρτημοριακό εύρος) είναι μικρότερα στο δείγμα της Θεσσαλονίκης από τα αντίστοιχα του δείγματος της Αθήνας. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε με ασφάλεια ότι οι οδηγοί στο δείγμα της Θεσσαλονίκης παρουσιάζουν, γενικά, καλύτερη οδική συμπεριφορά.

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΥΛΙΚΟ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

1. Τα παρακάτω θηκογράμματα δείχνουν τις θερμοκρασίες (σε βαθμούς C°) που μετρήθηκαν το μεσημέρι κάθε ημέρα του περασμένου Γενάρη στη Λάρισα και στην Καστοριά.



α. Με βάση την εμπειρία σας ποιο θηκόγραμμα αντιστοιχεί στην Λάρισα και ποιο στην Καστοριά;
β. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα.

	Ελάχιστη τιμή	Q_1	δ	Q_3	Μέγιστη τιμή	$Q = Q_3 - Q_1$
Λάρισα						
Καστοριά						

γ. Είναι σωστός ο ισχυρισμός ότι περίπου 25% των ημερών του περασμένου Γενάρη η Λάρισα είχε υψηλότερες θερμοκρασίες από όλες τις θερμοκρασίες στην Καστοριά;

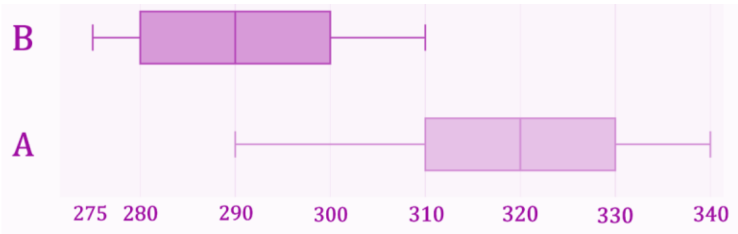
<u>Λύση</u>

α. Στην Καστοριά η θερμοκρασία είναι, γενικά, πιο χαμηλή από αυτή της Λάρισας. Παρατηρούμε ότι το θηκόγραμμα της πόλης Β απεικονίζει χαμηλότερες θερμοκρασίες από αυτό της πόλης Α. Είναι λοιπόν λογικό να θεωρήσουμε ότι η πόλη Β είναι η Καστοριά και η πόλη Α η Λάρισα.
β. Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο παρακάτω:

	Ελάχιστη τιμή	Q_1	δ	Q_3	Μέγιστη τιμή	$Q = Q_3 - Q_1$
Λάρισα	3	6	8	10	12	4
Καστοριά	–2	1	4	6	10	5

γ. Ο ισχυρισμός είναι σωστός. Παρατηρούμε ότι το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 στη Λάρισα έχει την ίδια τιμή με τη μέγιστη θερμοκρασία (max) της Καστοριάς. Γνωρίζουμε ότι περίπου 25% των ημερών έχει θερμοκρασίες μεγαλύτερες του Q_3. Επομένως, περίπου 25% των ημερών η Λάρισα έχει υψηλότερες θερμοκρασίες από τη μέγιστη θερμοκρασία της Καστοριάς.

2. Τα παρακάτω θηκογράμματα δείχνουν τον αριθμό των αιωρούμενων σωματιδίων σε 50 δείγματα νερού πριν (Α) και μετά από ένα πρόχειρο φιλτράρισμα (Β).



Να συγκρίνετε τη διάμεσο, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος πριν και μετά το φιλτράρισμα. Υπάρχει βελτίωση στην ποιότητα του νερού μετά το φιλτράρισμα;

Λύση

Παρατηρώντας τα δύο θηκογράμματα βρίσκουμε:

$$\delta_A = 320, \quad R_A = 340 - 290 = 50 \quad Q_A = 330 - 310 = 20$$

$$\delta_B = 290, \quad R_B = 310 - 275 = 35 \quad Q_B = 300 - 280 = 20$$

Βλέπουμε ότι μετά το φιλτράρισμα υπάρχει μικρή μείωση (περίπου 12%) στον διάμεσο αριθμό σωματιδίων. Η μεταβλητότητα επηρεάστηκε ελάχιστα αφού το εύρος ελαττώθηκε μόλις κατά 15 σωματίδια ενώ ενδοτεταρτημοριακό εύρος παρέμεινε ίδιο. Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι στο δείγμα υπάρχει μικρή βελτίωση στην ποιότητα του νερού μετά το φιλτράρισμα λόγω μικρής μείωσης της διαμέσου.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.2

ΑΙΤΙΟΤΗΤΑ

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

Να ανακαλύπτουν και να εξηγούν με παραδείγματα ότι ένα ποσοτικό και ένα κατηγορικό χαρακτηριστικό δε διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίου-αιτιατού.

Λύσεις επιλεγμένων ασκήσεων του βιβλίου

Άσκηση 3

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δεδομένα που δείχνουν ότι στο άθλημα του δρόμου 100m στον στίβο οι άνθρωποι με σκουρόχρωμα μάτια έχουν καλύτερες επιδόσεις από αυτούς με ανοικτόχρωμα μάτια.

α. Υπάρχει σχέση εξάρτησης μεταξύ του της κατηγορικής μεταβλητής «Χρώμα ματιών» με την ποσοτική μεταβλητή «Επίδοση στα 100m δρόμου»;

β. Μπορεί να θεωρηθεί ότι το χρώμα των ματιών είναι η αιτία για τις διαφορές στις επιδόσεις που παρατηρήσαμε μεταξύ των ανθρώπων με σκουρόχρωμα μάτια και αυτών με ανοιχτόχρωμα μάτια;

γ. Ποιοι παράγοντες μπορεί να επηρεάζουν τη σχέση μεταξύ του χρώματος των ματιών και της επίδοσης στα αθλήματα τρεξίματος στον στίβο;

Λύση

α. Τα δεδομένα υποδεικνύουν ότι υπάρχει σχέση εξάρτησης μεταξύ των δύο μεταβλητών αφού μια αλλαγή στάθμης (χρώμα ματιών) συνδέεται με αλλαγή των επιδόσεων στα 100m.

β. Ακόμα και αν υπάρχει σχέση εξάρτησης μεταξύ του χρώματος των ματιών και της επίδοσης στα 100m δρόμου, αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι το χρώμα των ματιών είναι η αιτία για τις διαφορές στις επιδόσεις. Πρέπει να ληφθούν υπόψη πιθανοί άλλοι παράγοντες που μπορεί να επηρεάζουν τη σχέση των δύο μεταβλητών.

γ. Ορισμένοι παράγοντες που μπορεί να επηρεάζουν τη σχέση μεταξύ του χρώματος των ματιών και της επίδοσης στα αθλήματα τρεξίματος στον στίβο μπορεί να περιλαμβάνουν το επίπεδο άσκησης, τις διατροφικές συνήθειες, αλλά και γενετικούς παράγοντες που ενδέχεται να συμβάλλουν στις διαφορές στις επιδόσεις.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε αυτή τη δραστηριότητα, θα διερευνήσουμε αν η απομνημόνευση και η ανάκληση της πληροφορίας σχετίζονται με την ομαδοποίησή[3] της σε αναγνωρίσιμες και οργανωμένες ομάδες. Οι μαθητές/τριες θα κληθούν να απομνημονεύσουν δύο ακολουθίες γραμμάτων. Στη συνέχεια, θα συγκριθούν οι επιδόσεις τους, ώστε να διαπιστωθεί αν υπάρχει σύνδεση μεταξύ της μνημονικής ικανότητας και της ομαδοποίησης.

Στάδια επίλυσης	Μαθησιακοί στόχοι
1. Διατύπωση ερωτήματος. **2.** Σχεδιασμός και υλοποίηση πλάνου συλλογής δεδομένων. **3.** Ανάλυση δεδομένων μέσω υπολογισμών και γραφημάτων. **4.** Ερμηνεία αποτελεσμάτων στο πλαίσιο του αρχικού ερωτήματος.	Οι μαθητές/τριες θα μπορούν να: • Συνδέουν ένα πραγματικό πρόβλημα με μία υπόθεση προς διερεύνηση. • Υπολογίζουν στατιστικούς δείκτες και να δημιουργούν γραφικές παραστάσεις, αξιοποιώντας τα για να εκτιμήσουν αν υπάρχουν ενδείξεις που υποστηρίζουν την υπόθεση.

Χρόνος που απαιτείται	Απαιτούμενα Υλικά
Δύο διδακτικές ώρες: • Μία ώρα για συζήτηση του ερευνητικού ερωτήματος και τον σχεδιασμό του πειράματος. • Μία ώρα για τη συλλογή, ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων.	• Ένα χρονόμετρο (εκπαιδευτικός). Κάθε μαθητής θα χρειαστεί: • Μια αριθμομηχανή. • Ένα φύλλο χαρτί με μία ακολουθία γραμμάτων. • Φύλλο εργασίας

Σχέδιο Μαθήματος

Μοιράστε στα παιδιά της τάξης τα φύλλα εργασίας, ένα σε κάθε παιδί, και ζητήστε να απαντήσουν στην **ερώτηση #1**. Παραδείγματα όπου η ομαδοποίηση πληροφοριών διευκολύνει την απομνημόνευση περιλαμβάνουν αριθμούς τηλεφώνου, αριθμούς κοινωνικής ασφάλισης, αριθμούς πινακίδων κυκλοφορίας, κωδικούς υπολογιστών, ημερομηνίες γέννησης κ.λπ.

Συζητήστε το παρακάτω ερευνητικό ερώτημα:

Σχετίζεται το μέγεθος της πληροφορίας που πρέπει να απομνημονευθεί και να ανακληθεί με τη διάσπαση της σε οργανωμένες ομάδες;

Ζητήστε από τα παιδιά της τάξης να απαντήσουν την **ερώτηση #2**. Οι απαντήσεις θα διαφέρουν, αλλά καθοδηγήστε τους μαθητές και τις μαθήτριες προς τη γενική ιδέα να δώσουμε μια ακολουθία γραμμάτων που θα πρέπει να απομνημονεύσουν μέσα σε συγκεκριμένο χρονικό όριο, όπως π.χ. 20 δευτερόλεπτα, και να ανακαλέσουν.

Συλλογή Δεδομένων

Ενημερώστε την τάξη ότι θα διεξάγουμε ένα πείραμα, στο οποίο όλοι θα λάβουν μια ακολουθία γραμμάτων για απομνημόνευση. Μετά από 20 δευτερόλεπτα, θα τους ζητηθεί να ανακαλέσουν

[3] Ο όρος "ομαδοποίηση" πληροφοριών αντιστοιχεί στον αγγλικό όρο "chunking", όπως αυτός αναφέρεται στη σχετική βιβλιογραφία.

την ακολουθία με την ίδια ακριβώς σειρά γράφοντας την. Σε αυτό το σημείο, μην αναφέρετε ότι θα υπάρχουν δύο διαφορετικές λίστες για απομνημόνευση.

Προετοιμασία και εκτέλεση του πειράματος

Κόψτε τις παρακάτω ακολουθίες σε λωρίδες χαρτιού. Συνιστάται τα δεδομένα να εκτυπωθούν σε χρωματιστό χαρτί, ώστε να μην διακρίνεται η πίσω πλευρά του χαρτιού.

Ακολουθία 1: ΑΚΑ – ΤΑΜ – ΑΚΟ – ΛΟΜ – ΙΟΥ – ΠΙΟ – ΖΩΑ – ΚΑΔ – ΝΑΓ

Ακολουθία 2: Α – ΚΑΤ – ΑΜ – ΑΚΟΛ – ΟΜ – ΙΟΥ – ΠΙΟ – ΖΩ – ΑΚΑΔ – ΝΑΓ

Μοιράστε τυχαία στη μισή τάξη τις λωρίδες με τη μία ακολουθία και στην άλλη μισή τις λωρίδες με την άλλη ακολουθία. Τοποθετήστε τις λωρίδες με την όψη προς τα κάτω στα θρανία, ώστε κανείς να μη γνωρίζει ποια ακολουθία έχει λάβει.

Στη συνέχεια, όταν η τάξη είναι έτοιμη, θα γυρίσουν τη λωρίδα τους και θα ξεκινήσετε το χρονόμετρο. Οι μαθητές/τριες θα έχουν 20 δευτερόλεπτα για να απομνημονεύσουν την ακολουθία γραμμάτων με τη σειρά που τους δίνεται.

Μετά την Ολοκλήρωση του πειράματος

Ζητήστε να απαντήσουν στην **ερώτηση #3**. Έπειτα δείξτε στην τάξη τις δύο ακολουθίες γραμμάτων που κλήθηκαν να απομνημονεύσουν και ζητήστε τους να απαντήσουν στις **ερωτήσεις #4 και #5**. Θα πρέπει να συνειδητοποιήσουν ότι κάθε ομάδα έλαβε την ίδια ακολουθία γραμμάτων, αλλά η ομαδοποίηση ήταν διαφορετική.

Καταγράψτε στον πίνακα της τάξης το πλήθος των σωστών γραμμάτων που ανακάλεσε κάθε μαθητής και μαθήτρια. Θα πρέπει να φαίνονται οι ομάδες ξεχωριστά και οι αντίστοιχοι βαθμοί κάθε μαθητή και μαθήτριας σε κάθε ομάδα. Με αυτόν τον τρόπο, οι απαντήσεις θα γίνουν προσβάσιμες και ορατές σε όλα τα μέλη της τάξης.

Ανάλυση Δεδομένων

Αφού οι μαθητές/τριες αντιγράψουν τα δεδομένα της τάξης στον **Πίνακα 1** ζητήστε τους να συνεργαστούν σε ζευγάρια για να λύσουν τις **ασκήσεις #1 και #2**.

Ερμηνεία Δεδομένων

Ζητήστε τους να λύσουν την **άσκηση #3**. Οι μαθητές/τριες πιθανότατα θα καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι τα δεδομένα υποδηλώνουν πως τα μέλη της ομάδας που έλαβαν την ακολουθία 1 φάνηκε να ανακαλούν περισσότερα γράμματα. Τα σημειογράμματα πιθανότατα θα δείξουν ότι η ομάδα που είχε την Ακολουθία 1 έχει περισσότερα σημεία προς τα δεξιά στο σημειόγραμμα σε σχέση με την ομάδα που είχε την Ακολουθία 2. Στα θηκόγραμματα, πιθανότατα θα φανεί ότι η κατανομή των γραμμάτων που ανακλήθηκαν από την ομάδα με την Ακολουθία 1 είναι περισσότερο συγκεντρωμένη προς υψηλότερες τιμές, ενώ η κατανομή της ομάδας με την Ακολουθία 2 εμφανίζεται μετατοπισμένη προς χαμηλότερες τιμές.

Φύλλο Εργασίας

1. Τι είδους πληροφορίες μπορεί να χρειαστεί να απομνημονεύσετε και τι κάνει την απομνημόνευση ευκολότερη ή δυσκολότερη;
   Απάντηση:

2. Πώς θα μπορούσαμε να μετρήσουμε τις ικανότητες απομνημόνευσης και ανάκλησης;
   Απάντηση:

3. Μέτρησε πόσα γράμματα ανακάλεσες σωστά. Ξεκινώντας από τα αριστερά, μέτρησε τα γράμματα που είναι ακριβώς τα ίδια με την αρχική ακολουθία. Μόλις κάνεις λάθος σε ένα γράμμα, σταμάτα την καταμέτρηση και γράψε τον αριθμό των σωστών γραμμάτων που βρήκες.

   Παράδειγμα:

   Εάν η ακολουθία σου ήταν ΑΚΑ – ΤΑΜ – ΑΚΟ … και έγραψες ΑΚΑ – ΤΑΜ – ΑΛΟ …, τότε να καταγράψεις τον αριθμό 7.

   (Σημείωση: Τα γράμματα πρέπει να είναι στη σωστή σειρά!)

   Απάντηση:

4. Σύγκρινε τα γράμματα που σου ζητήθηκε να απομνημονεύσεις με αυτά που έλαβαν οι υπόλοιποι μαθητές της τάξης. Τι είναι διαφορετικό στις ακολουθίες γραμμάτων;
   Απάντηση:

5. Ποια ομάδα πιστεύεις ότι θα απομνημονεύσει περισσότερα γράμματα; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.
   Απάντηση:

6. Αντίγραψε τα δεδομένα της τάξης στον παρακάτω πίνακα.

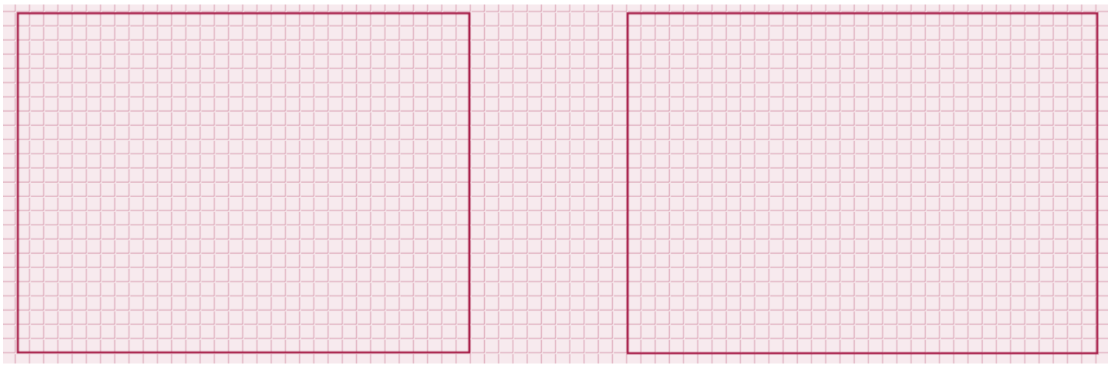
ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ 1		**ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ 2**	

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Άσκηση 1. Για κάθε ομάδα δεδομένων, δημιουργήστε ένα σημειόγραμμα και ένα θηκόγραμμα.

Απάντηση:

ΣΗΜΕΙΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΟΜΑΔΩΝ

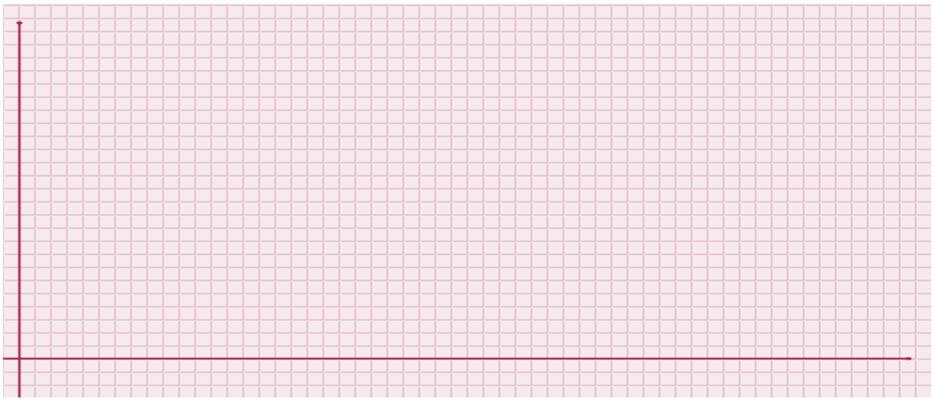


Ακολουθία 1 **Ακολουθία 2**

ΘΗΚΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΟΜΑΔΩΝ

Ακολουθία 1

Ακολουθία 2



Άσκηση 2. Παρατηρώντας τα παραπάνω διαγράμματα να περιγράψετε το σχήμα, το κέντρο και τη μεταβλητότητα των δεδομένων κάθε ομάδας.

Απάντηση:

Άσκηση 3. Λαμβάνοντας υπόψη τις απαντήσεις σας από τις προηγούμενες ερωτήσεις, υποδηλώνουν τα δεδομένα ότι μία από τις δύο ομαδοποιήσεις γραμμάτων είναι πιο εύκολη στην απομνημόνευση από την άλλη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.1

ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΤΥΧΗΣ

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

Να περιγράφουν πειράματα τύχης.
Να αναγνωρίζουν τη χρησιμότητα των πιθανοθεωρητικών μοντέλων.

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΥΛΙΚΟ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

1. Επιλέγουμε ένα άτομο και το εξετάζουμε ως προς το φύλο του. Να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματοχώρο για το πείραμα.

Λύση

Συμβολίζουμε με (Α) το αποτέλεσμα Άντρας και με (Γ) το αποτέλεσμα Γυναίκα. Τότε

$$\Omega = \{A, \Gamma\}.$$

2. Ένα κουτί περιέχει 2 μαύρες μπάλες και 3 κόκκινες. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη και καταγράφουμε το χρώμα της. Να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματοχώρο του πειράματος.

Λύση

Συμβολίζουμε με M_1, M_2, τις μαύρες μπάλες και K_1, K_2, K_3 τις κόκκινες.

Τότε ο δειγματοχώρος είναι ο

$$\Omega = \{M_1, M_2, K_1, K_2, K_3\}.$$

3. Ένα κουτί περιέχει πέντε λαχνούς, αριθμημένους από το 1 έως το 5. Επιλέγουμε δύο λαχνούς, τον έναν κατόπιν του άλλου και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματοχώρο του πειράματος.

Λύση

Κατασκευάζουμε έναν πίνακα διπλής εισόδου όπου στην πρώτη στήλη έχουμε τον αριθμό του πρώτου λαχνού που επιλέγουμε και στην πρώτη γραμμή τον αριθμό του δεύτερου λαχνού που επιλέγουμε.

	1	2	3	4	5
1		**1, 2**	**1, 3**	**1, 4**	**1, 5**
2	**2, 1**		**2, 3**	**2, 4**	**2, 5**
3	**3, 1**	**3, 2**		**3, 4**	**3, 5**
4	**4, 1**	**4, 2**	**4, 3**		**4, 5**
5	**5, 1**	**5, 2**	**5, 3**	**5, 4**	

Ο δειγματοχώρος μπορεί να συμβολιστεί ως

$$\Omega = \{12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54\}.$$

Αν παραστήσουμε τα στοιχεία ως διατεταγμένα ζεύγη είναι:

$$\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), \ldots, (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}.$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.2

ΜΕΤΑΓΡΑΦΗ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

Να μεταγράφουν ενδεχόμενα και σχέσεις ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες σε φυσική γλώσσα, στη γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα.

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΥΛΙΚΟ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

1. Έστω A ένα ενδεχόμενο ενός δειγματοχώρου Ω.

Να βρείτε τα ενδεχόμενα:

α. $(A')'$, $\varnothing'$, Ω', $(\Omega - A)'$.

β. $A \cap \varnothing$, $A \cup \varnothing$, $A \cap \Omega$, $A \cup \Omega$.

γ. $\varnothing \cap \Omega$, $\varnothing \cup \Omega$.

δ. $A' \cap A$, $A' \cup A$.

<u>Λύση</u>

α. Είναι κατά σειρά: $(A')' = A$, $\varnothing' = \Omega$, $\Omega' = \varnothing$, $(\Omega - A)' = (A')' = A$.

β. Είναι κατά σειρά: $A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \Omega = A$, $A \cup \Omega = \Omega$.

γ. Είναι: $\varnothing \cap \Omega = \varnothing$, $\varnothing \cup \Omega = \Omega$.

δ. Είναι: $A' \cap A = \varnothing$, $A' \cup A = \Omega$.

2. Έστω ο δειγματοχώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και τα ενδεχόμενα του:

Α: "Άρτιος αριθμός".

Β: "Αριθμός μεγαλύτερος του 2".

Γ: "Αριθμός μικρότερος του 4".

α. Να γράψετε τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ με αναγραφή των στοιχείων τους.

β. Να γράψετε τα παρακάτω ενδεχόμενα με αναγραφή των στοιχείων τους.

$$A', \quad A \cup B, \quad A \cap B, \quad (A \cup B) \cup \Gamma, \quad (A \cap B) \cup \Gamma.$$

Λύση

α. Είναι: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $\Gamma = \{1, 2, 3\}$.

β. Έχουμε:

$A' = \{1, 3, 5\}$.

$A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 6\}$

$(A \cup B) \cup \Gamma = \{2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$(A \cap B) \cup \Gamma = \{4, 6\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

3. Εκτελούμε μία φορά ένα πείραμα με δειγματοχώρο: $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$.

Έστω τα ενδεχόμενα $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{\beta, \delta, \varepsilon\}$, $\Gamma = \{\alpha, \varepsilon\}$.

Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα:

α. Δεν πραγματοποιείται το Α.

β. Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α, Β.

γ. Πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα Α, Β.

δ. Πραγματοποιούνται και τα τρία ενδεχόμενα Α, Β, Γ.

Λύση

Έχουμε:

α. Δεν πραγματοποιείται το Α, είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του Α, που περιέχει τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α: $A' = \{\delta, \varepsilon\}$.

β. Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α, Β**,** είναι η τομή των Α, Β, που περιέχει τα κοινά στους στοιχεία: $A \cap B = \{\beta\}$.

γ. Πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα Α, Β είναι η ένωση των Α, Β που περιέχει όλα τα στοιχεία τους: $A \cup B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$.

δ. Πραγματοποιούνται και τα τρία ενδεχόμενα Α, Β, Γ, είναι η τομή των Α, Β, Γ που περιέχει τα κοινά στους στοιχεία: $A \cap B \cap \Gamma = \varnothing$, (αδύνατο ενδεχόμενο)

4. Δίνεται ο δειγματοχώρος Ω και τα μη κενά υποσύνολα του Α, Β. Έστω το ενδεχόμενο

Γ: «Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α και Β».

Να αποδείξετε ότι:

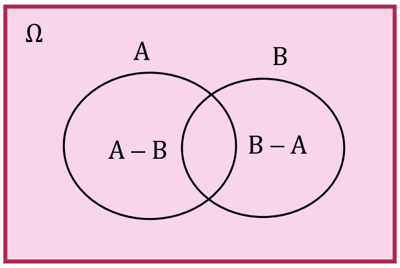
α. Τα ενδεχόμενα $A - B$, $B - A$, είναι ασυμβίβαστα.

β. Γ = (Α – Β) $\cup$ (Β– Α).

γ. (Α – Β) $\cup$ (Β – Α) = (Α $\cup$ Β) – (Α $\cap$ Β).

Λύση

Παριστάνουμε τα ενδεχόμενα Α, Β με το διάγραμμα Venn.



α. Παρατηρούμε ότι τα σύνολα Α – Β, Β – Α δεν έχουν κοινά στοιχεία, επομένως είναι ασυμβίβαστα (ή αλλιώς ξένα ή αμοιβαίως αποκλειόμενα).

β. Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α, Β σημαίνει ότι πραγματοποιείται μόνο το Α, δηλαδή το Α – Β, ή μόνο το Β, δηλαδή το Β – Α. Έτσι, Γ = (Α – Β) $\cup$ (Β – Α).

γ. Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι το σύνολο (Α – Β)$\cup$ (Β – Α) αποτελείται από τα στοιχεία της ένωσης Α$\cup$Β χωρίς τα στοιχεία της τομής Α$\cap$ Β, έτσι: (Α – Β)$\cup$ (Β – Γ) = (Α$\cup$ Β) – (Α$\cap$ Β).

5. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι μια φορά. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α. Α = {1, 2, 3}.

β. Β: Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός.

γ. Γ: Η ένδειξη του ζαριού είναι ρίζα της εξίσωσης 2x– 4 = 3.

δ. Δ: Η ένδειξη του ζαριού είναι αριθμός μικρότερος του 7.

Λύση

Είναι: Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} με ν(Ω) = 6.

α. Γνωρίζουμε ότι: P(A) = $\frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}$. Επομένως, P(A) = $\frac{3}{6}$ = 0,5.

β. Είναι: Β = {2, 4, 6}, ν(Β) = 3 και P(B) = $\frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{3}{6}$ = 0,5.

γ. Είναι: 2x – 4 = 3 ή x = $\frac{7}{2} \notin \Omega$, επομένως Γ = $\varnothing$ και P(Γ) = P($\varnothing$) = 0.

δ. Είναι: Δ = Ω. Επομένως, P(Δ) = P(Ω) = 1.

6. Ο δειγματοχώρος Ω = {1, 2, 3,…, ν} αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α = {x$\in$Ω|x $\leq$ 3} είναι 0,25.

α. Να βρείτε το ν.

β. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Β με Β = {x∈ Ω| x = πολ3}.

Λύση

α. Έχουμε: Α = {1, 2, 3} με ν(Α) = 3 και ν(Ω) = ν.

Άρα P(A) = 0,25 ή $\frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = 0{,}25$ ή $\frac{3}{\nu}$ = 0,25 ή ν = 12

β. Είναι Ω = {1, 2, 3,…, 12}, Β = {3, 6, 9, 12} με ν(Β) = 4 και P(B) = $\frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

7. Ένα κουτί περιέχει μία κόκκινη σφαίρα Κ και τρεις μαύρες τις M_1, M_2 και M_3. Αφαιρούμε τυχαίως μια σφαίρα, την καταγράφουμε και στην συνέχεια αφαιρούμε τυχαίως μια δεύτερη και την καταγράφουμε επίσης.

α. Να βρείτε το δειγματοχώρο Ω του πειράματος.

β. Να γράψετε με αναγραφή τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ, που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

Α: “Και οι δύο σφαίρες είναι μαύρες”

Β: “Μόνο μία σφαίρα είναι μαύρη”

Γ “ Καμία σφαίρα δεν είναι μαύρη”

γ. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των Α, Β και Γ.

Λύση

α. Με το πίνακα διπλής εισόδου ή το δεντροδιάγραμμα του πειράματος βρίσκουμε

$$\Omega = \{KM_1,\ KM_2,\ KM_3,\ M_1K,\ M_1M_2,\ M_1M_3,\ M_2K,\ M_2M_1,\ M_2M_3,\ M_3K,\ M_3M_1,\ M_3M_2\}$$

β. $A = \{M_1M_2,\ M_1M_3,\ M_2M_1,\ M_2M_3,\ M_3M_1,\ M_3M_2\}$

$B = \{KM_1,\ KM_2,\ KM_3,\ M_1K,\ M_2K,\ M_3K\}$

Γ = ∅

γ. Επειδή η αφαίρεση των σφαιρών γίνεται τυχαία, τα απλά ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα, οπότε από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε:

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{6}{12} = 0{,}5$$

$$P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{6}{12} = 0{,}5 \quad \text{και} \quad P(\Gamma) = P(\varnothing) = 0.$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.3

ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΤΥΧΗΣ ΜΕ ΜΗ ΙΣΟΠΙΘΑΝΑ ΑΠΛΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

Να περιγράφουν πειράματα τύχης με μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΥΛΙΚΟ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

1. Οι έδρες ενός αμερόληπτου ζαριού φέρουν τους αριθμούς: 1, 1, 1, 2, 2, 3.

Ρίχνουμε το ζάρι δύο φορές.

α. Να βρεθεί ένας κατάλληλος δειγματοχώρος Ω του πειράματος.

β. Είναι τα απλά ενδεχόμενα του Ω ισοπίθανα;

γ. Ποια πιθανότητα θα αποδίδατε σε κάθε απλό ενδεχόμενο;

<u>Λύση</u>

α. Ένας κατάλληλος δειγματοχώρος του πειράματος είναι το σύνολο:

Ω = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}.

β. Τα απλά ενδεχόμενα του Ω δεν είναι ισοπίθανα όπως μπορούμε να δούμε στον παρακάτω πίνακα:

	1	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 3)
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 3)
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 3)
2	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 3)
2	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 3)
3	(3, 1)	(3, 1)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 2)	(3, 3)

γ. Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα αποδίδουμε στα απλά ενδεχόμενα του δειγματοχώρου Ω τις παρακάτω πιθανότητες:

$P((1,\ 1))=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$ $\quad P((1,\ 2))=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ $\quad P((1,\ 3))=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

$P((2,\ 1))=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ $\quad P((2,\ 2))=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ $\quad P((2,\ 3))=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

$P((3,\ 1))=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ $\quad P((3,\ 2))=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ $\quad P((1,\ 1))=\frac{1}{36}$

2. Επιλέγουμε στην τύχη ένα γράμμα της λέξης «ΠΑΤΑΤΑ» και το καταγράφουμε.

α. Ποιος είναι ο δειγματοχώρος του πειράματος; Είναι τα απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα;

β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα εμφάνισης κάθε γράμματος.

Λύση

α. Ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι ο $\Omega = \{\Pi, \mathrm{A}, \mathrm{T}\}$. Τα απλά ενδεχόμενά του δεν είναι ισοπίθανα.

β. Είναι $\mathrm{P}(\Pi) = \frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(\mathrm{T}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

3. Μια μαθήτρια ρίχνει ένα αμερόληπτο ζάρι του οποίου οι έδρες με αριθμούς 1 και 2 έχουν χρωματιστεί κόκκινες, η έδρα με αριθμό 3 έχει χρωματιστεί πράσινη ενώ οι υπόλοιπες μαύρες. Αφού ρίξει το ζάρι ανακοινώνει το χρώμα σε μια φίλη της.

α. Ποιος είναι ο δειγματοχώρος του πειράματος για την φίλη; Είναι τα απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα;

β. Να αποδώσετε πιθανότητα σε κάθε απλό ενδεχόμενο του δειγματοχώρου της φίλης.

Λύση

α. Ο δειγματοχώρος της φίλης είναι ο $\Omega = \{\mathrm{K}, \Pi, \mathrm{M}\}$. Τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα.

β. Είναι $\mathrm{P}(\mathrm{K}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(\Pi) = \frac{1}{6}$ και $\mathrm{P}(\mathrm{M}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.4

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

Να διατυπώνουν τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας για έναν πεπερασμένο δειγματοχώρο. Να αναγνωρίζουν διαφορές και συνδέσεις μεταξύ του αξιωματικού και του κλασικού ορισμού της πιθανότητας.

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΥΛΙΚΟ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

1. Δίνεται ο δειγματοχώρος $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και το ενδεχόμενο $A = \Omega - \{\delta\}$. Έστω ότι: $P(A) = \frac{5}{8}$, $P(\alpha) = P(\beta) = \frac{1}{4}$. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(\gamma)$ και $P(\delta)$.

<u>Λύση</u>

Είναι $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ και $P(A) = P(\alpha) + P(\beta) + P(\gamma)$ ή $\frac{5}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + P(\gamma)$ ή $P(\gamma) = \frac{1}{8}$.

Ακόμα $P(\alpha) + P(\beta) + P(\gamma) + P(\delta) = 1$ ή $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + P(\delta) = 1$ ή $P(\delta) = \frac{3}{8}$.

2. Δίνεται ο δειγματοχώρος $\Omega = \{1, 2, 3\}$ με $P(1) = 2P(2) = 3P(3)$. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$.

<u>Λύση</u>

Έχουμε: $P(1) + P(2) + P(3) = 1$ (1)

Επειδή $P(1) = 2P(2) = 3P(3)$ είναι $P(3) = \frac{P(1)}{3}$, $P(2) = \frac{P(1)}{2}$ και η (1) δίνει:

$P(1) + \frac{P(1)}{2} + \frac{P(1)}{3} = 1$ ή $11P(1) = 6$ ή $P(1) = \frac{6}{11}$. Άρα $P(3) = \frac{P(1)}{3} = \frac{2}{11}$ και $P(2) = \frac{P(1)}{2} = \frac{3}{11}$.

3. Ας υποθέσουμε ότι η ζήτηση για κιβώτια με σοκολάτες από έναν συγκεκριμένο έμπορο διαμορφώνεται ως εξής:

ΖΗΤΗΣΗ	ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
20 κιβώτια	0,25
30 κιβώτια	0,35
40 κιβώτια	0,3
50 κιβώτια	0,1

Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο έμπορος να μπορέσει να πουλήσει ολόκληρο το απόθεμά του αν παραγγείλει:
α. 20 κιβώτια
β. 30 κιβώτια
γ. 40 κιβώτια
δ. 50 κιβώτια

Λύση

Ο έμπορος θα μπορέσει να πουλήσει ολόκληρο το απόθεμά του αν η ζήτηση είναι μεγαλύτερη ή ίση από το απόθεμά του.

α. Αν παραγγείλει 20 κιβώτια: Η ζήτηση είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση των 20 κιβωτίων. Άρα: P(Πώληση όλου του αποθέματος) = 1.

β. Αν παραγγείλει 30 κιβώτια: Ο έμπορος θα μπορέσει να πουλήσει όλα τα κιβώτια αν η ζήτηση είναι τουλάχιστον 30 κιβώτια. Άρα: P(Πώληση όλου του αποθέματος) = 0,35 + 0,3 + 0,1 = 0,75.

γ. Αν παραγγείλει 40 κιβώτια: Ο έμπορος θα μπορέσει να πουλήσει όλα τα κιβώτια αν η ζήτηση είναι τουλάχιστον 40 κιβώτια. Άρα: P(Πώληση όλου του αποθέματος) = 0,3 + 0,1= 0,4.

δ. Αν παραγγείλει 50 κιβώτια: Ο έμπορος θα μπορέσει να πουλήσει όλα τα κιβώτια αν η ζήτηση είναι τουλάχιστον 50 κιβώτια. Άρα: P(Πώληση όλου του αποθέματος) = 0,1.

4. Μια παίκτρια μπάσκετ επιχειρεί δύο ελεύθερες βολές. Υπάρχουν τέσσερα δυνατά αποτελέσματα και οι πιθανότητες τριών εξ αυτών δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Πρώτη Βολή: Εύστοχη	**Πρώτη Βολή: Άστοχη**
Δεύτερη Βολή : Εύστοχη	**0,49**	**;**
Δεύτερη Βολή : Άστοχη	**0,21**	**0,09**

α. Να βρείτε την πιθανότητα η παίκτρια να αστοχήσει στην πρώτη βολή και να ευστοχήσει στη δεύτερη.

β. Να βρείτε την πιθανότητα η παίκτρια να πετύχει τουλάχιστον μία από τις δύο βολές.

Λύση

Ο δειγματοχώρος Ω είναι το σύνολο Ω = {ΕΕ, ΕΑ, ΑΕ, ΑΑ}, όπου

ΕΕ: Η πρώτη βολή να είναι εύστοχη και η δεύτερη βολή να είναι εύστοχη.
ΕΑ: Η πρώτη βολή να είναι εύστοχη και η δεύτερη βολή να είναι άστοχη.
ΑΕ: Η πρώτη βολή να είναι άστοχη και η δεύτερη βολή να είναι εύστοχη.
ΑΑ: Η πρώτη βολή να είναι άστοχη και η δεύτερη βολή να είναι άστοχη.

Από τον πίνακα έχουμε: P(ΕΕ) = 0,49 P(ΕΑ) = 0,21 P(ΑΑ) = 0,09

α. Το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των απλών ενδεχομένων του δειγματοχώρου είναι 1. Έτσι: P(ΕΕ) + P(ΕΑ) + P(ΑΕ) + P(ΑΑ) = 1. Αντικαθιστώντας τις γνωστές τιμές:

0,49 + 0,21 + P(ΑΕ) + 0,09 = 1 ή P(ΑΕ) = 0,21

β. Το ενδεχόμενο η παίκτρια να πετύχει τουλάχιστον μία από τις δύο βολές είναι η ένωση των απλών ενδεχομένων ΕΕ, ΕΑ και ΑΕ. Η πιθανότητα αυτή υπολογίζεται ως εξής:

$$P(\text{ΕΕ} \cup \text{ΕΑ} \cup \text{ΑΕ}) = P(\text{ΕΕ}) + P(\text{ΕΑ}) + P(\text{ΑΕ}) = 0,49 + 0,21 + 0,21 = 0,91.$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.5

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

Να διατυπώνουν υποθέσεις για τους κανόνες που αναμένεται να ισχύουν στο λογισμό πιθανοτήτων.
Να αποδεικνύουν τους κανόνες λογισμού πιθανοτήτων στα πλαίσια του αξιωματικού ορισμού της πιθανότητας.

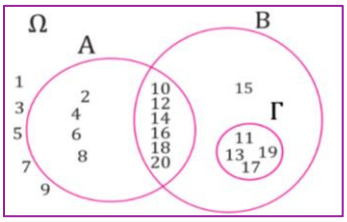
Δραστηριότητα ενότητας

Στο διάγραμμα Venn φαίνεται ο δειγματοχώρος

$$\Omega=\{x\in N\,|\,1\leq x\leq 20\},$$

ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και τα σύνθετα ενδεχόμενά του

$A=\{x\in\Omega\,|\,x \text{ άρτιος}\}$, $B=\{x\in\Omega\,|\,10\leq x\leq 20\}$ και $\Gamma=\{x\in\Omega\,|\,x \text{ πρώτος μεγαλύτερος του } 10\}$.



Α. Παρατηρώντας το διάγραμμα να επαληθεύσετε τις παρακάτω ισότητες:

α. $\nu(A)+\nu(A')=\nu(\Omega)$

β. $\nu(A\cup B)=\nu(A)+\nu(B)-\nu(A\cap B)$

γ. $\nu(A-B)=\nu(A)-\nu(A\cap B)$

Β. Βασιζόμενοι στις παραπάνω σχέσεις και στον κλασικό ορισμό της πιθανότητας να διερευνήσετε την αλήθεια των παρακάτω εικασιών:

δ. $P(A)+P(A')=1$

ε. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

στ. $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

Να εξετάσετε αν οι παραπάνω εικασίες ισχύουν για οποιαδήποτε ενδεχόμενα ενός πεπερασμένου δειγματοχώρου.

Λύση

Α. Παρατηρώντας το διάγραμμα βρίσκουμε:

α. $\nu(A)=10,\ \nu(A')=10,\ \nu(\Omega)=20$. Επομένως $\nu(A)+\nu(A')=\nu(\Omega)$.

β. $\nu(A\cup B)=15,\ \nu(A)=10,\ \nu(B)=11,\ \nu(A\cap B)=6.$

Επομένως $\nu(A\cup B)=\nu(A)+\nu(B)-\nu(A\cap B)$

γ. $\nu(A-B)=4,\ \nu(A)=10,\ \nu(A\cap B)=6.$ Επομένως $\nu(A-B)=\nu(A)-\nu(A\cap B)$.

Β. Διαιρώντας κάθε μέλος των σχέσεων των ερωτημάτων Αα, Αβ, Αγ με $\nu(\Omega)=20$ και χρησιμοποιώντας τον κλασικό ορισμό έχουμε:

δ. $\dfrac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}+\dfrac{\nu(A')}{\nu(\Omega)}=\dfrac{\nu(\Omega)}{\nu(\Omega)}$ ή $P(A)+P(A')=1$

ε. $\dfrac{\nu(A\cup B)}{\nu(\Omega)}=\dfrac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}+\dfrac{\nu(B)}{\nu(\Omega)}-\dfrac{\nu(A\cap B)}{\nu(\Omega)}$ ή $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

στ. $\dfrac{\nu(A-B)}{\nu(\Omega)}=\dfrac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}-\dfrac{\nu(A\cap B)}{\nu(\Omega)}$ ή $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΥΛΙΚΟ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

1. Τα Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματοχώρου Ω με $P(A)=0,20$ και $P(B)=0,40.$ Υπολογίστε την πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β, υπό τις παρακάτω συνθήκες:

α. $P(A\cap B)=0,15$

β. Τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

γ. $A\subseteq B$

δ. $P(B-A)=0,35$

ε. $A\subseteq B'$

<u>Λύση</u>

Ζητάμε την πιθανότητα $P(A\cup B).$

α. Από τον Προσθετικό Νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,20+0,40-0,15=0,45.$$

β. Είναι $A\cap B=\varnothing.$ Από τον Απλό Προσθετικό Νόμο έχουμε:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0,20+0,40=0,60.$$

γ. Από τη σχέση $A\subseteq B$ συμπεραίνουμε ότι $A\cup B=B.$ Επομένως, $P(A\cup B)=P(B)=0,40.$

δ. Είναι

$$\begin{aligned}P(B-A)=0,35 &\Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B)=0,35\\ &\Leftrightarrow 0,40-P(A\cap B)=0,35\\ &\Leftrightarrow P(A\cap B)=0,05.\end{aligned}$$

Από τον Προσθετικό Νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,20+0,40-0,05=0,55.$$

ε. Από τη σχέση $A\subseteq B'$ συμπεραίνουμε ότι $A\cap B=\varnothing.$ Από τον Απλό Προσθετικό Νόμο έχουμε:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0,20+0,40=0,60.$$

2. Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματοχώρου Ω με P(A) = 0,2 και P(B) = 0,5.

Να αποδείξετε ότι: $0,5 \le P(A\cup B) \le 0,7$.

Λύση

Έχουμε P(A) = 0,2 και P(B) = 0,5. Είναι:

- $B \subseteq A\cup B$, οπότε $P(B) \le P(A\cup B) \Leftrightarrow 0,5 \le P(A\cup B)$ (1)

- $P(A\cap B) \ge 0$, οπότε από τον Προσθετικό Νόμο έχουμε:

$$P(A\cap B) \ge 0 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A\cup B) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow P(A\cup B) \le P(A) + P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(A\cup B) \le 0,2 + 0,5 = 0,7 \qquad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν: $0,5 \le P(A\cup B) \le 0,7$

3. Σε ένα πείραμα που διεξήχθη από ψυχολόγους, οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να απαντήσουν στο ακόλουθο ερώτημα:

"Σκεφτείτε έναν πληθυσμό γυναικών με πτυχία στις κοινωνικές επιστήμες. Φανταστείτε ότι επιλέγουμε τυχαία μία γυναίκα από αυτόν τον πληθυσμό. Πώς θα κατατάσσατε τις παρακάτω κατηγορίες γυναικών, από την πιο πιθανή προς τη λιγότερο πιθανή, με βάση την πιθανότητα η επιλεγμένη γυναίκα να ανήκει σε αυτές;"

Οι κατηγορίες που ζητήθηκε να ταξινομήσουν οι συμμετέχοντες είναι οι εξής:
α. Εργάζεται σε πανεπιστήμιο.
β. Είναι παντρεμένη και άνεργη.
γ. Έχει τη δική της επιχείρηση.
δ. Είναι άνεργη.

Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων ταξινόμησε τις κατηγορίες με την εξής σειρά:

1. Εργάζεται σε πανεπιστήμιο.
2. Είναι παντρεμένη και άνεργη.
3. Έχει τη δική της επιχείρηση.
4. Είναι άνεργη.

Θεωρείτε ότι αυτή η ταξινόμηση είναι σωστή σύμφωνα με τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων ή περιέχει κάποιο λάθος; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Υπόδειξη

Η πιθανότητα P(παντρεμένη και άνεργη) είναι μικρότερη ή ίση από την πιθανότητα P(άνεργη), γιατί οι παντρεμένες και άνεργες γυναίκες αποτελούν υποσύνολο των γυναικών που είναι άνεργες.

4. Ένας ξενοδόχος διεξήγαγε μια έρευνα για τα άτομα που διαμένουν στο ξενοδοχείο του. Ο πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα της έρευνάς του:

Τύπος επισκέπτη	Πιθανότητα
Άνδρας	0.7
Γυναίκα	0.3
Έλληνας άνδρας	0.2
Ελληνίδα γυναίκα	0.05
Χορτοφάγος	0.3
Παντρεμένος/η	0.6

α. Ένα άτομο επιλέγεται τυχαία. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πίνακα, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

i. Το άτομο να είναι Έλληνας άντρας ή Ελληνίδα γυναίκα.
ii. Το άτομο να είναι ανύπαντρος/η.
iii. Το άτομο να μην είναι χορτοφάγος.

β. Για ποια από τα παρακάτω ενδεχόμενα ο ξενοδόχος μπορεί να υπολογίσει τις πιθανότητες τους από τα δεδομένα του πίνακα;

i. Το άτομο να μην είναι άνδρας.
ii. Το άτομο να είναι χορτοφάγος και παντρεμένος.
iii. Το άτομο να μην είναι Ελληνίδα γυναίκα.
iv. Το άτομο να είναι παντρεμένη Ελληνίδα γυναίκα.

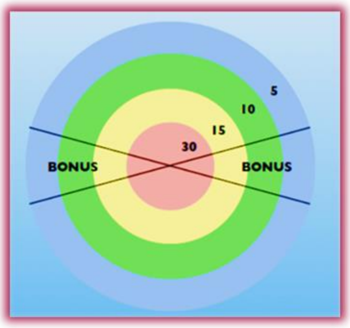
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Υπόδειξη

α. i. 0,25 ii. 0,4 iii. 0,7

β. Μπορεί να υπολογίσει τις πιθανότητες των ενδεχομένων (i) και (iii).

5. Ποια είναι η πιθανότητα να πετύχετε ακριβώς 30 πόντους ρίχνοντας μία φορά το βέλος; Η περιοχή bonus τριπλασιάζει το σκορ σας. Ο εσωτερικός κύκλος έχει ακτίνα 4cm και κάθε δακτύλιος έχει πάχος 4cm. Η επίκεντρη γωνία του τομέα bonus είναι 30°.



Υπόδειξη

Α: Εμβαδόν περιοχής 30 πόντων χωρίς bonus

$$A=\frac{300}{360}4^2\pi=\frac{40\pi}{3} \quad \text{με} \quad P(A)=\frac{\frac{40\pi}{3}}{256\pi}=\frac{5}{96}$$

Β: Εμβαδόν περιοχής 10 πόντων με bonus

$$B=\frac{60}{360}(12^2\pi-8^2\pi)=\frac{40\pi}{3} \quad \text{με} \quad P(B)=\frac{\frac{40\pi}{3}}{256\pi}=\frac{5}{96}$$

Ζητούμενη πιθανότητα: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{96}+\frac{5}{96}=\frac{5}{48}\approx 0{,}104$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.6

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:

Να επιλύουν προβλήματα πιθανοτήτων χρησιμοποιώντας και τους κανόνες λογισμού πιθανοτήτων.

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΥΛΙΚΟ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

1. Σε μια έκθεση μεταχειρισμένων αυτοκινήτων, το 80% έχει μηχανή, το 60% έχει λάστιχα και το 50% έχει μηχανή και λάστιχα. Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο της έκθεσης. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

α. Το αυτοκίνητο να έχει μηχανή ή λάστιχα.

β. Το αυτοκίνητο να έχει μόνο μηχανή.

γ. Το αυτοκίνητο να μην έχει ούτε μηχανή ούτε λάστιχα.

<u>Λύση</u>

Έστω τα ενδεχόμενα:

A: Το αυτοκίνητο να έχει μηχανή.

B: Το αυτοκίνητο να έχει λάστιχα.

Τότε το ενδεχόμενο Το αυτοκίνητο να έχει μηχανή και λάστιχα είναι το $A \cap B$.

Από τα δεδομένα έχουμε:

$$P(A) = 80\%, \quad P(B) = 60\%, \quad P(A \cap B) = 50\%.$$

α. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup B$. Είναι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 80\% + 60\% - 50\% = 90\%.$$

β. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A - B$. Είναι:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 80\% - 50\% = 30\%.$$

γ. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(A \cup B)'$. Είναι:

$$P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 100\% - 90\% = 10\%.$$

2. Σε μια έρευνα μεταξύ μαθητών που χρησιμοποιούν παπάκι, προέκυψε ότι το 45% δεν έχει δίπλωμα, το 30% δεν έχει κράνος και το 20% δεν έχει ούτε δίπλωμα ούτε κράνος. Επιλέγουμε ένα μαθητή που χρησιμοποιεί παπάκι .

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: ″ Ο μαθητής έχει τουλάχιστον ένα από δύο, δίπλωμα ή κράνος".

B: ″ Ο μαθητής έχει και δίπλωμα και κράνος".

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A: ″ Ο μαθητής έχει δίπλωμα"

B: ″ Ο μαθητής έχει κράνος"

Τότε

″Ο μαθητής δεν έχει δίπλωμα" είναι το ενδεχόμενο A'.

″Ο μαθητής δεν έχει κράνος" είναι το ενδεχόμενο B'

″Ο μαθητής δεν έχει ούτε δίπλωμα, ούτε κράνος" είναι ενδεχόμενο το $(A\cup B)'$.

Από τις υποθέσεις έχουμε:

$$P(A') = 0{,}45 \qquad P(B') = 0{,}3 \qquad P[(A\cup B)'] = 0{,}2.$$

α. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A\cup B$. Είναι

$$P(A\cup B) = 1 - P[(A\cup B)'] = 1 - 0{,}20 = 0{,}8.$$

Επομένως το 80% έχουν δίπλωμα ή κράνος.

β. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A\cap B$. Έχουμε

$$P[(A\cup B)'] = 1 - P(A\cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A\cap B)]$$

$$\text{ή} \quad P[(A\cup B)'] = 1 - [1 - P(A') + 1 - P(B') - P(A\cap B)]$$

$$\text{ή} \quad P[(A\cup B)'] = -1 + P(A') + P(B') + P(A\cap B)$$

$$\text{ή} \quad 0{,}2 = -1 + 0{,}45 + 0{,}3 + P(A\cap B)$$

$$\text{ή} \quad P(A\cap B) = 0{,}45.$$

Επομένως και δίπλωμα και κράνος έχει το 45% αυτών που χρησιμοποιούν παπάκι.

3. Μία εταιρεία προσφέρει στους/στις υπαλλήλους της τη δυνατότητα να συμμετέχουν στις τρεις παρακάτω δραστηριότητες:

- Ομάδα πεζοπορίας
- Ομάδα γυμναστικής
- Ομάδα φωτογραφίας

Επιλέγουμε τυχαία έναν/μία από τους υπαλλήλους της εταιρείας. Έστω ότι η πιθανότητα να συμμετέχει ο/η υπάλληλος που επιλέγουμε:

- στην ομάδα πεζοπορίας είναι ίση με $\frac{1}{4}$,

- στην ομάδα γυμναστικής είναι ίση με $\frac{7}{15}$,
- στην ομάδα φωτογραφίας είναι ίση με $\frac{2}{5}$.

α. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κανένας/καμία υπάλληλος δεν συμμετέχει σε περισσότερες από μία δραστηριότητες;

β. Αν η πιθανότητα να επιλέξουμε υπάλληλο που συμμετέχει στην ομάδα της πεζοπορίας ή στην ομάδα της γυμναστικής είναι $\frac{43}{60}$,

i. Να εξετάσετε αν υπάρχουν υπάλληλοι που συμμετέχουν ταυτόχρονα στην ομάδα πεζοπορίας και στην ομάδα γυμναστικής.

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχουν υπάλληλοι της ομάδας φωτογραφίας που συμμετέχουν σε κάποια από τις άλλες ομάδες.

<u>Λύση</u>

Έστω:

Π: το ενδεχόμενο ο/η υπάλληλος να συμμετέχει στην ομάδα πεζοπορίας

Γ: το ενδεχόμενο ο/η υπάλληλος να συμμετέχει στην ομάδα γυμναστικής

Φ: το ενδεχόμενο ο/η υπάλληλος να συμμετέχει στην ομάδα φωτογραφίας

Δεδομένα του προβλήματος: $P(\Pi)=\frac{1}{4},\ \ P(\Gamma)=\frac{7}{15},\ \ P(\Phi)=\frac{2}{5}$

α. Αν υποθέσουμε ότι κανένας/καμία υπάλληλος δεν συμμετέχει σε περισσότερες από μία δραστηριότητες τότε τα ενδεχόμενα Π, Γ και Φ είναι ανά δύο ξένα. Από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας συμπεραίνουμε ότι

$$P(\Pi\cup\Gamma\cup\Phi)=P(\Pi)+P(\Gamma)+P(\Phi)=\frac{1}{4}+\frac{7}{15}+\frac{2}{5}=\frac{67}{60}>1$$

που είναι άτοπο. Επομένως, υπάρχουν υπάλληλοι που συμμετέχουν σε περισσότερες από μία δραστηριότητες.

β. i. Έστω ότι υπάρχουν υπάλληλοι που συμμετέχουν ταυτόχρονα στην ομάδα πεζοπορίας και στην ομάδα γυμναστικής. Τότε $\Pi\cap\Gamma\neq\varnothing$ και επειδή κάθε υπάλληλος της εταιρείας έχει την ίδια (θετική) πιθανότητα να επιλεγεί, συμπεραίνουμε ότι $P(\Pi\cap\Gamma)>0$.

Από τον Προσθετικό Νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&P(\Pi \cup \Gamma) = P(\Pi) + P(\Gamma) - P(\Pi \cap \Gamma) \\
&\Leftrightarrow \frac{43}{60} = \frac{1}{4} + \frac{7}{15} - P(\Pi \cap \Gamma) \\
&\Leftrightarrow \frac{43}{60} = \frac{43}{60} - P(\Pi \cap \Gamma) \\
&\Leftrightarrow P(\Pi \cap \Gamma) = 0
\end{aligned}
$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο. Συνεπώς, δεν υπάρχουν υπάλληλοι που συμμετέχουν ταυτόχρονα στην ομάδα πεζοπορίας και στην ομάδα γυμναστικής.

ii. Αφού:

1. υπάρχουν υπάλληλοι που συμμετέχουν σε περισσότερες από μία δραστηριότητες (α ερώτημα), και
2. δεν υπάρχουν υπάλληλοι που συμμετέχουν ταυτόχρονα στην πεζοπορία και στη γυμναστική (βi ερώτημα),

τότε οι υπάλληλοι που συμμετέχουν σε περισσότερες από μία δραστηριότητες πρέπει να ανήκουν υποχρεωτικά στην ομάδα φωτογραφίας και σε μία από τις άλλες δύο ομάδες (πεζοπορίας ή γυμναστικής).

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων · ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού · ΙΕΠ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ · Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης · ΕΣΠΑ 2021-2027 · Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή

Τίτλος: Ψηφιακό υλικό Εκπαιδευτικού — Έκδοση: 1.0 Ημερομηνία: 26.04.2024

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

ΕΜΠΝΕΥΣΤΕΣ/ ΟΜΑΔΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ/ ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Κωνσταντίνος Ρεκούμης
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Λάμπρος Κατσάπας
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Νικόλαος Κουμάντος
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Ελένη Ρεκούμη
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03