Ιστορικός οδηγός

Η αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας

Σύντομο οδοιπορικό

 **David Hilbert** **Γερμανός μαθηματικός** **(1862-1943)**	 **Marie Legandre** **Σπουδαίος Γάλλος μαθηματικός** **(1752-1833)**

Περιεχόμενα

Στοιχεία από τη μοντέρνα θεμελίωση της Γεωμετρίας

Το περιεχόμενο αυτού του εγχειριδίου προορίζεται για όσους/ες μαθητές/μαθήτριες θα ήθελαν να αποκτήσουν μια σύντομη γνωριμία με την αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας. Αυτό θεωρούμε ότι είναι ένα πολύ σημαντικό στοιχείο για να σχηματίσουν μια πιο σαφή άποψη για το μάθημα, γιατί η αξιωματική θεμελίωση, όπως την έκανε ο Ευκλείδης και περίπου ακολουθείται μέχρι τις μέρες μας στα σχολικά βιβλία, έμελλε να αλλάξει ολόκληρη την πορεία της ανθρώπινης σκέψης και κυρίως τον τρόπο που αναπτύσσεται η επιστημονική σκέψη.

Α. Εισαγωγή

Είναι σχεδόν αδύνατο να περιγράψει κανείς την πλούσια διαδρομή που ακολούθησε η γέννηση και η ανάπτυξη αυτών που διεθνώς πια αποκαλούνται Ελληνικά μαθηματικά. Από τον Πυθαγόρα και τον Θαλή μέχρι τον Ευκλείδη που με το έργο του σφραγίζει έναν τεράστιο άθλο του ανθρώπινου πνεύματος, που δεν είναι άλλο παρά η αυστηρή, αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, υψώνοντας θρυλικές μορφές της μαθηματικής, επιστημονικής και γενικότερα της φιλοσοφικής σκέψης. Μερικές από αυτές τις μορφές αναμφίβολα καταγράφονται στα πρόσωπα του Θεαίτητου, του Πλάτωνα, του Ευδόξου, του Μεναίχμου, του Αριστοτέλη, αλλά και πολλών άλλων εξίσου σπουδαίων στοχαστών που δεν μπορούμε να αναφέρουμε εδώ.

Ο Ευκλείδης λοιπόν, που έδρασε στην Αλεξάνδρεια γύρω στο 300 π. χ., γράφει ένα αριστούργημα, τα Στοιχεία, ένα έργο, το πρώτο, που ήταν μοιραίο σημαδέψει όλη την επόμενη πορεία ανάπτυξης κάθε επιστήμης. Τα Στοιχεία, που δεν περιείχαν μόνο προτάσεις και θεωρήματα που αφορούν αποκλειστικά τη Γεωμετρία, διαδόθηκαν σε όλο τον κόσμο σε ανυπολόγιστα αντίτυπα, κάτι που συνήθως το αναφέρουμε και στις σχολικές τάξεις και φαίνεται, εκτός των άλλων, να συγκινεί τα εφηβικά ανήσυχα μυαλά των μαθητών. Στο εξαιρετικό βιβλίο του George Martin: *The foundations of*

Geometry and the Non-Euclidean plane, από το οποίο θα αντλήσουμε αρκετά στοιχεία ή αναφορές για αυτό το άρθρο διαβάζουμε:

«Τα Στοιχεία του Ευκλείδη υπήρξαν το μέτρο σύγκρισης κάθε μαθηματικής επιστημονικής δημιουργίας για δύο χιλιάδες χρόνια. Ποτέ δεν γράφηκε άλλο βιβλίο, όπως τα Στοιχεία.»

Ο Ευκλείδης, ως γνωστό, έχτισε τη γεωμετρία με αρχιτεκτονική δομή, με αξιωματικό δηλαδή τρόπο, έθεσε ορισμούς και αξιώματα και πάνω σε αυτή τη δομή ανέπτυξε τα θεωρήματα με λογική σειρά, θεμελιώνοντας έτσι και παρουσιάζοντας το επίτευγμα που λέμε Ευκλείδεια Γεωμετρία. Με ένα τέτοιο έργο που καταπιάστηκαν στη συνέχεια μεγάλα μυαλά της σκέψης, θα ήταν σχεδόν αδύνατο να μην υπάρξουν και μελετητές ή ερευνητές που δεν θα προσπαθήσουν να βρουν ή ψήγματα ασαφειών, λάθη ή ατέλειες στο όλο οικοδόμημα. Το σημείο όμως που συγκέντρωσε το μεγαλύτερο ενδιαφέρον ήταν το πέμπτο αξίωμα, το αξίωμα των παραλλήλων, το οποίο πολύ σοφά, όπως αποδείχθηκε, ο Ευκλείδης άφησε τελευταίο. Σπουδαίος μαθηματικός από την εποχή του μέχρι τον 19^{ο} αιώνα θεωρούσαν ότι το αξίωμα αυτό μπορεί να αποδειχθεί από τα προηγούμενα και ως εκ τούτου αυτό πρέπει να «εκπέσει» σε θεώρημα. Η πολύχρονη αυτή προσπάθεια διαρκείας δύο χιλιάδων χρόνων στέφτηκε με … αποτυχία, χάρισε όμως στη μαθηματική επιστήμη ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του 19^{ου} αιώνα, την Υπερβολική Γεωμετρία. Ορισμένα από τα διάσημα ονόματα που συστηματικά καταπιάστηκαν με το αξίωμα αυτό ή, που εσφαλμένα νόμισαν ότι απέδειξαν το Ευκλείδειο Αίτημα είναι και τα εξής: Πτολεμαίος (2^{ος} π. Χ. αιώνας), Πρόκλος (410-485), Nasir-Eddin (1201-1274), John Wallis (1616-1703), Giordano Vitale (1633-1711), Gerolamo Saccheri (1667-1733), Johann Lampert (1728-1777), John Playfair (1748-1819), Charles Dodgson, Lewis Carrol (1832-1897).

Σκόπιμα δεν αναφέραμε στα παραπάνω ονόματα τον εξαιρετικό μαθηματικό Marie Legendre (1752-1833) Ο Legendre, αναμφίβολα μαθηματικός περιωπής, συνέγραψε βιβλίο Éléments de géométrie που σχεδόν για 30 χρόνια επέδρασε σημαντικά στη χώρα του. Στις 12 εκδόσεις του βιβλίου προσπάθησε αρκετές φορές να αποδείξει το πέμπτο Αξίωμα. Σε μια μονογραφία του το 1833, ακριβώς 100 χρόνια από την έκδοση του βιβλίου του Saccheri, συγκέντρωσε συστηματικά αρκετά θεωρήματα (με νέες αποδείξεις) με σκοπό να πετύχει το σκοπό του.

Μια εξαιρετική απόπειρα «τιθάσευσης» του περιβόητου 5^{ου} αξιώματος θα παρουσιάσουμε σε άλλο σημείο. Σημειώνουμε όμως ότι αν και είναι βασική επιδίωξη αυτού του κειμένου η παρουσίαση των αποτυχημένων προσπαθειών απόδειξης του Ευκλείδειου

Αιτήματος, ωστόσο προτρέπουμε κάθε αναγνώστη να ανατρέξει στις πηγές και να γευτεί την ευφυΐα όλων αυτών των επιχειρημάτων.

Μετά τις εργασίες των Saccheri και Legendre, οι επόμενοι μαθηματικοί, όπως οι Gauss, Bolyai και Lobachevsky, θα απαντήσουν στον αιώνα που ακολουθεί οριστικά στο κρίσιμο ερώτημα της απόδειξης του $5^{ου}$ αξιώματος και θα οδηγηθούν στην ανακάλυψη της Υπερβολικής Γεωμετρίας, μιας γεωμετρίας εξίσου «λογικής» με την Ευκλείδεια, αφήνοντας έτσι τον Ευκλείδη επιτέλους ήσυχο να απολαύσει αιώνια την ικανοποίησή του ότι πράγματι το $5^{ο}$ αξίωμα που έθεσε είναι αναγκαίο, ότι δηλαδή δεν μπορεί να αποδειχθεί από τα υπόλοιπα!

Τι είναι το αξιωματικό σύστημα;

Η αυστηρή θεμελίωση της Γεωμετρίας, δηλαδή η ανάπτυξή της χωρίς κενά ή αυθαιρεσίες, δεν μπορεί να γίνει αν όλο το οικοδόμημα δεν χτιστεί βήμα-βήμα, με κανόνες και περιορισμούς. Στη γεωμετρία, μια τέτοια θεμελίωση γίνεται εισάγοντας:

- Ένα περιορισμένο σύνολο από **μη οριζόμενους όρους,** όπως π. χ. το σημείο και η ευθεία,
- μία σχέση ανάμεσα στα σημεία και τις ευθείες, όπως π. χ. «το σημείο Α ανήκει στην ευθεία (ε)»,
- ένα ελάχιστο πλήθος αξιωμάτων, προτάσεων δηλαδή, των οποίων την ισχύ (αλήθεια) δεχόμαστε a priori, **χωρίς** δηλαδή **απόδειξη**.

Διάγραμμα αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας

3. Ορισμοί-Θεωρήματα

Τα θεωρήματα και κάθε άλλη πρόταση πρέπει να προκύπτουν με αποδεικτική πορεία κάνοντας χρήση μόνο των ορισμών, των αξιωμάτων και την θεωρημάτων που έχουν ήδη αποδειχθεί

2. Αξιώματα

Προτάσεις που τις δεχόμαστε χωρίς απόδειξη

1. Πρωταρχικές έννοιες-Μη οριζόμενοι όροι:

Σημείο-Ευθεία-Επίπεδο

Το πρώτο πράγμα λοιπόν που πρέπει να κατακτήσουμε για να δημιουργήσουμε μια γεωμετρία, είναι ότι πρέπει να απαλλαχθούμε από την εικόνα που έχουμε σχηματίσει στα σχολικά μας χρόνια για τη «μορφή» ή την «ουσία» των σημείων και των ευθειών. Αντί π. χ. για σημεία μπορεί να έχουμε καρέκλες και αντί για ευθείες να έχουμε τραπέζια, όπως χαρακτηριστικά έχει ειπωθεί.

Τα αξιώματα μιας μαθηματικής θεωρίας πρέπει και αυτά να ικανοποιούν κάποιες γενικές αρχές, τις οποίες δεν θα περιγράψουμε εδώ αναλυτικά. Αναφέρουμε μόνο ότι αυτά πρέπει να είναι ανεξάρτητα και συμβιβαστά, να μην προκύπτουν δηλαδή από αυτά αντιφατικές προτάσεις. Στο παρόν άρθρο θα βασιστούμε στο αξιωματικό σύστημα του Hilbert, όπως αναπτύχθηκε στο περίφημο και διαχρονικό έργο του Grundlagen der Geometrie (Θεμέλια της Γεωμετρίας). Αξίζει όμως να αναφέρουμε ότι μετά από το έργο αυτό του Hilbert έχουν διατυπωθεί και άλλα αξιωματικά συστήματα για την Ευκλείδεια (και την Υπερβολική) γεωμετρία, τα οποία σε ορισμένα σημεία έχουν πλεονεκτήματα.

Ένα τέτοιο σύστημα είναι του Mario Pieri (1860-1913), μαθητή του Peano, ο οποίος ως μη οριζόμενους όρους χρησιμοποιεί το «σημείο» και την «κίνηση» (motion). Οι κινήσεις δεν είναι τίποτα άλλο στην ουσία παρά μετασχηματισμός του συνόλου των σημείων (επιπέδου). Μια άλλη μορφή αξιωματικού συστήματος έχουν προτείνει ο Birkoff (το χρησιμοποιούν στα εξαιρετικά βιβλία τους οι Martin και Milman-Parker) και ο Pogorelov. Όπως όμως προαναφέραμε δεν είναι στους σκοπούς αυτής της εργασίας η παράθεση ή ο σχολιασμός άλλων αξιωματικών συστημάτων, αν και παρουσιάζουν αρκετό ενδιαφέρον. Ο αναγνώστης όμως που διαθέτει τον σχετικό χρόνο μπορεί να ανατρέξει στα προαναφερθέντα συγγράμματα.

Τέλος, αν από τα αξιωματικά αυτά συστήματα αφαιρέσουμε το αξίωμα του Ευκλείδη (ή των ισοδυνάμων του) για τις παράλληλες ευθείες, τότε έχουμε την απόλυτη (ή ουδέτερη) γεωμετρία.

1. Αξιώματα και Θεμελιώδη Θεωρήματα

Στην ενότητα αυτή δίνονται με συστηματικό τρόπο τα αξιώματα της Γεωμετρίας. Το αξιωματικό σύστημα που ακολουθείται είναι αυτό που παρουσίασε ο Hilbert. Οι τέσσερεις πρώτες ομάδες αξιωμάτων αποτελούν τα αξιώματα της Απολύτου γεωμετρίας. Η πέμπτη ομάδα αποτελείται από ένα αξίωμα. Αν πάρουμε και αυτό έχουμε την Ευκλείδεια γεωμετρία, ενώ αν πάρουμε την άρνηση του έχουμε την Υπερβολική γεωμετρία. Μία αναλυτική *παρουσίαση βρίσκεται στο [2]. Εμείς εδώ θα παρουσιάσουμε τις τέσσερεις πρώτες ομάδες αξιωμάτων. Θα διατυπώσουμε κάποια βασικά θεωρήματα που προκύπτουν και ενδεικτικά θα δώσουμε κάποιες αποδείξεις ώστε ο αναγνώστης να καταλάβει το πώς προκύπτουν μερικά ''προφανή'' συμπεράσματα με τον σωστό τρόπο.*

Οι βασικές γεωμετρικές και **μη οριζόμενες έννοιες** της γεωμετρίας είναι οι εξής:

1) Τα σημεία.

2) Οι ευθείες

3) Τα επίπεδα

Τα γεωμετρικά στοιχεία είναι επομένως **μη οριζόμενες έννοιες**.

Παρακάτω θα παραθέσουμε τα αξιώματα που συνδέουν τα γεωμετρικά στοιχεία. Τα αξιώματα που παραθέτουμε είναι αυτά που εισήγαγε ο D. Hilbert στο διάσημο βιβλίο του Die Grundlagen der Geometrie και έχει μεταφραστεί σε πολλές γλώσσες. Σε αυτό ο Hilbert προσπάθησε να άρει όσες ασάφειες άφηνε το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη. Ας μην ξεχνάμε ότι αυτό το έκανε ο Hilbert γνωρίζοντας ήδη την Υπερβολική γεωμετρία, έχοντας δηλαδή μπροστά του ολόκληρη την Οδύσσεια για την απόδειξη του 5^{ου} αιτήματος του Ευκλείδη και την συνεπακόλουθη ανακάλυψη των μην Ευκλείδειων Γεωμετριών.

Τα αξιώματα χωρίζονται σε 5 ομάδες. Αυτές είναι οι παρακάτω:

1) Τα αξιώματα σύνδεσης.

2) Τα αξιώματα διάταξης.

3) Τα αξιώματα σύνδεσης ισοδυναμίας.

4) Τα αξιώματα συνέχειας.

5) Το αξίωμα της παραλληλίας.

Οι 4 πρώτες ομάδες αξιωμάτων απαρτίζουν την **Απόλυτη Γεωμετρία**. Στην αρχή θα ασχοληθούμε με τις 4 πρώτες ομάδες αξιωμάτων, βάζοντας ενδεικτικά μόνο μερικά από αυτά, ώστε να γίνει πιο σαφής η ομαδοποίηση και η σημασία τους. Το αξίωμα των παράλληλών ευθειών τίθεται τελευταίο και είναι αυτό που χωρίζει το δρόμο προς την Ευκλείδεια ή προς την Υπερβολική Γεωμετρία.

Τα **αξιώματα σύνδεσης**

(Ι. 1) Από οποιαδήποτε δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία.

(Ι. 2) Σε κάθε ευθεία υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία.

(I. 3) Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Τα **αξιώματα διάταξης**

Εδώ χρειαζόμαστε τη μη οριζόμενη έννοια «**μεταξύ»**:

Αν έχουμε Α, Β, Γ τρία διαφορετικά σημεία μίας ευθείας, τότε κάποιο από αυτά είναι **«μεταξύ»** των δύο άλλων.

(II. 1) Αν Α, Β, Γ είναι τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας και το Β βρίσκεται μεταξύ των Α, Γ, τότε το Β βρίσκεται μεταξύ των Γ, Α.

(II. 2) Αν Α, Γ δύο διαφορετικά σημεία μιας ευθείας, τότε υπάρχει σημείο Β της ευθείας, ώστε το Γ να βρίσκεται μεταξύ των Α, Β.

(II. 3) Αν Α, Β, Γ είναι τρία διαφορετικά σημεία της ίδιας ευθείας, τότε ακριβώς ένα βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων.

(II. 4) *(Moritz Pasch).* Έστω Α, Β, Γ τρία διαφορετικά σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Θεωρούμε ευθεία (ε) που δεν περιέχει τα Α, Β, Γ. Αν η (ε) έχει ένα σημείο μεταξύ των Α, Β, τότε θα έχει ένα σημείο μεταξύ των Α, Γ ή μεταξύ των Β, Γ.

Οι πρώτοι ορισμοί

(α) Έστω Α, Β δύο διαφορετικά σημεία. **Ευθύγραμμο τμήμα** είναι το σύνολο των σημείων Μ που βρίσκονται μεταξύ των Α, Β, δηλαδή $AB = \{M : [AMB]\}$, μαζί με τα άκρα Α και Β.

Σε ορισμένα συγγράμματα, τα άκρα δεν συμπεριλαμβάνονται στο τμήμα. Τονίζουμε ότι με τον συμβολισμό ΑΜΒ (ή με τον Α-Μ-Β) εννοούμε ότι το Μ βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία Α και Β.

(β) Η **γωνία** ορίζεται ως το σχήμα που αποτελείται από δύο διαφορετικές ημιευθείες με κοινό αρχικό σημείο. Οι ημιευθείες αυτές λέγονται πλευρές της γωνίας. Αν α, β είναι ημιευθείες, συμβολίζουμε τη γωνία με $\angle(\alpha, \beta)$ ή με $(\widehat{\alpha, \beta})$

Θεώρημα 1. 7. Έστω τα διαφορετικά σημεία Α, Β.

i) Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει ν τουλάχιστον σημεία όπου $\nu \in \mathbb{N}$.

ii) Η ευθεία που ορίζουν τα Α, Β έχει άπειρα σημεία (όπως επίσης και το τμήμα ΑΒ έχει άπειρα σημεία).

Θεώρημα 1. 8. Κάθε ευθεία (ε) χωρίζει όλα τα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν σε αυτήν σε δύο ξένα σύνολα.
Αν τα σημεία Μ, Ν βρίσκονται σε διαφορετικά σύνολα, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ τέμνει την (ε). Υπάρχει επομένως σημείο Κ της (ε) με Μ-Κ-Ν.
Αν τα Μ, Ν ανήκουν στο ίδιο σύνολο, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ δεν τέμνει την (ε).

Τα **αξιώματα Σύνδεσης-Ισοδυναμίας (Congruence)**

(ΙΙΙ. 1) Αν Α, Β είναι δύο διαφορετικά σημεία στην ευθεία (ε) και Α′ είναι ένα σημείο της ίδιας ευθείες ή μιας άλλης (ε′), τότε μπορεί πάντοτε να βρεθεί σημείο Β′ που βρίσκεται στο δεδομένο από το σημείο Α′ μέρος της ευθείας (ε′), ώστε το τμήμα ΑΒ να είναι ισοδύναμο (ίσο) με το Α′Β′.

(ΙΙΙ. 2) Αν δύο τμήματα είναι ισοδύναμα προς τρίτο, τότε είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα.

(ΙΙΙ. 3) Έστω ΑΒ, ΒΓ δύο τμήματα της ευθείας (ε) που δεν έχουν κοινά σημεία και έστω επίσης Α′Β′, Β′Γ′ δύο άλλα τμήματα της ίδιας ή άλλης ευθείας (ε') που δεν έχουν κοινό σημείο. Αν $AB = A'B'$ και $B\Gamma = B'\Gamma'$, τότε $A\Gamma = A'\Gamma'$.

Ορισμός γωνίας

(ΙΙΙ. 4) Από δεδομένη ημιευθεία σε δεδομένο ημιεπίπεδο που ορίζεται από αυτή την ημιευθεία και την προέκτασή της, μπορεί να σχηματισθεί μία μοναδική γωνία ισοδύναμη με μια δεδομένη γωνία.

(ΙΙΙ. 5) Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, $A_1B_1\Gamma_1$ έχουν $AB = A_1B_1$, $A\Gamma = A_1\Gamma_1$ και $\hat{A} = \hat{A}_1$, τότε $\hat{B} = \hat{B}_1$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1$.

(ΙΙΙ. 6) Αν η γωνία $\angle(\alpha,\beta)$ είναι ισοδύναμη με την $\angle(\alpha',\beta')$ και η γωνία $\angle(\alpha,\beta)$ είναι ισοδύναμη με την $\angle(\alpha'',\beta'')$, τότε και οι γωνίες $\angle(\alpha',\beta')$, $\angle(\alpha'',\beta'')$ είναι ισοδύναμες.

Τα **αξιώματα της Συνέχειας**

(IV. 1) Έστω ΑΒ, ΓΔ δύο τμήματα. Στην ευθεία που ορίζουν τα Α, Β υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός σημείων A_1, $A_2, \ldots$, A_n, τέτοιων ώστε τα τμήματα

$$AA_1\ ,A_1A_2\ ,\ldots\ ,A_{n-1}A_n$$

να είναι ισοδύναμα με το ΓΔ και το σημείο Β βρίσκεται μεταξύ των Α και A_n.

(Εύδοξος-Αρχιμήδης).

(IV. 2) Τα σημεία μιας ευθείας σχηματίζουν σύστημα, το οποίο, τηρούμενης της γραμμικής διάταξης του πρώτου αξιώματος ισοδυναμίας και του IV. 1, δεν είναι επεκτάσιμο. Δηλαδή σε αυτό το σύστημα σημείων δεν είναι δυνατόν να προστεθεί ένα ακόμα σημείο, έτσι ώστε στο επεκτεταμένο σύστημα που αποτελείται από το αρχικό και το συμπληρωματικό σημείο να ικανοποιούνται τα παραπάνω αξιώματα.

Σε ορισμένα συγγράμματα ως δεύτερο αξίωμα συνέχειας μπορούμε να θεωρήσουμε το παρακάτω:

Αν έχουμε μια γνήσια φθίνουσα ακολουθία κλειστών τμημάτων, τότε η άπειρη τομή τους είναι ένα και μόνο σημείο.

2. Απόλυτη (ουδέτερη) Γεωμετρία

*Όταν λέμε **Απόλυτη Γεωμετρία** εννοούμε εκείνο το μέρος της Γεωμετρίας που είναι κοινό και στην Ευκλείδεια και στην Υπερβολική. Στην ουσία η Απόλυτη γεωμετρία περιέχει τις έννοιες και τις προτάσεις που **δεν** χρησιμοποιούν το αξίωμα του Ευκλείδη ή την άρνησή του. Ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα της απόλυτης γεωμετρίας είναι το παρακάτω, αφού με αυτό αποδεικνύεται η ύπαρξη παράλληλων ευθειών αλλά και πλήθος από άλλα χρήσιμα συμπεράσματα.*

Θεώρημα 2. 1.

Σε κάθε τρίγωνο καθεμιά από τις εξωτερικές του γωνίες είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι εσωτερικές.

Πόρισμα.

Το άθροισμα δύο γωνιών τριγώνου είναι μικρότερο από π.

Πρόταση 2. 2

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και πλευρές $B\Gamma = \alpha$, $\Gamma A = \beta$, $AB = \gamma$.

i) Αν $\beta > \gamma$, τότε $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.

ii) Αν $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, τότε $\beta > \gamma$.

Πρόταση 2. 3.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$, $B\Gamma = \alpha$. Ισχύει τότε ότι $\alpha < \beta + \gamma$ και αντίστοιχα για τις άλλες πλευρές.

Τριγωνική Ανισότητα

Πρόταση 2. 4.

Έστω Α, Β διαφορετικά σημεία του επιπέδου και Γ_1, $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ διαφορετικά ανά δύο σημεία. Ισχύει ότι

$$AB \le A\Gamma_1 + \Gamma_1\Gamma_2 + \ldots + \Gamma_{n-1}\Gamma_n + \Gamma_n B.$$

Πρόταση 2. 5(Open mouth theorem).

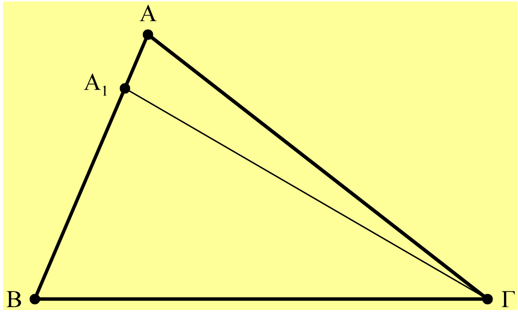
Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ, $A_1B_1\Gamma_1$ με $AB = A_1B_1$, $A\Gamma = A_1\Gamma_1$.

i) Αν $\hat{A} < \hat{A}_1$, τότε $B\Gamma < B_1\Gamma_1$.

ii) Αν $B\Gamma < B_1\Gamma_1$, τότε $\hat{A} < \hat{A}_1$.

Πρόταση 2. 6. Κριτήριο ΓΓΠ.

Αν ΑΒΓ, $A_1B_1\Gamma_1$ είναι δύο τρίγωνα με $\hat{A} = \hat{A}_1$, $\hat{B} = \hat{B}_1$ και $B\Gamma = B_1\Gamma_1$, τότε αυτά είναι ίσα (ΓΓΠ).



Απόδειξη

Θα εργαστούμε με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο

Αν είναι $AB = A_1B_1$, τότε από το κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΓΠ), αυτά θα είναι ίσα. Έστω λοιπόν ότι $A_1B_1 < AB$. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε σημείο A_1, ώστε $A_1B = A_1B_1$. Αυτό κείται μεταξύ των Α, Β. Το τρίγωνο $A_1B\Gamma$ είναι ίσο με το $A_1B_1\Gamma_1$ από το κριτήριο ΠΓΠ.

Τότε όμως $\hat{A}_1 = \hat{A}$ που είναι ΑΤΟΠΟ, γιατί η γωνία $\hat{A}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A_1A\Gamma$ ■

Θεώρημα 2. 7. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Αν ΑΜ, ΑΔ, ΑΗ είναι αντίστοιχα η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος, τότε η σειρά στον φορέα της ΒΓ των σημείων Μ, Δ, Η είναι Η-Δ-Μ-Γ.

Πρόταση 2. 8. Έστω ευθεία (ε) και σημείο Α εκτός αυτής. Από το Α διέρχεται ευθεία που δεν τέμνει την (ε).

Η πρόταση αυτή πολύ βασική.

Το ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι ίσο με 180 μοίρες είναι πρόταση της Ευκλείδειας γεωμετρίας, δηλαδή είναι μια πρόταση που για την απόδειξή της χρειαζόμαστε το αξίωμα των παράλληλων ευθειών. Τι μπορούμε όμως να ξέρουμε για αυτό το άθροισμα μέχρι να εισάγουμε αυτό το αξίωμα;

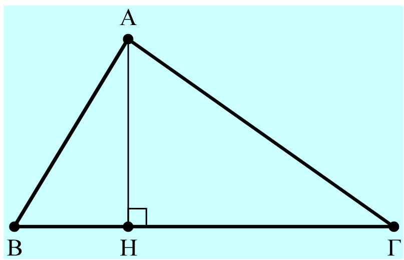
Οι παρακάτω προτάσεις έχουν ιδιαίτερη θέση στην απόλυτη γεωμετρία.

Πρόταση 2. 9

Αν σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι σταθερό ίσο με c, τότε $c = \pi$.

Απόδειξη*

Παίρνουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} < 1$·· και φέρουμε το ύψος του ΑΗ.



Από το τρίγωνο ΑΒΗ προκύπτει ότι: $\hat{B} + B\hat{A}H + 1^{\cdot\cdot} \doteq c$.

Θεώρημα 2. 10.

Αν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \pi$, τότε σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι π.

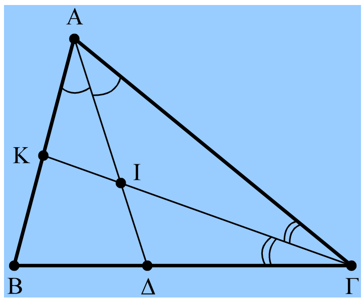
Αν και στο βιβλίο αποδεικνύουμε την παρακάτω πρόταση στα αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου, αυτή είναι πρόταση της απόλυτης γεωμετρίας και αφορά τις διχοτόμους τριγώνου. Ας την δούμε:

Θεώρημα 2. 11.

Σε κάθε τρίγωνο οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη διχοτόμο ΑΔ από την κορυφή Α. Φέρουμε τη διχοτόμο ΓΚ με Β-Κ-Α. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι αυτές οι διχοτόμοι τέμνονται.



Η ΓΚ στο τρίγωνο ΑΒΔ τέμνει την ΑΒ σε ένα σημείο μεταξύ των Α, Β. Επίσης, λόγω του γεγονότος ότι Β-Δ-Γ, αυτή δεν τέμνει την ΒΔ. Από το αξίωμα του Pasch θα τέμνει την ΑΔ στο Ι. Το Ι ισαπέχει από τις ΑΒ, ΑΓ, λόγω της διχοτόμου ΑΔ, και από τις ΑΓ, ΒΓ, λόγω της διχοτόμου ΓΚ. Άρα ισαπέχει από τις ημιευθείες ΒΑ, ΒΓ, οπότε βρίσκεται στη διχοτόμο που φέρνουμε από το Β. ■

Η παρακάτω πρόταση ισχύει γενικότερα στην απόλυτη γεωμετρία, δίνουμε όμως μια πιο ειδική μορφή.

Πρόταση 2. 12.

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι διάμεσοί του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Πρόταση 2. 13

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ,στο οποίο οι διαγώνιοι του ΑΓ,ΒΔ διχοτομούνται. Τότε:

(α) $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$

(β) Οι ευθείες που ορίζονται από τις απέναντι πλευρές δεν τέμνονται.

(γ) Είναι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, $\hat{B} = \hat{\Delta}$

Απόδειξη

(α) Έστω Μ το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ,ΒΔ. Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΔΜΓ είναι ίσα (ΠΓΠ)

Επομένως ΑΒ=ΓΔ

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΜ,ΒΜΓ προκύπτει ότι ΑΔ=ΒΓ.

(β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΜΒ και ΔΜΓ έχουμε ότι $\angle AB\Delta = \angle B\Delta\Gamma$

Άρα οι ευθείες που ορίζονται από τα σημεία Α,Β και Γ,Δ δεν τέμνονται.

Ομοίως από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΜ,ΒΜΓ προκύπτει οι ευθείες που ορίζονται από τα Α,Δ και Γ,Β δεν τέμνονται.

(γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΜ,ΒΜΓ προκύπτει ότι $\angle \Gamma B\Delta = \angle B\Delta A$

Έτσι έχουμε ότι $\hat{B} = \angle AB\Delta + \angle \Gamma B\Delta = \angle B\Delta\Gamma + \angle B\Delta A = \hat{\Delta}$

Ομοίως εργαζόμαστε και για τις άλλες δύο γωνίες. ■

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι ότι:

(α) Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ, στο οποίο οι διαγώνιοι του ΑΓ,ΒΔ διχοτομούνται και είναι ίσες επιπλέον ισχύει ότι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$

(β) Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ, στο οποίο οι διαγώνιοι του ΑΓ,ΒΔ διχοτομούνται και είναι κάθετες επιπλέον ισχύει ότι $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$

(γ) Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ, στο οποίο οι διαγώνιοι του ΑΓ,ΒΔ διχοτομούνται, είναι κάθετες και ίσες επιπλέον ισχύει ότι $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$ και $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$

3. Το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη και τα ισοδύναμά του

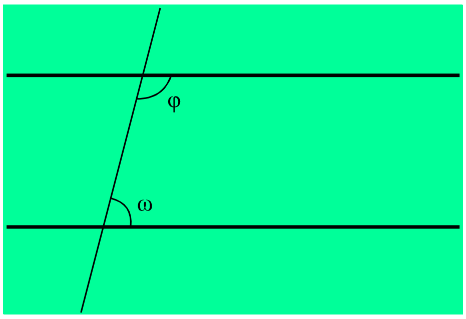
Στην παράγραφο αυτή ολοκληρώνουμε την παράθεση των αξιωμάτων της Απόλυτης γεωμετρίας, προσθέτοντας ένα ακόμα αξίωμα. Αυτό δεν είναι κανένα άλλο, παρά το …περιβόητο και πολυσυζητημένο ***Πέμπτο Αξίωμα του Ευκλείδη****. Με την πρόσθεση αυτού του αξιώματος στα προηγούμενα που αναφέραμε δημιουργείται η γνωστή μας* ***Ευκλείδεια γεωμετρία****, με την οποία όλοι μας είμαστε εξοικειωμένοι. Ας πούμε σε αυτό το σημείο ότι παρά την τεράστια διαχρονική προσπάθεια που κράτησε σχεδόν δύο χιλιετίες για να αποδειχθεί ότι το αξίωμα αυτό πηγάζει ως θεώρημα από τα υπόλοιπα αξιώματα, η προσπάθεια αυτή απέβη άκαρπη. Το όφελος ωστόσο αυτής της αναζήτησης χάρισε στην ανθρωπότητα μια νέα γεωμετρία, την υπερβολική.*

Αν θέλουμε να οδηγηθούμε στην **Ευκλείδεια Γεωμετρία,** τότε ως $5^η$ ομάδα αξιωμάτων θα πρέπει να βάλουμε ένα και μοναδικό αξίωμα, το επόμενο:

5^o Αίτημα του Ευκλείδη

Αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες αυτές:

$\varphi + \omega < 180^0$



Η διατύπωση του Ευκλείδη ήταν κατά λέξη η εξής:

Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Το 5^o αίτημα του Ευκλείδη.

Αυτό είναι το περίφημο πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη.
Έχουμε δει ότι αν έχουμε μία ευθεία (ε) και ένα σημείο Α που δεν ανήκει σε αυτήν, τότε υπάρχει ευθεία που περιέχει το Α και δεν τέμνει την (ε).
Το αξίωμα του Ευκλείδη μπορεί να αντικατασταθεί από το ισοδύναμό του (John Playfair):

Από σημείο εκτός ευθείας μία μόνο ευθεία υπάρχει που διέρχεται από αυτό και δεν τέμνει την ευθεία.

Είναι άμεσο να δούμε την ισοδυναμία των δύο αξιωμάτων.
Αν από το σημείο διέρχεται μία μόνο ευθεία, αυτή θα είναι τέτοια, ώστε $\omega + \varphi = 180^0$. Επομένως αν $\omega + \varphi < 180^0$, οι ευθείες θα τέμνονται.
Αντίστροφα, αν για $\omega + \varphi < 180^0$ οι ευθείες τέμνονται, τότε η μοναδική ευθεία που δεν την τέμνει θα είναι αυτή, για την οποία

ισχύει ότι

$$\omega+\varphi=180^0 .$$

Θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στο ότι αυτά συμβαίνουν σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο και όχι στο χώρο. Ευθείες στο ίδιο επίπεδο που δεν τέμνονται ονομάζονται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία **παράλληλες**.

Το αξίωμα του Ευκλείδη είναι ισοδύναμο με τις εξής προτάσεις:

1) Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 180^0.

2) Υπάρχει τρίγωνο με άθροισμα γωνιών ίσο με 180^0.

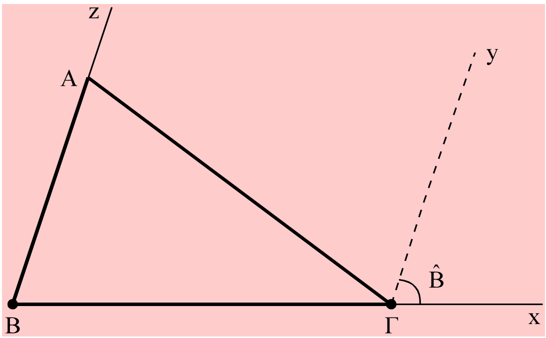
Οι προτάσεις (1) και (2) είναι ισοδύναμες. Αυτό σημαίνει ότι αν δεχθούμε τη μία ως αξίωμα, τότε η άλλη προκύπτει ως θεώρημα.

Θεώρημα 3. 1.

Αν ισχύει το Ευκλείδειο αίτημα, τότε το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180^0.

Απόδειξη

Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την ημιευθεία Γy, ώστε $x\hat{\Gamma}y=\hat{B}$.



Η ημιευθεία Γy δεν τέμνει την ευθεία που ορίζουν τα Α, Β, γιατί διαφορετικά θα είχαμε εξωτερική γωνία τριγώνου ίση με απέναντι εσωτερική. Άρα η Γy θα είναι η μοναδική ευθεία που περνάει από το Γ και δεν τέμνει την ευθεία που ορίζουν τα Α, Β. Έτσι αναγκαστικά:

$$A\hat{\Gamma}y+\Gamma\hat{A}z=180^0.$$

Αυτή δίνει ότι $\hat{A}=A\hat{\Gamma}y$. Άμεσα είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=2\cdot\cdot$.

Θεώρημα 3. 2. Αν σε ένα τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι 180^0., τότε ισχύει το ευκλείδειο αίτημα.

4. Προσπάθειες απόδειξης του πέμπτου Ευκλείδειου αιτήματος

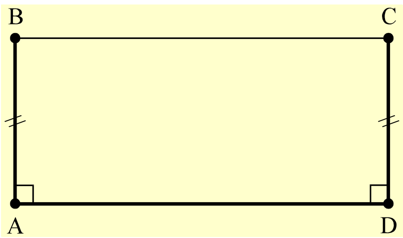
Μέχρι οι Bolyai και Lobachevsky να δημιουργήσουν την Υπερβολική Γεωμετρία, είχαν γίνει πολλές προσπάθειες για την απόδειξη του 5^{ου} Ευκλείδειου αιτήματος. Η προσπάθεια ήταν να αποδειχθεί κάποιο ισοδύναμό αυτού του αξιώματος Παραθέτουμε στη συνέχεια κάποιες ισοδύναμες προτάσεις.

1) (John Playfair) Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μοναδική ευθεία που δεν την τέμνει.
2) Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι $2^{\cdot\cdot}$.
3) (John Wallis) Υπάρχουν δύο όμοια τρίγωνα που δεν είναι ίσα.
4) Υπάρχει ζεύγος ευθειών που ισαπέχουν η μία της άλλης.
5) Δοθέντων τριών σημείων που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, υπάρχει κύκλος που περνάει από αυτά.
6) Αν δύο ευθείες δεν τέμνονται, τότε κάθε ευθεία που τέμνει μία από αυτές τέμνει και την άλλη.
7) (Lambert) Αν τρεις γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι ορθές, τότε είναι και η τέταρτη.
8) Υπάρχει τρίγωνο με όσο μεγάλο εμβαδό θέλουμε.
9) Δυο ευθείες που δεν τέμνονται έχουν κοινή κάθετο.
10) Από κάθε σημείο μέσα σε μια γωνία μικρότερη των 60 μοιρών μπορούμε να βρούμε ευθεία πού περνάει από αυτό και τέμνει και τις δύο πλευρές της.
11) Μια ευθεία δεν μπορεί να βρίσκεται στο εσωτερικό μιας γωνίας.
12) Δύο ευθείες που δεν τέμνουν μια τρίτη δεν τέμνονται.

Το τετράπλευρο Saccheri

Αν σε ένα τετράπλευρο ABCD είναι:

$$AB = CD \quad \text{και} \quad \hat{A} = \hat{D} = 90^o,$$

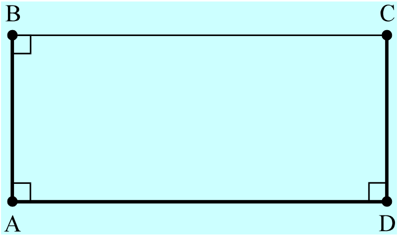


τότε το τετράπλευρο ABCD λέγεται **τετράπλευρο Saccheri** και συμβολίζεται με (S)ABCD.

- Η AD λέγεται **κάτω** και η BC **άνω βάση** του (S)ABCD.
- Οι γωνίες B και C λέγονται **γωνίες της άνω βάσης** του τετραπλεύρου.

Σημειώνουμε ότι είναι $(S)ABCD = (S)DCBA$. Δεν είναι σωστό να γράψουμε ότι αν (S)ABCD, τότε (S)BCDA.

Αν ένα τετράπλευρο ABCD έχει ορθές γωνίες στις κορυφές A, B και D, τότε αυτό λέγεται **τετράπλευρο Lampert** και συμβολίζεται με (L)ABCD.



Σημειώνουμε εδώ ότι έχει σημασία η σειρά, με την οποία γράφουμε τα γράμματα. Έτσι (L)ABCD = (L)ADCB, ωστόσο όμως το (L)ABCD δεν εξασφαλίζει ότι (L)DCBA.

Τα τετράπλευρα Saccheri και Lampert δημιουργήθηκαν στην προσπάθεια απόδειξης του 5ου αιτήματος.

Πρόταση

Έστω ABCD τετράπλευρο Saccheri. Ισχύουν τα εξής:

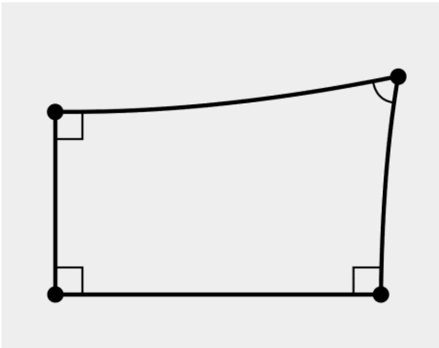
1) Αν M το μέσον της AD και N το μέσον της BC, τότε η MN είναι κάθετος στην AD και BC. Επίσης οι ευθείες που ορίζουν οι AD, BC δεν τέμνονται.

2) $\hat{B} = \hat{C}$

3) $BC \geq AD$

Ο Saccheri και οι 3 Υποθέσεις

Σε ένα τετράπλευρο Saccheri αποδείξαμε ότι οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{C}$ είναι ίσες. Για να αποδείξει ο Saccheri το 5ο αίτημα έκανε τρεις υποθέσεις:



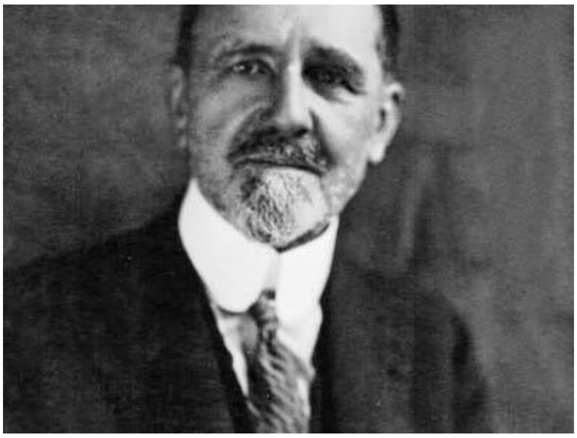
- Η υπόθεση της οξείας γωνίας:

Υπάρχει τετράπλευρο Saccheri με γωνίες της άνω βάσης οξείες.

- Η υπόθεση της ορθής γωνίας:

Υπάρχει τετράπλευρο Saccheri με γωνίες της άνω βάσης ορθές.

- Η υπόθεση της αμβλείας γωνίας:



Υπάρχει τετράπλευρο Saccheri με γωνίες της άνω βάσης αμβλείες.

Είναι φανερό από το κεφάλαιο 2 ότι η υπόθεση της αμβλείας γωνίας άμεσα απορρίπτεται. Γιατί αυτό οδηγεί σε τρίγωνο με άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο του π.

Επίσης είναι φανερό ότι αν αποδειχθεί η υπόθεση της ορθής γωνίας, τότε έχουμε την ισχύ του 5ου αιτήματος.

Η απόδειξη της υπόθεσης της ορθής γωνίας είναι ισοδύναμη με την απόρριψη της υπόθεσης της οξείας γωνίας.

Επίλογος

Αν και το θέμα είναι σημαντικά πιο μεγάλο, θεωρούμε ότι με τα λίγα στοιχεία που προηγήθηκαν κάθε μαθητής/τρια ή άλλος/η αναγνώστης/τρια μπορεί να πάρει μια ικανοποιητική ιδέα για το πώς θεμελιώνεται η Γεωμετρία.

Πιο πολλά μπορεί κανείς να βρει σε σχετικά βιβλία γεωμετρίας, ξένα ή Ελληνικά.

Αν δεν δεχτούμε το αξίωμα της παραλληλίας, όποια μορφή και να έχει, αλλά την άρνησή του, τότε οδηγούμαστε την Υπερβολική Γεωμετρία. Σε αυτήν:

Από κάθε σημείο εκτός ευθείας υπάρχουν περισσότερες από μία παράλληλες προς την ευθεία.

Αξίωμα Υπερβολικής Γεωμετρίας

Στην πραγματικότητα υπάρχουν άπειρες τέτοιες παράλληλες. Μπορεί η εμπειρία μας να εγείρει αντιρρήσεις για ένα τέτοιο αξίωμα, αλλά στην ουσία η γεωμετρία που προκύπτει είναι το ίδιο λογική και πλούσια σε προτάσεις με την γνωστή μας Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργεία Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού

ΙΕΠ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2021-2027

Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή

Τίτλος: Ιστορικός οδηγός στην αξιωματική θεμελίωση της γεωμετρίας *Έκδοση: 1.0 Ημερομηνία: 26.04.2024*

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

ΕΜΠΝΕΥΣΤΕΣ/ ΟΜΑΔΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ/ ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Κωνσταντίνος Ρεκούμης
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Λάμπρος Κατσάπας
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03

Νικόλαος Κουμάντος
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Ελένη Ρεκούμη
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03