Οδηγός επανάληψης

Ορισμοί - Θεωρήματα - Αποδείξεις

Παραλληλόγραμμα

- **Το παραλληλόγραμμο**
- **Είδη παραλληλογράμμων**
- **Τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου**
- **Ιδιότητες των ορθογωνίων τριγώνων**
- **Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου**
- **Τραπέζια**

Με ερωτήσεις
Σωστού - Λάθους

Περιεχόμενα

Οδηγός επανάληψης

Εισαγωγή

Το κεφάλαιο των παραλληλογράμμων συνδέει όλες τις προηγούμενες γνώσεις και προσφέρει αρκετά νέα αξιόλογα θεωρήματα και συμπεράσματα που δείχνουν την αξία και την ομορφιά της γεωμετρικής απόδειξης.

Με τον παρόντα οδηγό δίνεται ευκαιρία για μια σχετικά ταχύρυθμη ανακεφαλαίωση στη θεωρία.

Περιέχονται οι απαραίτητοι ορισμοί, προτάσεις καθώς και τα σημαντικότερα θεωρήματα με τις αποδείξεις τους, όπως αυτές ζητούνται στις προαγωγικές εξετάσεις.

1. Το Παραλληλόγραμμο

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

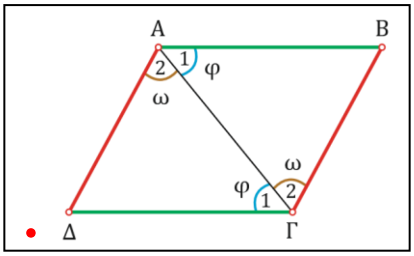
Θεώρημα

Σε κάθε παραλληλόγραμμο:

α) Οι απέναντι πλευρές και οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.

β) Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.

Απόδειξη



α) Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι $ΑΒ = ΓΔ$ και $ΑΔ = ΒΓ$, δηλαδή ότι οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.

Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ που σχηματίζονται είναι ίσα, διότι:

- έχουν την πλευρά ΑΓ κοινή,
- $\hat{Α}_1 = \hat{Γ}_1 = φ$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ με τέμνουσα την ΑΓ,
- $\hat{Γ}_2 = \hat{Α}_2 = ω$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΓΒ με τέμνουσα την ΑΓ.

Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, παίρνουμε ότι:

$$ΑΒ = ΓΔ \quad \text{και} \quad ΒΓ = ΑΔ.$$

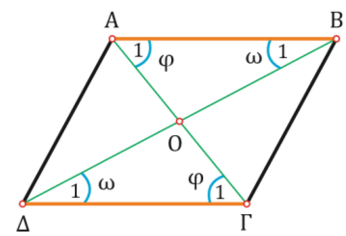
Οι απέναντι λοιπόν πλευρές του παραλληλογράμμου είναι ίσες.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\hat{Β} = \hat{Δ}$ και $\hat{Α} = \hat{Γ}$.

Από την παραπάνω ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ παίρνουμε επίσης ότι $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Delta}$. Επειδή όμως $\mathrm{A\Delta}\,//\,\mathrm{B\Gamma}$, είναι

$$\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}=180^{\circ} \text{ και } \hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=180^{\circ}.$$

Αυτές, αφού $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Delta}$, δίνουν ότι $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\Gamma}$. Με άλλα λόγια οι γωνίες $\hat{\mathrm{A}}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Delta}$.



β) Έστω ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ο. Θα αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{OA}=\mathrm{O\Gamma} \text{ και } \mathrm{OB}=\mathrm{O\Delta}.$$

Τα τρίγωνα OAB και $\mathrm{O\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, διότι:

- $\mathrm{AB}=\Gamma\Delta$, σύμφωνα με την ιδιότητα (α).
- $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\Gamma}_1=\varphi$ και $\mathrm{B}_1=\hat{\Delta}_1=\omega$, ως εντός εναλλάξ.

Επομένως, από την ισότητα των τριγώνων αυτών, παίρνουμε:

$$\mathrm{OA}=\mathrm{O\Gamma} \quad \text{και} \quad \mathrm{OB}=\mathrm{O\Delta},$$

δηλαδή με άλλα λόγια ότι οι διαγώνιοι διχοτομούνται.

Κριτήρια παραλληλογράμμων

Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω ιδιότητες.

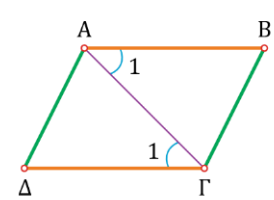
α) Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.

β) Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.

γ) Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.

δ) Δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες.

Απόδειξη



Θα αποδείξουμε μόνο την περίπτωση (δ).

Έστω λοιπόν ότι στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\mathrm{AB}=\Gamma\Delta$ και $\mathrm{AB}\,//\,\Gamma\Delta$.

Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ίσα, διότι:

- $\mathrm{AB}=\Gamma\Delta$ και η ΑΓ είναι κοινή

- $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$, αφού $AB // \Gamma\Delta$.

Άρα θα είναι $B\Gamma = A\Delta$. Αφού $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, σύμφωνα με το κριτήριο (α).

Αλλά από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΓΒΖ παίρνουμε $x = y$ (είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΓ). Οι σχέσεις $x = \omega$ και $x = y$ δίνουν ότι $y = \omega$.

γ) Αφού $\omega = y$ και οι ω, y είναι εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των ευθειών ΔΕ, ΖΒ με τέμνουσα την ΓΔ, θα είναι $\Delta E // ZB$.

2. Είδη παραλληλογράμμων

2Α. Το ορθογώνιο

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία (τουλάχιστον) ορθή γωνία.

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες και δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές, συμπεραίνουμε ότι:

Θεώρημα

Όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές.

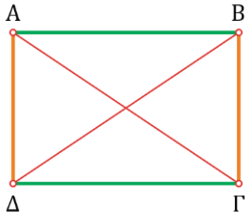
Το ορθογώνιο, ως παραλληλόγραμμο, έχει κληρονομήσει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου. Οι απέναντι λοιπόν πλευρές είναι ίσες και οι διαγώνιοι διχοτομούνται. Μια ακόμα σημαντική ιδιότητα, διατυπώνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

Σε κάθε ορθογώνιο οι διαγώνιοι είναι ίσες.

Απόδειξη

Θεωρούμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι είναι ίσες, δηλαδή ότι ΑΓ = ΒΔ.



Θα συγκρίνουμε τα δύο ορθογώνια τρίγωνα με κοινή πλευρά τη ΓΔ. Τα τρίγωνα αυτά είναι τα ΑΔΓ και ΒΓΔ. Αυτά έχουν:

- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.
- την πλευρά ΓΔ κοινή.

Τα τρίγωνα λοιπόν ΑΔΓ και ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε ΑΓ = ΒΔ. ■

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο

Για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο, αρκεί να ισχύει μία από τις παρακάτω ιδιότητες:

Κριτήρια

- Έχει τρεις γωνίες ορθές ή
- Έχει τέσσερις γωνίες ίσες ή

- εΕναι παραλληλόγραμμο και έχει μια ορθή γωνία ή
- Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι είναι ίσες.

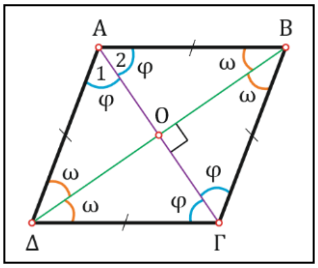
2Β. Ο ρόμβος

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Αφού ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο, έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και επιπλέον:

Ιδιότητες

- Όλες οι πλευρές είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοι είναι κάθετες.
- Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του.



Αν λοιπόν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται στο Ο.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ, η ΑΟ είναι διάμεσος, οπότε:

$$\mathrm{AO} \perp \mathrm{B\Delta} \quad \text{και} \quad \hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2 = \varphi \,.$$

Άρα οι διαγώνιοι είναι κάθετες και διχοτομούν τις γωνίες του ρόμβου.

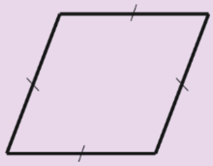
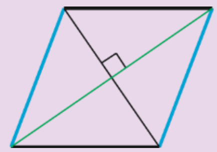
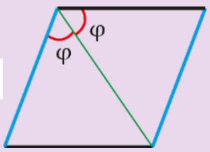
Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

Ας δούμε τώρα πότε ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος. Τόσο ο ορισμός, όσο και οι ιδιότητες του ρόμβου λειτουργούν και ως κριτήρια.

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

Για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος αρκεί να ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις.

- Όλες οι πλευρές είναι ίσες.
- Είναι παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
- Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- Είναι παραλληλόγραμμο και **μία** διαγώνιος διχοτομεί **μία** γωνία του.

<table>
<tr><td colspan="2">ΚΡΙΤΗΡΙΑ: Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
Όλες οι πλευρές είναι ίσες</td><td colspan="2">Είναι παραλληλόγραμμο και</td></tr>
<tr><td>
Οι διαγώνιοι είναι κάθετες.</td><td>ή


Μία διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία.</td></tr>
</table>

2Γ. Το τετράγωνο

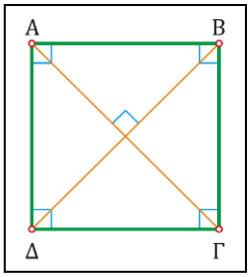
Το τετράγωνο είναι ίσως το πιο "καλαίσθητο" τετράπλευρο. Όλοι το αναγνωρίζουν, αρκεί να δούμε όλες τις γωνίες ορθές και τις πλευρές ίσες.
Ας δούμε το τετράγωνο με λίγο διαφορετική οπτική γωνία για να ταιριάζει με τη συνολική παρουσίαση των παραλληλογράμμων.

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι συγχρόνως ορθογώνιο και ρόμβος.

Το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, του ορθογωνίου και του ρόμβου. Πιο συγκεκριμένα:

Θεώρημα

- Οι πλευρές του τετραγώνου είναι όλες ίσες.
- Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
- Όλες οι γωνίες είναι ορθές.
- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.



Ας δούμε τώρα πώς θα αποδείξουμε ότι (σε ποιες περιπτώσεις) ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο.
Είναι φανερό ότι το τετράπλευρο θα είναι τετράγωνο, αν εξασφαλίσουμε ότι είναι συγχρόνως ορθογώνιο και ρόμβος.

Κριτήρια για να είναι ένα παραλληλόγραμμο τετράγωνο

Ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις.

- Έχει ίσες διαγωνίους και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
- Έχει ίσες και κάθετες διαγωνίους.
- Έχει ίσες διαγωνίους και μία από αυτή διχοτομεί μια του γωνία.
- Μια γωνία είναι ορθή και οι διαγώνιοι είναι κάθετες.
- Μια γωνία είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες.
- Μια γωνία είναι ορθή και μια διαγώνιος διχοτομεί μια του γωνία.

Τονίζουμε ότι για να είμαστε βέβαιοι πως τα στοιχεία που έχουμε εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αρκεί να ελέγξουμε αν με τα στοιχεία αυτά **το τετράπλευρο είναι και ορθογώνιο και ρόμβος.**

Έτσι, αν π.χ. οι πλευρές και οι γωνίες ενός τετράπλευρου είναι ίσες, τότε αυτό είναι τετράγωνο, αφού:

- οι ίσες πλευρές το καθιστούν ρόμβο,
- οι ίσες γωνίες το καθιστούν ορθογώνιο.

Το ίδιο ισχύει και αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται, είναι ίσες και μία από αυτές διχοτομεί μία γωνία του.

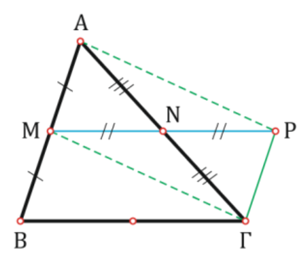
3. Τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου

Ας πάρουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Μ, Ν δύο πλευρών του π.χ. των ΑΒ και ΑΓ. Αν χαράξουμε αρκετά τέτοια σχήματα, θα διαπιστώσουμε ότι η ευθεία ΜΝ είναι πάντα παράλληλη με την ΒΓ. Πέραν όμως αυτού του σημαντικού συμπεράσματος το τμήμα ΜΝ είναι το μισό του ΒΓ.
Το παραπάνω συμπέρασμα διατυπώνεται και αποδεικνύεται στο παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα

Το τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά είναι ίσο με το μισό της.

Απόδειξη



Για την απόδειξη ακολουθούμε τα εξής βήματα.
1ο. Προεκτείνουμε τη ΜΝ κατά τμήμα ΝΡ = ΝΜ.
2ο. Το ΑΜΓΡ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΜΡ διχοτομούνται. Άρα ΡΓ = // ΑΜ.
3ο: Αφού ΡΓ = // ΑΜ και ΑΜ = ΜΒ, θα είναι ΡΓ = // ΜΒ. Άρα και το ΜΒΓΡ είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως:

- ΜΡ // ΒΓ, δηλαδή ΜΝ // ΒΓ,
- ΜΡ = ΒΓ, δηλαδή 2ΜΝ = ΒΓ και έτσι $ΜΝ = \frac{ΒΓ}{2}$. ■

Β. Παράλληλη από μέσο

Θεώρημα

Αν από το μέσο μιας πλευράς τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς κάποια πλευρά του, τότε αυτή θα περάσει και από το μέσο της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη

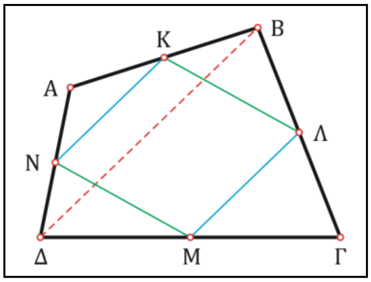
Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.
Έχουμε λοιπόν ότι το Μ είναι μέσο της ΑΒ και ΜΝ // ΒΓ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το Ν είναι μέσο της ΑΓ.
Έστω ότι το Ν δεν είναι μέσο της ΑΓ και ότι το μέσο είναι το Ρ.
Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα είναι: ΜΡ // ΒΓ.
Όμως: ΜΝ // ΒΓ.

Επομένως από το Ν έχουμε δύο παράλληλες προς την ΒΓ, πράγμα άτοπο σύμφωνα με το Ευκλείδειο αίτημα. Άρα το Ν είναι μέσο της ΑΓ. ■

Βασικό συμπέρασμα

Τα μέσα των πλευρών τυχαίου τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Σχόλια



Έστω Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Θα αποδείξουμε ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ.

- Από το τρίγωνο ΑΒΔ παίρνουμε ότι:

  $$\text{ΝΚ} \parallel \text{ΒΔ} \quad \text{και} \quad \text{ΝΚ} = \frac{\text{ΒΔ}}{2},$$

  διότι τα Ν, Κ είναι μέσα δύο πλευρών του.
- Στο τρίγωνο ΓΒΔ παίρνουμε για τον ίδιο λόγο ότι:

  $$\text{ΜΝ} = // \frac{\text{ΒΔ}}{2}.$$

Άρα $\text{ΝΚ} = // \text{ΜΛ}$, που σημαίνει ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

4. Ιδιότητες των ορθογωνίων τριγώνων

Α. Ιδιότητα της διαμέσου ορθογωνίου τριγώνου

Τα ορθογώνια τρίγωνα, εκτός από το γεγονός ότι έχουν:

- μια ορθή γωνία και
- τις δύο οξείες συμπληρωματικές,

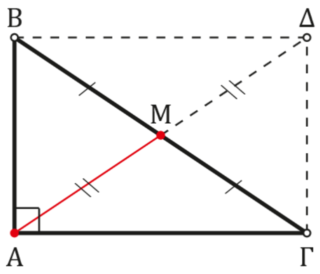
έχουν μερικές ακόμα χρήσιμες ιδιότητες. Αυτές είναι το κύριο αντικείμενο αυτής της ενότητας. Τις διατυπώνουμε και τις αποδεικνύουμε στις παρακάτω προτάσεις:

Θεώρημα

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$. Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ.

Τότε $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

Απόδειξη



Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα $M\Delta = AM$.

Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι διαγώνιές του ΑΔ και ΒΓ διχοτομούνται. Στο παραλληλόγραμμο αυτό είναι $\hat{A} = 90^o$. Επομένως ,το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

Επειδή στο ορθογώνιο οι διαγώνιες είναι ίσες, θα ισχύει ότι $A\Delta = B\Gamma$.

Όμως $A\Delta = 2AM$ και έτσι $2AM = B\Gamma$ ή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$. ■

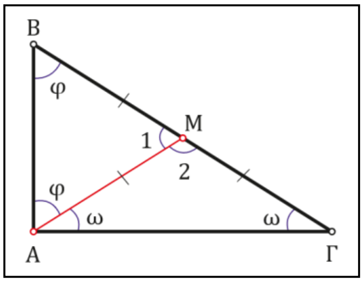
Το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να το διατυπώσουμε και ως εξής:

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος προς την υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της.

Θεώρημα 2

Αν μια διάμεσος ενός τριγώνου είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης πλευρές, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Απόδειξη



Αφού $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ και το M είναι μέσο του ΒΓ, θα έχουμε:

$$MA = MB = M\Gamma .$$

Επομένως τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΓ είναι ισοσκελή και έτσι:

$$M\hat{A}B = M\hat{B}A = \varphi , \quad M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A = \omega .$$

Επειδή στα τρίγωνα ΜΑΓ, ΜΑΒ οι γωνίες $\hat{M}_1$ και $\hat{M}_2$ είναι εξωτερικές, παίρνουμε $\hat{M}_1 = 2\omega$ και $\hat{M}_2 = 2\varphi$. Επομένως:

$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 2\varphi + 2\omega$ ή $2(\varphi + \omega) = 180^o$ ή $\varphi + \omega = 90^o$.

Αφού λοιπόν $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \varphi + \omega = 90^o$, έπεται ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α. ■

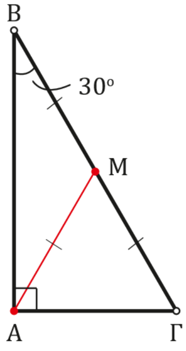
Το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να το διατυπώσουμε και ως εξής:

Β. Ορθογώνιο τρίγωνο με γωνία 30ο

Θεώρημα 3

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ είναι $\hat{B} = 30^o$. Τότε $AB = \frac{B\Gamma}{2}$.

Απόδειξη



Φέρουμε διάμεσο ΑΜ. Επειδή $MA = MB = M\Gamma$ και:

$$\hat{\Gamma} = 90^o - \hat{B} = 90^o - 30^o = 60^o ,$$

το τρίγωνο ΜΑΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως $A\Gamma = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ ■

Επομένως, μπορούμε να διατυπώσουμε το παραπάνω συμπέρασμα και ως εξής:

Θεώρημα 3

Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι ίση με 30^{o}, τότε η απέναντι πλευρά αυτής της γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Για το παραπάνω θεώρημα ισχύει και το αντίστροφο.
Συγκεκριμένα ισχύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα (αντίστροφο)

Αν μια από τις κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, τότε η απέναντι γωνία της πλευράς αυτής είναι ίση με 30^{o}.

5. Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου

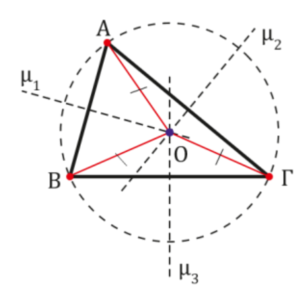
Α. Το περίκεντρο τριγώνου

Θεώρημα 4

Οι μεσοκάθετοι των πλευρών τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

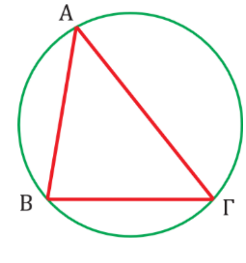
Απόδειξη

Ας είναι μ_1 και μ_2 οι μεσοκάθετοι των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Οι ευθείες μ_1 και μ_2 δεν μπορεί να είναι παράλληλες, οπότε τέμνονται σε ένα σημείο Ο.



- Επειδή το Ο είναι σημείο τομής των μ_1 και μ_2, θα ισχύει αντίστοιχα ότι $\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$ και $\mathrm{OA} = \mathrm{O\Gamma}$. Από τις ισότητες αυτές παίρνουμε ότι:
  $\mathrm{OB} = \mathrm{O\Gamma}$.
- Επειδή $\mathrm{OB} = \mathrm{O\Gamma}$, το Ο βρίσκεται και στη μεσοκάθετο τις πλευράς ΒΓ. Άρα οι μεσοκάθετος των πλευρών των τριγώνων διέρχονται από το ίδιο σημείο. ■

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο τομής Ο των μεσοκαθέτων των πλευρών ενός τριγώνου και ακτίνα ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = R, διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου και λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος**. Το κέντρο του κύκλου αυτού λέγεται **περίκεντρο**.

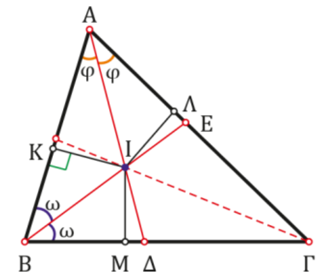


Β. Το έγκεντρο του τριγώνου

Θεώρημα 2

Οι διχοτόμοι κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη

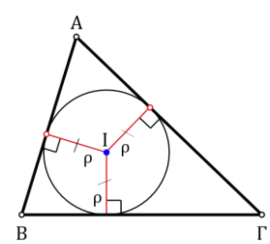


Ας πάρουμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β τέμνονται στο σημείο I. Θα αποδείξουμε ότι η $\Gamma\mathrm{I}$ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

- Φέρουμε τις $\mathrm{IK} \perp \mathrm{AB}$ και $\mathrm{I}\Lambda \perp \mathrm{A}\Gamma$. Θα είναι τότε:
  $\mathrm{IK} = \mathrm{I}\Lambda$ (1)
  διότι τα σημεία της διχοτόμου γωνίας ισαπέχουν από τις πλευρές της.
- Φέρουμε την $\mathrm{IM} \perp \mathrm{B}\Delta$. Αφού το I είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, θα είναι $\mathrm{IK} = \mathrm{IM}$ (2).

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι $\mathrm{I}\Lambda = \mathrm{IM}$. Αυτό σημαίνει ότι το I βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Gamma}$, αφού ισαπέχει από τις πλευρές της. Επομένως οι διχοτόμοι του τριγώνου περνάνε από το ίδιο σημείο. ■

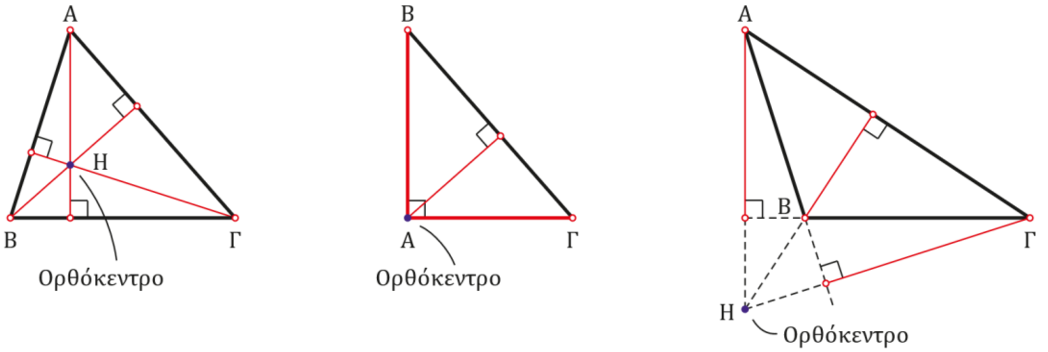
- Το σημείο τομής των διχότομων ενός τριγώνου λέγεται **έγκεντρο** του τριγώνου.
- Ο κύκλος που εφάπτεται με τις πλευρές του τριγώνου λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος**.



Γ. Το ορθόκεντρο τριγώνου

Θεώρημα 3

Οι φορείς των υψών κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

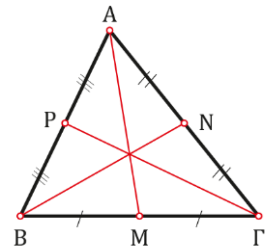


Το σημείο, από το οποίο διέρχονται οι φορείς των υψών ενός τριγώνου λέγεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου.

Δ. Το βαρύκεντρο τριγώνου

Θεώρημα 4

Οι διάμεσοι κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

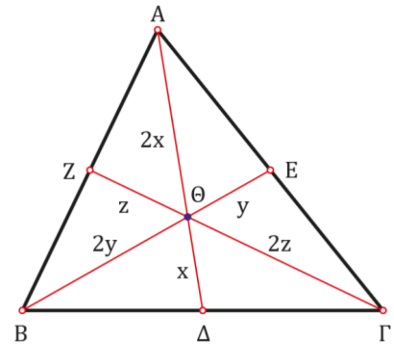


Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου λέγεται **βαρύκεντρο** του τριγώνου.

Το βαρύκεντρο τριγώνου χωρίζει τη διάμεσο σε δύο τμήματα και ισχύει ότι:

- Το (μεγάλο) τμήμα προς την κορυφή είναι διπλάσιο από το (μικρό) τμήμα προς το μέσο της πλευράς.
- Το τμήμα προς την κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου και το τμήμα προς το μέσο είναι το $\frac{1}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

Με πιο απλά λόγια, αν Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ και ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ είναι οι διάμεσοί του, τότε:



- $\Theta A = \frac{2}{3}\mu_\alpha$ και $\Theta\Delta = \frac{1}{3}\mu_\alpha$ και $\Theta A = 2\Theta\Delta$
- $\Theta B = \frac{2}{3}\mu_\beta$ και $\Theta E = \frac{1}{3}\mu_\beta$ και $\Theta B = 2\Theta E$
- $\Theta\Gamma = \frac{2}{3}\mu_\gamma$ και $\Theta Z = \frac{1}{3}\mu_\gamma$ και $\Theta\Gamma = 2\Theta Z$.

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να απαντήσετε τις παρακάτω ερωτήσεις:

α) Να πάρετε ένα τρίγωνο, να βρείτε το έγκεντρο και να σχεδιάσετε τον εγγεγραμμένο κύκλο.

β) Σε ένα τρίγωνο να βρείτε το περίκεντρο και να φέρετε τον περιγεγραμμένο κύκλο.

γ) Τι λέμε ορθόκεντρο και τι βαρύκεντρο ενός τριγώνου;

2. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) Το έγκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των _____________ του και είναι το κέντρο του _____________ κύκλου.

β) Το περίκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των __________________ των πλευρών του και είναι το κέντρο του __________________ κύκλου, δηλαδή του κύκλου διέρχεται από τις _____________ του τριγώνου.

γ) Το σημείο, στο οποίο συντρέχουν οι φορείς των υψών ενός τριγώνου λέγεται _____________ του τριγώνου.

δ) Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου λέγεται __________________ .

3. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Το έγκεντρο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ενός τριγώνου. Σ Λ

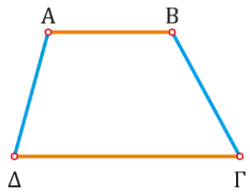
β) Το περίκεντρο είναι το σημείο τομής των υψών ενός τριγώνου. Σ Λ

γ) Αν Θ είναι το βαρύκεντρο ενός τριγώνου ΑΒΓ και η ΑΜ είναι διάμεσος, τότε $\Theta A = 2\Theta M$ και $\Theta M = \frac{1}{3}\mu_\alpha$. Σ Λ

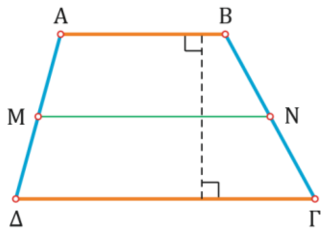
δ) Το ορθόκεντρο ενός οξυγωνίου τριγώνου είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου. Σ Λ

6. Το τραπέζιο

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



Θεωρούμε το τραπέζιο με ΑΒ // ΓΔ.



- Οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου.
- Οι ΑΔ και ΒΓ λέγονται **μη παράλληλες** πλευρές.
- Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος** του τραπεζίου.
- Το τμήμα ΜΝ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου.

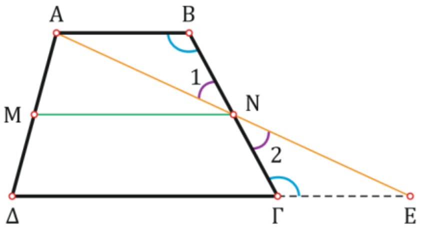
Θεώρημα 5

Η διάμεσος τραπεζίου είναι παράλληλη με τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Απόδειξη

Θεωρούμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ και τη διάμεσο ΜΝ. Θα αποδείξουμε ότι:

ΜΝ // ΑΒ // ΓΔ και $\mathrm{MN} = \dfrac{\mathrm{AB} + \Gamma\Delta}{2}$.



Η ευθεία ΑΝ τέμνει την ευθεία ΔΓ στο Ε. Τα τρίγωνα ΑΒΝ και ΝΓΕ είναι ίσα (ΒΝ = ΝΓ, $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{N}}_1 = \hat{\mathrm{N}}_2$). Άρα

ΑΝ = ΝΕ και ΓΕ = ΑΒ.

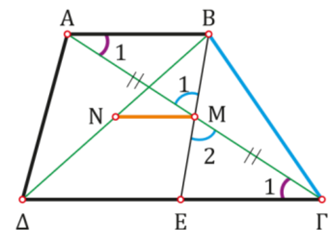
Στο τρίγωνο ΑΔΕ το ΜΝ ενώνει τα μέσα των ΑΔ και ΑΕ. Επομένως:

- ΜΝ // ΓΔ.
- $\mathrm{MN} = \dfrac{\Delta\mathrm{E}}{2} = \dfrac{\Delta\Gamma + \Gamma\mathrm{E}}{2} = \dfrac{\Gamma\Delta + \mathrm{AB}}{2}$. ■

Θεώρημα 6

Το τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων τραπεζίου είναι παράλληλο προς τις βάσεις και ίσο με την ημιδιαφορά τους.

Απόδειξη



Θεωρούμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ και τα μέσα Μ, Ν των διαγωνίων του ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι

$$\text{MN} \parallel \Gamma\Delta \text{ και } \text{MN} = \frac{\Gamma\Delta - \text{AB}}{2}.$$

Έστω ότι η ευθεία ΒΜ τέμνει την ΓΔ στο Ε. Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΕ είναι ίσα, αφού $\text{AM} = \text{M}\Gamma$, $\hat{\text{A}}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\text{M}}_1 = \hat{\text{M}}_2$. Επομένως:

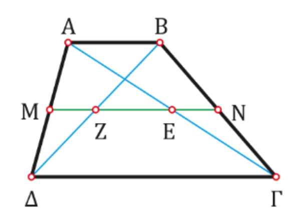
$\text{AM} = \text{M}\Gamma$ και $\text{E}\Gamma = \text{AB}$.

Στο τρίγωνο ΒΔΕ το ΜΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΔ, ΒΕ. Άρα:

- ΜΝ // ΓΔ,
- $\text{MN} = \dfrac{\Delta\text{E}}{2} = \dfrac{\Delta\Gamma - \text{E}\Gamma}{2} = \dfrac{\Gamma\Delta - \text{AB}}{2}$. ■

Ας πάρουμε τώρα ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ και τη διάμεσό του ΜΝ.
Επειδή ΜΝ // ΑΒ και ΜΝ // ΓΔ, η ΜΝ θα περάσει τόσο από το μέσο της διαγωνίου ΒΔ (στο τρίγωνο ΔΑΒ) όσο και από το μέσο της διαγωνίου ΑΓ (στο τρίγωνο ΑΔΓ). Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα.

Σε κάθε τραπέζιο:
α) Η διάμεσος διέρχεται από τα μέσα των διαγωνίων του.
β) Τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών και τα μέσα των διαγωνίων βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



Το ισοσκελές τραπέζιο

Τα τραπέζιο έχουν δύο μόνο πλευρές παράλληλες, αφού διαφορετικά θα ήταν παραλληλόγραμμα. Οι μη παράλληλες πλευρές μπορεί να είναι ίσες, μπορεί και άνισες.
Στην περίπτωση που είναι ίσες παίρνουμε ένα ενδιαφέρον είδος τραπεζίου με απλές και αναμενόμενες ιδιότητες. Μελετάμε λοιπόν στη συνέχεια το ισοσκελές τραπέζιο.

Ένα τραπέζιο λέγεται **ισοσκελές**, όταν οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες.

Το τραπέζιο λοιπόν ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) με $\text{A}\Delta = \text{B}\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Τίθεται αμέσως το ερώτημα:
Τι συμβαίνει με τις γωνίες των βάσεων ή τις διαγωνίους σε είναι ισοσκελές τραπέζιο;
Η απάντηση είναι αναμενόμενη και διατυπώνεται στο επόμενο θεώρημα.

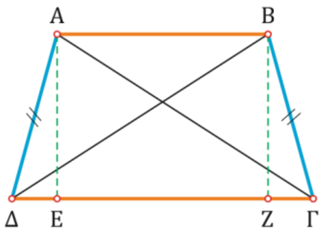
Θεώρημα 6

Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο:

α) Οι γωνίες των βάσεων είναι ίσες.

β) Οι διαγώνιοι είναι ίσες.

Απόδειξη



α) Θεωρούμε το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ.
Φέρουμε τα τμήματα:

$$\mathrm{AE} \perp \Gamma\Delta \quad \text{και} \quad \mathrm{BZ} \perp \Gamma\Delta.$$

Επειδή ΑΕ = ΒΖ και ΑΔ = ΒΓ, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα. Επομένως $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$. Οι γωνίες $\hat{\mathrm{A}}$ και $\hat{\mathrm{B}}$ είναι επίσης ίσες ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$.

β) Αφού $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ και ΑΔ = ΒΓ, τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΓΔ είναι ίσα (η ΓΔ είναι κοινή πλευρά). Επομένως:

$$\mathrm{B}\Delta = \mathrm{A}\Gamma,$$

δηλαδή οι διαγώνιοι στο ισοσκελές τραπέζιο είναι ίσες. ■

Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

α) Οι γωνίες μιας βάσης είναι ίσες.

β) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

γ) Οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες.

Καλή Επιτυχία !

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.

Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων | ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού | ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ | Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης | ΕΣΠΑ 2021-2027 | Πρόγραμμα Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή

Τίτλος: Οδηγός επανάληψης στα παραλληλόγραμμα *Έκδοση: 1.0 Ημερομηνία: 26.04.2024*

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

ΕΜΠΝΕΥΣΤΕΣ/ ΟΜΑΔΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ/ ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Κωνσταντίνος Ρεκούμης
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Λάμπρος Κατσάπας
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Νικόλαος Κουμάντος
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Ελένη Ρεκούμη
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03