Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου

Οδηγός για την αξιοποίησή τους

- **Περίκεντρο**
- **Έγκεντρο**
- **Ορθόκεντρο**
- **Βαρύκεντρο**

Εισαγωγή

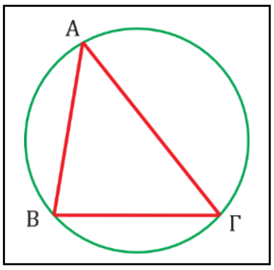
Τα χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου που παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι τα εξής:

Έγκεντρο, περίκεντρο, ορθόκεντρο, βαρύκεντρο, παράκεντρα

Για τα σημεία αυτά κάνουμε ιδιαίτερη αναφορά, γιατί συναντώνται συχνά σε πλείστα προβλήματα, για τη λύση των οποίων ο προσδιορισμός τους παίζει καθοριστικό ρόλο.
Αν για παράδειγμα σε ένα τρίγωνο εντοπίσουμε δύο ύψη ή δύο διαμέσους, τότε έχουμε εντοπίσει αντίστοιχα το ορθόκεντρο ή το βαρύκεντρο.
Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία που ενώνει τα σημεία αυτά με την τρίτη κορυφή είναι κάθετη στην τρίτη πλευρά ή τη διχοτομεί αντίστοιχα.
Με ανάλογο τρόπο αξιοποιούμε και τα άλλα χαρακτηριστικά σημεία.
Το περίκεντρο αξιοποιείται συνήθως αν χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των εγγεγραμμένων γωνιών.

Α. Το περίκεντρο τριγώνου

Αν έχουμε οποιοδήποτε τρίγωνο, μπορούμε να χαράξουμε έναν κύκλο που να διέρχεται και από τις τρεις κορυφές του. Με άλλα λόγια, από τρία σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, υπάρχει πάντα κύκλος που περνάει από αυτά.
Θα δούμε στη συνέχεια πώς βρίσκουμε το κέντρο αυτού του κύκλου, μια και ο κύκλος αυτός έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη γεωμετρία και συνοδεύεται από σημαντικά συμπεράσματα.

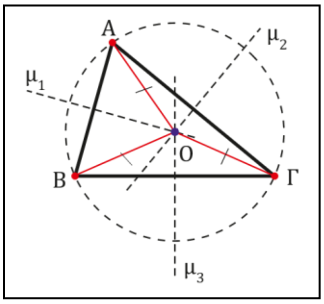


Θεώρημα 1

Οι μεσοκάθετοι των πλευρών τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

Απόδειξη

Ας είναι μ_1 και μ_2 οι μεσοκάθετοι των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Οι ευθείες μ_1 και μ_2 δεν μπορεί να είναι παράλληλες, οπότε τέμνονται σε ένα σημείο Ο.



- Επειδή το Ο είναι σημείο τομής των μ_1 και μ_2, θα ισχύει αντίστοιχα ότι $ΟΑ = ΟΒ$ και $ΟΑ = ΟΓ$. Από τις ισότητες αυτές παίρνουμε ότι:

$$OB = O\Gamma .$$

- Επειδή $OB = O\Gamma$, το Ο βρίσκεται και στη μεσοκάθετο τις πλευράς ΒΓ. Άρα οι μεσοκάθετοι των πλευρών των τριγώνων διέρχονται από το ίδιο σημείο.

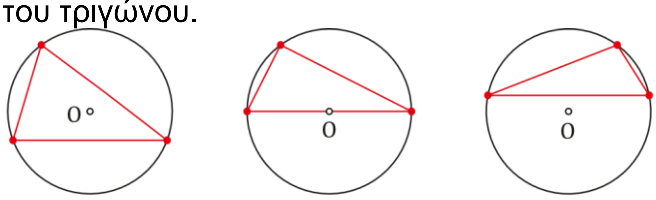
Άρα ο κύκλος (Ο, ΟΑ) θα διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.■

Ορισμός

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο τομής Ο των μεσοκαθέτων των πλευρών ενός τριγώνου και ακτίνα ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = R, διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου και λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος**.

Το κέντρο του κύκλου αυτού λέγεται **περίκεντρο**.

Το περίκεντρο μπορεί να βρίσκεται είτε μέσα στο τρίγωνο, είτε πάνω σε κάποια πλευρά, είτε να είναι εξωτερικό του τριγώνου.



Β. Το έγκεντρο του τριγώνου

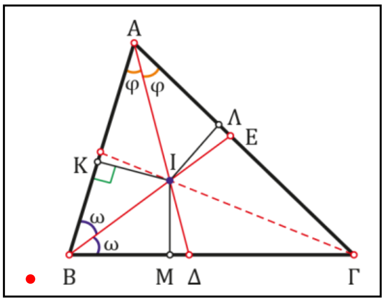
Σε κάθε τρίγωνο υπάρχει ένας κύκλος που εφάπτεται και με τις τρεις πλευρές του τριγώνου. Ας δούμε για ποιο λόγο συμβαίνει αυτό και πώς βρίσκουμε το κέντρο του.

Θεώρημα 2

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του κύκλου που εφάπτεται στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

Απόδειξη

Ας πάρουμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β τέμνονται στο σημείο Ι. Θα αποδείξουμε ότι η ΓΙ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Gamma}$.



- Φέρουμε τις $IK \perp AB$ και $I\Lambda \perp A\Gamma$. Θα είναι τότε:

$$IK = I\Lambda \qquad (1)$$

διότι τα σημεία της διχοτόμου γωνίας ισαπέχουν από τις πλευρές της.

-

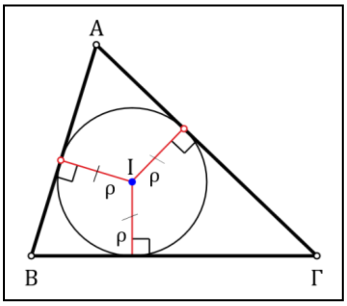
- Φέρουμε την $IM \perp B\Delta$. Αφού το I είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{B}$, θα είναι $IK = IM$ (2).

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι $I\Lambda = IM$. Αυτό σημαίνει ότι το I βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Gamma}$, αφού ισαπέχει από τις πλευρές της. Επομένως οι διχοτόμοι του τριγώνου περνάνε από το ίδιο σημείο.

Με κέντρο το I και ακτίνα IK=IΛ=IM γράφεται κύκλος που εφάπτεται στις τρεις πλευρές του τριγώνου ■

♦ Το σημείο τομής των διχοτόμων ενός τριγώνου λέγεται **έγκεντρο** του τριγώνου.

♦ Ο κύκλος που βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου και εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος**.



Ο εγγεγραμμένος κύκλος:

♦ έχει κέντρο το έγκεντρο του τριγώνου, δηλαδή το σημείο τομής των διχοτόμων του.

♦ έχει ακτίνα την κοινή απόσταση του έγκεντρου από τις πλευρές του τριγώνου.

Γ. Το ορθόκεντρο τριγώνου

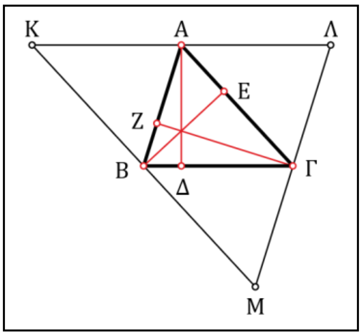
Έχουμε αποδείξει παραπάνω ότι οι διχοτόμοι ενός τριγώνου συντρέχουν στο έγκεντρο και οι μεσοκάθετοι των πλευρών του συντρέχουν στο περίκεντρο του τριγώνου.

Κάτι ανάλογο συμβαίνει και με τους φορείς των υψών του τριγώνου, πράγμα που διατυπώ - νεται και αποδεικνύεται παρακάτω.

Θεώρημα 3

Οι φορείς των υψών κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Απόδειξη



Ας θεωρήσουμε το οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. Από τις κορυφές του τριγώνου φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του. Αυτές σχηματίζουν το τρίγωνο ΚΛΜ.

- Από τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΛ και ΑΓΒΚ συμπεραίνουμε ότι:

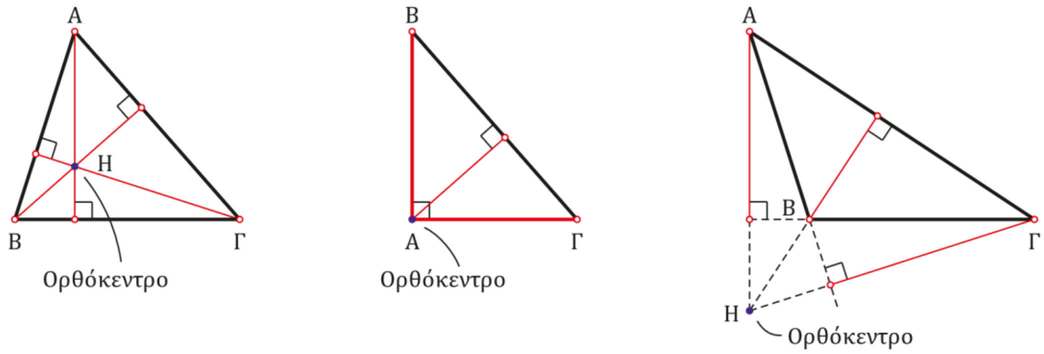
$$\text{ΑΛ} = \text{ΒΓ} = \text{ΑΚ}$$

οπότε η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΚΛ.

Όμοια και η ευθεία ΒΕ είναι μεσοκάθετος της πλευράς ΚΜ του τριγώνου ΚΛΜ και η ευθεία ΓΖ είναι μεσοκάθετος της πλευράς ΛΜ.

Οι φορείς λοιπόν των υψών ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ του τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το περίκεντρο του τριγώνου ΚΛΜ. ■

Το σημείο από το οποίο διέρχονται οι φορείς των υψών ενός τριγώνου λέγεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου.



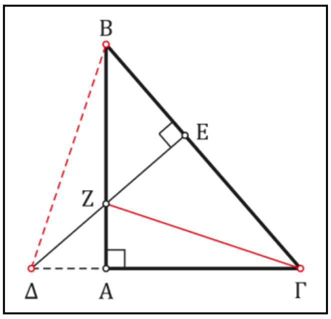
Ας παρατηρήσουμε ότι:

- Στο οξυγώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου.
- Στο ορθογώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο συμπίπτει με την κορυφή της ορθής γωνίας.
- Στο αμβλυγώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου και σχηματίζεται από τις προεκτάσεις των υψών του.

Εφαρμογή

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{\text{Α}} = 90^{\circ}$) και τυχαίο σημείο Δ στην προέκταση της ΓΑ. Η κάθετη ΔΕ από το Δ προς την ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδειχθεί ότι $\text{ΓΖ} \perp \text{ΒΔ}$.

Λύση



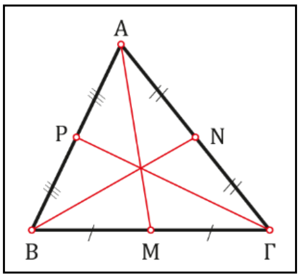
Στο τρίγωνο ΒΔΓ είναι:

$$\text{ΒΑ} \perp \text{ΔΓ} \quad \text{και} \quad \text{ΔΕ} \perp \text{ΒΓ}.$$

Το Ζ, ως σημείο τομής δύο υψών, είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΔΓ. Επομένως:

$$\text{ΓΖ} \perp \text{ΒΔ}.$$

Δ. Το βαρύκεντρο τριγώνου

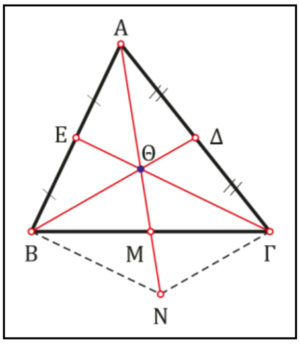


Σε κάθε τρίγωνο οι τρεις διάμεσοι βρίσκονται στο εσωτερικό του. Στην παράγραφο αυτή θα αποδειχθεί ότι οι διάμεσοι του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο, όπως είναι αναμενόμενο, είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου.

Θεώρημα 4

Οι διάμεσοι κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή του τριγώνου είναι τα 2/3 του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Απόδειξη



Πράγματι, ας πάρουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και ας φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ, ΓΕ που τέμνονται στο σημείο Θ.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ευθεία ΑΘ διέρχεται από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ και ότι ΑΘ=2/3ΑΜ.
Στην προέκταση της ΑΘ παίρνουμε τμήμα $\Theta N = \Theta A$. Φέρουμε και τις ΝΒ, ΝΓ.

- Στο τρίγωνο ΑΒΝ το ΕΘ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΝ. Άρα ΕΘ // ΒΝ, δηλαδή ΒΝ // ΕΓ.
- Από το τρίγωνο ΑΓΝ όμοια παίρνουμε ΘΔ // ΝΓ, δηλαδή ΓΝ // ΒΔ.
- Το τετράπλευρο ΒΘΓΝ έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς οι διαγώνιοι ΒΓ και ΘΝ διχοτομούνται στο Μ. Αυτό σημαίνει ότι, πράγματι, η ευθεία ΑΘ διέρχεται από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.

  Στη συνέχεια είναι ΘΝ=2ΘΜ και επειδή ΑΘ=ΘΝ είναι ΑΘ=2ΘΜ ή ΘΜ=1/2 ΑΘ, οπότε

  ΑΘ+ΘΜ=ΑΜ ή ΑΘ+1/2 ΑΘ=ΑΜ ή 3/2 ΑΘ=ΑΜ ή ΑΘ=2/3 ΑΜ

  και η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώθηκε ■

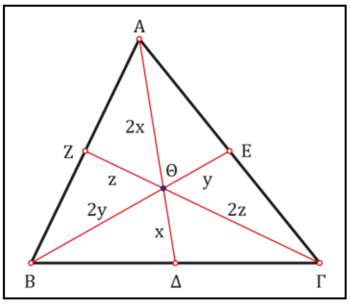
Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου λέγεται **βαρύκεντρο** του τριγώνου.

Ιδιότητες του βαρυκέντρου

Το βαρύκεντρο τριγώνου χωρίζει τη διάμεσο σε δύο τμήματα και ισχύει ότι:

- Το (μεγάλο) τμήμα προς την κορυφή είναι διπλάσιο από το (μικρό) τμήμα προς το μέσο της πλευράς.
- Το τμήμα προς την κορυφή είναι το $\frac{2}{3}$ και το τμήμα προς το μέσο είναι το $\frac{1}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

Με πιο απλά λόγια, αν Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ και ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ είναι οι διάμεσοί του, τότε:



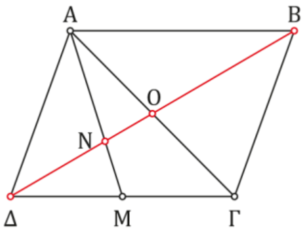
- $\Theta A = \frac{2}{3}\mu_\alpha$ και $\Theta\Delta = \frac{1}{3}\mu_\alpha$ και $\Theta A = 2\Theta\Delta$,
- $\Theta B = \frac{2}{3}\mu_\beta$ και $\Theta E = \frac{1}{3}\mu_\beta$ και $\Theta B = 2\Theta E$,
- $\Theta\Gamma = \frac{2}{3}\mu_\gamma$ και $\Theta Z = \frac{1}{3}\mu_\gamma$ και $\Theta\Gamma = 2\Theta Z$.

Εφαρμογή

Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Η ΑΜ τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο σημείο Ν. Να αποδειχθεί ότι:

$$\Delta B = 3\Delta N.$$

Λύση



Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ και ας είναι Ο το σημείο τομής των ΑΓ, ΒΔ. Αφού οι διαγώνιες παραλληλογράμμου διχοτομούνται, το Ο είναι μέσο της ΑΓ.

Στο τρίγωνο λοιπόν ΑΔΓ η ΔΟ είναι διάμεσος, όπως και η ΑΜ.

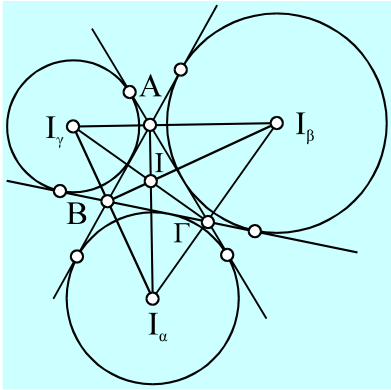
Συνεπώς το Ν είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΓ. Άρα:

$$\Delta N = \frac{2}{3}\Delta O = \frac{2}{3}\cdot\frac{B\Delta}{2} = \frac{1}{3}B\Delta$$

Αποδείξαμε έτσι ότι $\Delta N = \frac{B\Delta}{3}$, δηλαδή $B\Delta = 3\Delta N$.

Ε. Τα παράκεντρα Τριγώνου

Οι **διχοτόμοι** δύο εξωτερικών γωνιών και της τρίτης εσωτερικής γωνίας διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό λέγεται **παράκεντρο**. Υπάρχουν τρία παράκεντρα τα οποία είναι κέντρα των **παρεγγεγραμμένων** κύκλων. Οι κύκλοι αυτοί εφάπτονται στη μια πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων. Τα παράκεντρα και οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι ενός τριγώνου φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



Θεώρημα

α) Ο εγγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου ΑΒΓ εφάπτεται με τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι:

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AZ} = \tau - \alpha, \ \mathrm{B\Delta} = \mathrm{BZ} = \tau - \beta, \ \Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{E} = \tau - \gamma$$

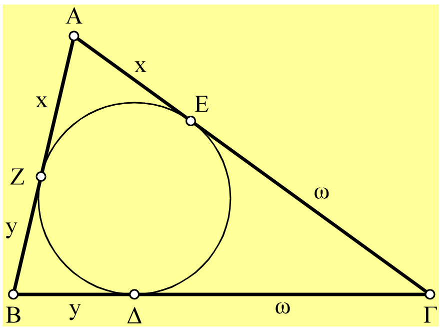
β) Ο παρεγγεγραμμένος κύκλος της γωνίας $\hat{A}$ ενός τριγώνου ΑΒΓ εφάπτεται με την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ρ. Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{B P} = \tau - \gamma$, $\Gamma\mathrm{P} = \tau - \beta$.

Απόδειξη

α) Στον εγγεγραμμένο κύκλο έχουμε:

$$x = \mathrm{A}\Gamma - \mathrm{E}\Gamma = \beta - \omega \quad \text{και}$$

$$x = \mathrm{AB} - \mathrm{BZ} = \gamma - y$$



Άρα, με πρόσθεση κατά μέλη, παίρνουμε:

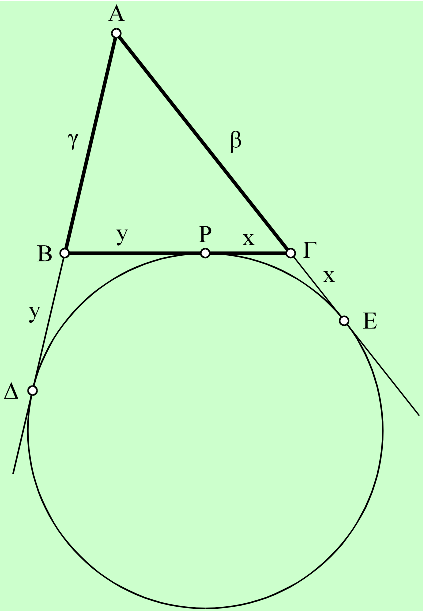
$$2x = \beta - \omega + \gamma - y = \beta + \gamma - (\omega + y) =$$

$$= \beta + \gamma - \alpha = 2(\tau - \alpha)$$

Επομένως:

$$\boxed{x = \tau - \alpha, \ y = \tau - \beta, \ \omega = \tau - \gamma}$$

β) Στον παρεγγεγραμμένο κύκλο έχουμε:



- $ΑΔ = ΑΕ \Leftrightarrow γ + y = β + x$ (1)
- $ΒΡ + ΡΓ = ΒΓ \Leftrightarrow x + y = α$ (2)

Επομένως από την (1) παίρνουμε:

$$γ + y = β + x \overset{(2)}{\Leftrightarrow} γ + (α - x) = β + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{α + γ - β}{2} \Leftrightarrow x = τ - β$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

$$\boxed{x = τ - β\,,\ \ y = τ - γ}$$

Σχόλιο

Είναι:

- $ΑΒ + ΒΡ = γ + (τ - γ) = τ$
- $ΑΓ + ΓΡ = β + (τ - β) = τ$

Επομένως $ΑΒ + ΒΡ = ΑΓ + ΓΡ$*, δηλαδή:*

> *Τα τρίγωνα ΑΡΒ και ΑΡΓ έχουν ίσες περιμέτρους και αντιστρόφως:*
>
> *Αν τα τρίγωνα* $\overset{\Delta}{ΑΡΒ}$*,* $\overset{\Delta}{ΑΡΓ}$ *έχουν ίσες περιμέτρους, τότε το Ρ είναι το σημείο επαφής του παρεγγεγραμμένου κύκλου της γωνίας* $\hat{Α}$*, ο οποίος εφάπτεται στη ΒΓ.*

Θεώρημα 3ο (Lehmus – Steiner)

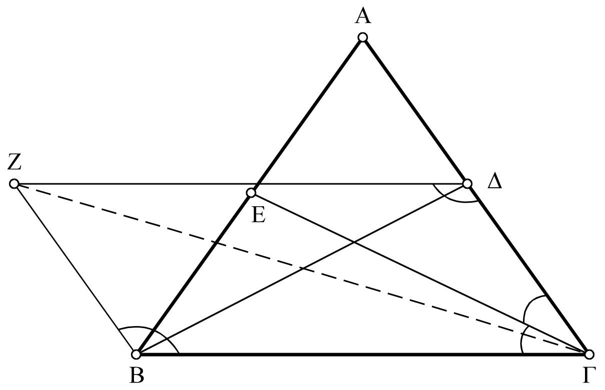
Αν οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$**.**

Απόδειξη

Κατασκευάζουμε τρίγωνο ΒΔΖ ίσο με το ΒΕΓ με γωνία $Β\hat{Δ}Ζ = \frac{\hat{Γ}}{2}$ και $ΔΖ = ΒΓ$. Από την παραπάνω ισότητα έχουμε $Δ\hat{Β}Ζ = Β\hat{Ε}Γ$, οπότε:

$$Δ\hat{Β}Ζ = \hat{Α} + \frac{\hat{Γ}}{2} \Leftrightarrow Δ\hat{Β}Ζ + \frac{\hat{Β}}{2} = \hat{Α} + \frac{\hat{Γ}}{2} + \frac{\hat{Β}}{2} \Leftrightarrow Ζ\hat{Β}Γ = \hat{Α} + \frac{\hat{Γ}}{2} + \frac{\hat{Β}}{2} = Ζ\hat{Δ}Γ > 90^{o}$$

Επομένως τα τρίγωνα ΒΓΖ και ΔΓΖ είναι ίσα, καθώς είναι αμβλυγώνια και έχουν δύο πλευρές και μία γωνία (όχι την περιεχόμενη) ίσες. Άρα το τετράπλευρο ΒΓΔΖ είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως:



$$\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma \Leftrightarrow \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{B}} \Leftrightarrow \mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma$$

Το τρίγωνο λοιπόν ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma$.

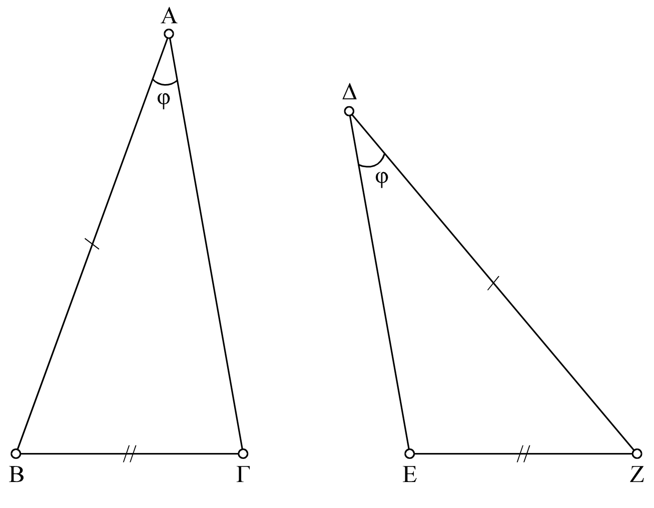
Σχόλια

α) *Υπάρχουν πολλές αποδείξεις σε αυτό το θεώρημα που ποικίλουν σε δυσκολία. Οι πιο πολλές αποδείξεις είναι έμμεσες και κυρίως βασίζονται στη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.*

β) *Θυμίζουμε ότι στην ισότητα τριγώνων ισχύει και το εξής χρήσιμο θεώρημα:*

«Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο ζεύγη πλευρών ίσες, μία προς μία, και οι απέναντι από το ένα ζεύγος ίσων πλευρών γωνίες είναι ίσες, τότε οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από το άλλο ζεύγος των ίσων πλευρών είναι ίσες ή παραπληρωματικές.»

Για παράδειγμα, στα σχήματα που ακολουθούν έχουμε $\mathrm{AB} = \Delta\mathrm{Z}$, $\mathrm{B}\Gamma = \mathrm{EZ}$ *και* $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Delta}$.



Τότε $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{E}}$ *ή* $\hat{\Gamma} + \hat{\mathrm{E}} = 180^{\circ}$.

Βασικές ασκήσεις

1. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ φέρνουμε το ύψος ΑΔ και έστω Μ, Ν τα μέσα των ΑΔ, ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $MN \perp AB$,

β) $BM \perp AN$.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και το μέσο Κ της πλευράς ΒΓ. Η ΑΚ τέμνει τη διαγώνιο ΔΒ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:

α) η ΓΛ διέρχεται από το μέσο της ΑΒ,

β) $B\Lambda = \frac{1}{3}B\Delta$.

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ. Φέρνουμε $MN \perp A\Gamma$ και θεωρούμε τα μέσα Ρ, Δ των τμημάτων ΜΝ, ΝΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $M\Delta // BN$,

β) $P\Delta \perp AM$,

γ) $AP \perp BN$.

Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ, Λ των πλευρών ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $K\Lambda = \frac{B\Delta}{2}$,

β) οι ΑΛ, ΑΚ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΒΔ.

5. Οι εφαπτομένες σε τρία σημεία Κ, Λ, Μ ενός κύκλου (Ι, ρ) τεμνόμενες ανά δύο σχηματίζουν το τρίγωνο ΑΒΓ.

α) Ποιο είναι το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ και γιατί;

β) Αν συμβαίνει να είναι $\hat{A} = 90^o$, πόσο είναι η γωνία $B\hat{I}\Gamma$;

6. Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

7. Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^o$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουν το ίδιο περίκεντρο.

β) Υπάρχει κύκλος που διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του ΑΒΓΔ.

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ έχουν επίσης το ίδιο περίκεντρο.

8. Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι:

$$A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}\Delta = 90^o.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) το περίκεντρο του τριγώνου ΒΑΔ είναι το μέσο Μ του ΑΔ,

β) τα σημεία Α, Β, Γ, Δ βρίσκονται στον ίδιο κύκλο με διάμετρο την ΑΔ.

γ) οι μεσοκάθετοι των ΑΒ, ΒΓ και η ΑΔ

α) το περίκεντρο των τριγώνων ΔΒΓ και ΕΒΓ είναι το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ,

β) οι μεσοκάθετες των ΕΒ, ΓΔ τέμνονται πάνω στην ΒΓ.

διέρχονται από το ίδιο σημείο.

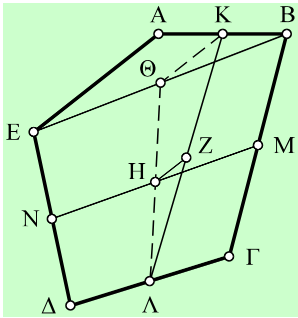
Συμπληρωματικά επίλεκτα προβλήματα

1. Παραλληλόγραμμο και βαρύκεντρο

Δίνεται πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ, τα μέσα Κ και Λ των ΑΒ και ΔΓ και τα μέσα Μ και Ν των ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα. Αν Ζ είναι το μέσο του ΚΛ και Η το μέσο του ΜΝ, να αποδειχθεί ότι:

α) ΖΗ // ΑΕ **β)** $\mathrm{AE} = 4\mathrm{ZH}$

Υπόδειξη



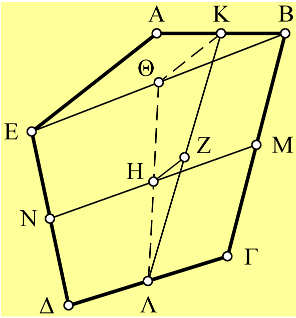
Επειδή τα Μ, Λ και Ν είναι τα μέσα των ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ αντίστοιχα είναι καλό να φέρουμε τη ΒΕ και να θεωρήσουμε το μέσο Θ του ΒΕ.

2. Εκφώνηση και λύση

Δίνεται πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ, τα μέσα Κ και Λ των ΑΒ και ΔΓ και τα μέσα Μ και Ν των ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα. Αν Ζ είναι το μέσο του ΚΛ και Η το μέσο του ΜΝ, να αποδειχθεί ότι:

α) ΖΗ // ΑΕ **β)** $\mathrm{AE} = 4\mathrm{ZH}$

Λύση



α) Επειδή τα Μ, Λ και Ν είναι τα μέσα των ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ αντίστοιχα είναι καλό να φέρουμε τη ΒΕ και να θεωρήσουμε το μέσο Θ του ΒΕ. Τι πετύχαμε όμως με αυτή την κίνηση; Στο τετράπλευρο ΒΓΔΕ τα μέσα Θ, Μ, Λ και Ν των πλευρών του είναι κορυφές παραλληλογράμμου. Έτσι τα τμήματα ΘΛ και ΜΝ διχοτομούνται. Αυτό σημαίνει ότι η ΘΛ διέρχεται από το μέσο Η του ΜΝ. Η άσκηση τώρα έχει σχεδόν λυθεί:

- Στο τρίγωνο ΛΘΚ το τμήμα ΗΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΛΘ και ΛΚ. Έτσι:

  ΗΖ // ΘΚ και $\mathrm{HZ} = \dfrac{\Theta\mathrm{K}}{2}$

- Στο τρίγωνο ΒΑΕ το ΘΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΕ και ΒΑ. Άρα:

  ΘΚ // ΑΕ και $\Theta\mathrm{K} = \dfrac{\mathrm{AE}}{2}$

Από τις σχέσεις ΗΖ // ΘΚ και ΘΚ // ΑΕ συμπεραίνουμε ότι ΗΖ //ΑΕ.

β) Από τις σχέσεις $\mathrm{HZ} = \dfrac{\Theta\mathrm{K}}{2}$ και $\Theta\mathrm{K} = \dfrac{\mathrm{AE}}{2}$ παίρνουμε ότι:

$$\Theta\mathrm{K} = 2\mathrm{HZ} \quad \text{και} \quad \mathrm{AE} = 2\Theta\mathrm{K}$$

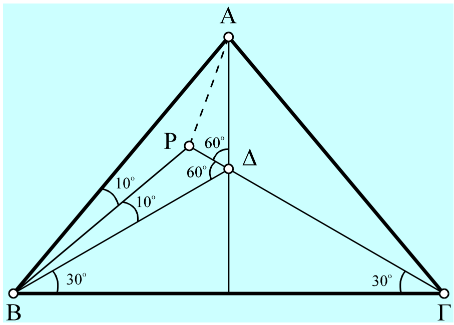
Άρα:

$$\mathrm{AE} = 2\Theta\mathrm{K} = 2 \cdot 2\mathrm{HZ} = 4\mathrm{HZ}$$

Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

2. Η αξία του έκκεντρου

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με $AB = A\Gamma$ **και** $\hat{A} = 80^o$**. Στο εσωτερικό του τριγώνου θεωρούμε σημείο Ρ τέτοιο, ώστε** $P\hat{B}\Gamma = 40^o$ **και** $P\hat{\Gamma}B = 30^o$**. Να αποδειχθεί ότι** $A\hat{P}\Gamma = 100^o$**.**



Υπόδειξη

Αν η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει την ΓΡ στο σημείο Δ, τότε:

(i) $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}\Gamma = 120^o$

(ii) **Στο τρίγωνο** $\overset{\Delta}{A\Delta B}$ **το Ρ είναι έγκεντρο.**

(iii) $P\hat{A}\Delta = 20^o$

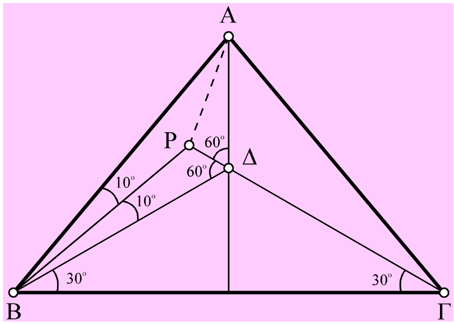
3. Η αξία του έκκεντρου - Λύση

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ **και** $\hat{\mathrm{A}}=80^{\mathrm{o}}$**. Στο εσωτερικό του τριγώνου θεωρούμε σημείο Ρ τέτοιο, ώστε** $\mathrm{P\hat{B}\Gamma}=40^{\mathrm{o}}$ **και** $\mathrm{P\hat{\Gamma}B}=30^{\mathrm{o}}$**. Να αποδειχθεί ότι** $\mathrm{A\hat{P}\Gamma}=100^{\mathrm{o}}$**.**

Υπόδειξη

Μέθοδος

Στην αναζήτηση του μέτρου γωνίας είναι πάντα χρήσιμο να αναζητάμε σε κάποιο κατάλληλο τρίγωνο ένα από τα χαρακτηριστικά του σημεία: **έγκεντρο ή περίκεντρο** διότι αυτά επιτρέπουν το σχηματισμό ζευγών με ίσες γωνίες.



Φέρουμε την ΑΔ, διχοτόμο της $\hat{\mathrm{A}}$. Τότε $\mathrm{B\hat{\Delta}\Gamma}=120^{\mathrm{o}}$, οπότε:

$$\mathrm{A\hat{\Delta}B}=\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}=\frac{240^{\mathrm{o}}}{2}=120^{\mathrm{o}}$$

Τελικά, οι ΒΡ, ΔΡ είναι διχοτόμοι στο $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta B}}$, οπότε το Ρ είναι έγκεντρο και έτσι η ΑΡ είναι επίσης διχοτόμος (της $\mathrm{B\hat{A}\Delta}=40^{\mathrm{o}}$).

Άρα $\mathrm{P\hat{A}\Delta}=20^{\mathrm{o}}$ και έτσι:

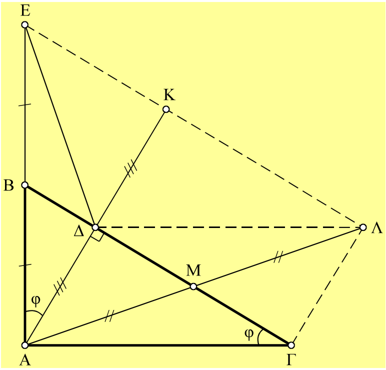
$$\mathrm{A\hat{P}\Gamma}=180^{\mathrm{o}}-\mathrm{P\hat{A}\Gamma}-\mathrm{A\hat{\Gamma}P}=180^{\mathrm{o}}-60^{\mathrm{o}}-20^{\mathrm{o}}=100^{\mathrm{o}}$$

4. Ορθόκεντρο – Το…. μυστικό στην καθετότητα

Εφαρμογή 1η

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 90^o$, το ύψος ΑΔ και το μέσο Μ του τμήματος ΓΔ. Στην προέκταση του ΑΒ παίρνουμε τμήμα $BE = BA$. Να αποδειχθεί ότι $E\Delta \perp AM$.

Λύση



Έστω Κ, Λ τα συμμετρικά του Α ως προς τα σημεία Δ, Μ. Επειδή:

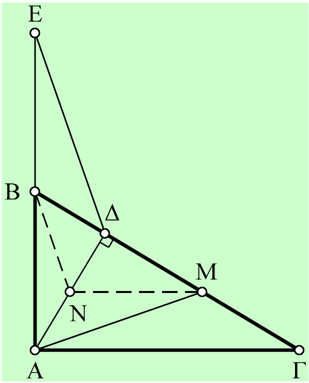
$$AB = BE\,,\ \ A\Delta = \Delta K\,,\ \ AM = M\Lambda$$

συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Ε, Κ, Λ είναι συνευθειακά, διότι ΕΚ // ΒΔ και ΚΛ // ΔΜ. Το ΑΔΛΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΛΔ // ΓΑ, δηλαδή $\Lambda\Delta \perp AE$. Επίσης $A\Delta \perp E\Lambda$, αφού $A\Delta \perp B\Gamma$ και ΒΓ // ΕΛ.

Στο τρίγωνο λοιπόν ΕΑΛ το Δ είναι ορθόκεντρο. Άρα η ΕΔ, ως ευθεία του τρίτου ύψους, είναι κάθετη στην ΑΛ, δηλαδή:

$$E\Delta \perp AM$$

Άλλος τρόπος



Αν Ν είναι το μέσο του ΑΔ, τότε ΜΝ // ΑΓ και έτσι:

$$MN \perp AB$$

Αλλά $A\Delta \perp BM$, οπότε στο $\overset{\Delta}{ABM}$ το Ν είναι ορθόκεντρο. Άρα:

$$BN \perp AM$$

Αλλά ΒΝ // ΕΔ, οπότε:

$$E\Delta \perp AM$$

Άλλος τρόπος (Με όμοια τρίγωνα)

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ είναι όμοια. Έτσι οι πλευρές είναι ανάλογες, οπότε:

$$\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{2M\Gamma} = \frac{\frac{AE}{2}}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{M\Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma}$$

Άρα $\overset{\Delta}{A\Delta E} \sim \overset{\Delta}{AM\Gamma}$, οπότε $A\hat{E}\Delta = M\hat{A}\Gamma$. Επομένως:

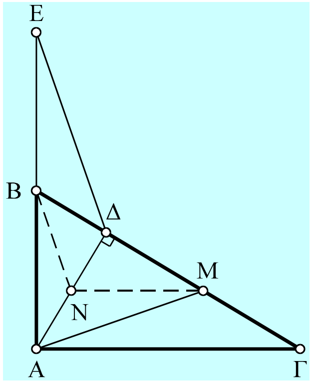
$$A\hat{E}\Delta + E\hat{A}M = M\hat{A}\Gamma + E\hat{A}M = E\hat{A}\Gamma = 90^o$$

Αυτό σημαίνει ότι $E\Delta \perp AM$.

Εφαρμογή 1η

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 90^o$**, το ύψος ΑΔ και το μέσο Μ του τμήματος ΓΔ. Στην προέκταση του ΑΒ παίρνουμε τμήμα** $BE = BA$ **. Να αποδειχθεί ότι** $E\Delta \perp AM$ **.**

Υπόδειξη



Αν Ν είναι το μέσο του ΑΔ, τότε ΜΝ // ΑΓ και έτσι:

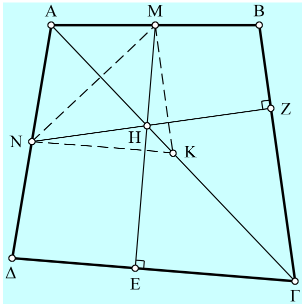
$$MN \perp AB$$

Αναζητάμε ένα **ορθόκεντρο**. Ποιο μπορεί να είναι αυτό ;

Εφαρμογή 2η

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα. Η κάθετη από το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ προς τη ΓΔ και η κάθετη από το μέσο Ν της ΑΔ προς τη ΒΓ τέμνονται στο σημείο Η. Να αποδειχθεί ότι το σημείο Η βρίσκεται πάνω στην ΑΓ.

Λύση



Έστω Κ το μέσο της διαγωνίου ΑΓ. Επειδή ΜΚ // ΒΓ και ΝΚ // ΓΔ, θα είναι:

$\mathrm{ME} \perp \mathrm{NK}$ και

$\mathrm{NZ} \perp \mathrm{MK}$

Άρα το Η είναι ορθόκεντρο στο τρίγωνο ΚΜΝ. Είναι ακόμα:

$\Gamma\mathrm{A} \perp \mathrm{B}\Delta$

οπότε:

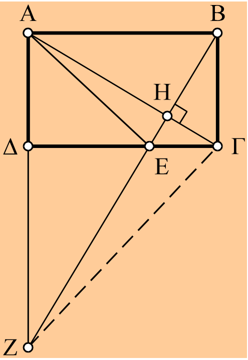
$\mathrm{KA} \perp \mathrm{MN}$

Συνεπώς και η ΚΑ, ως ευθεία του τρίτου ύψους του τριγώνου ΚΜΝ θα διέρχεται από το Η.

Εφαρμογή 3η

Από την κορυφή Β ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ, με $AB > B\Gamma$, φέρνουμε κάθετη προς τη διαγώνιο ΑΓ, η οποία τέμνει τη ΓΔ στο Ε και την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να αποδειχθεί ότι $AE \perp \Gamma Z$.

Λύση



Έστω Η το σημείο τομής των ΑΓ και ΒΖ. Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο ΓΑΖ είναι:

$$\Gamma\Delta \perp AZ \quad \text{και} \quad ZH \perp A\Gamma$$

Επομένως το Ε είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου αυτού. Άρα η ευθεία ΑΕ είναι ο φορέας του τρίτου ύψους, δηλαδή θα ισχύει $AE \perp \Gamma Z$.

5. Έγκεντρο

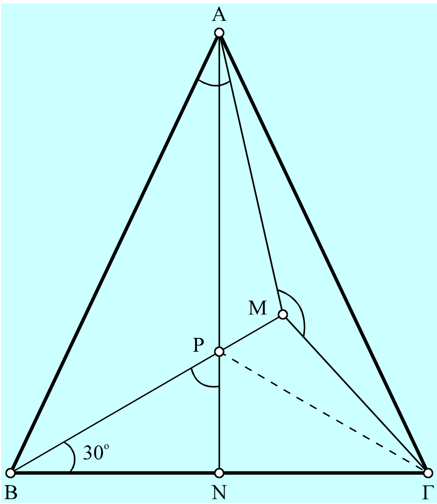
Στο εσωτερικό ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ υπάρχει ένα σημείο Μ, ώστε:

$$M\hat{B}\Gamma = 30^o \text{ και } M\hat{A}B = \frac{3}{4}B\hat{A}\Gamma.$$

Να αποδείξετε ότι $A\hat{M}\Gamma = 150^o$.

Λύση

Φέρνουμε το ύψος ΑΝ του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ που τέμνει την ΜΒ στο Ρ. Είναι τότε:



- $P\hat{B}N = P\hat{\Gamma}N = 30^o$,
- $B\hat{P}N = N\hat{P}\Gamma = 60^o$,
- $M\hat{P}\Gamma = 180^o - 60^o - 60^o = 60^o$.

Άρα $M\hat{P}\Gamma = M\hat{P}A$, οπότε η ΡΜ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{P}\Gamma$. Επειδή $M\hat{A}B = \frac{3}{4}B\hat{A}\Gamma$, είναι:

$$M\hat{A}\Gamma = \frac{1}{4}B\hat{A}\Gamma,$$

δηλαδή:

$$M\hat{A}\Gamma = \frac{1}{4}\cdot 2P\hat{A}\Gamma = \frac{1}{2}P\hat{A}\Gamma.$$

Άρα και η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $P\hat{A}\Gamma$, οπότε στο $\overset{\Delta}{PA\Gamma}$ το Μ είναι έγκεντρο. Άρα:

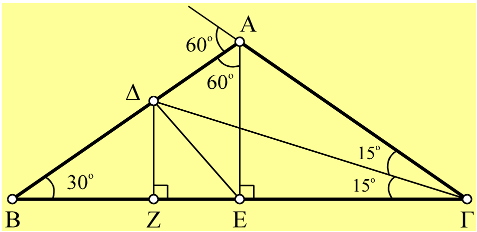
$$A\hat{M}\Gamma = 90^o + \frac{A\hat{P}\Gamma}{2} = 90^o + 60^o = 150^o.$$

6. Εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος

Μια ξεχωριστή γωνία

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}=120^o$. Φέρουμε τη διχοτόμο ΓΔ και έστω Ε, Ζ οι προβολές των Α, Δ πάνω στη ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $Z\Delta = ZE$.

Λύση



Φέρουμε την ΕΔ. Επειδή $\hat{B}=\hat{\Gamma}=30^o$, είναι $B\hat{A}E=60^o$. Άρα στο τρίγωνο ΑΕΓ η ΑΒ είναι εξωτερική διχοτόμος. Όμως η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, οπότε το Δ είναι παράκεντρο του τριγώνου ΑΕΓ για τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

Συνεπώς η ΕΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{E}B$, οπότε $A\hat{E}\Delta = \Delta\hat{E}Z = 45^o$. Επειδή $\Delta Z \perp B\Gamma$ και $\Delta\hat{E}Z = 45^o$, το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές, δηλαδή $Z\Delta = ZE$.

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.

Τίτλος: Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου *Έκδοση: 1.0 Ημερομηνία: 26.04.2024*

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

ΕΜΠΝΕΥΣΤΕΣ/ ΟΜΑΔΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ/ ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Κωνσταντίνος Ρεκούμης
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Λάμπρος Κατσάπας
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Νικόλαος Κουμάντος
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Ελένη Ρεκούμη
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03