3^{ος} Οδηγός επανάληψης

Ορισμοί-Θεωρήματα-Αποδείξεις

- Παράλληλες ευθείες
- Άθροισμα γωνιών τριγώνου
- Ισότητα τριγώνων
- Ανισοτικά θεωρήματα
- Σύγκριση χορδών

Με ερωτήσεις
Σωστού-Λάθους

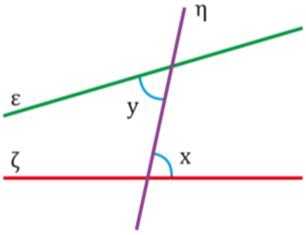
Περιεχόμενα

1.1 Παράλληλες ευθείες

Ορισμός

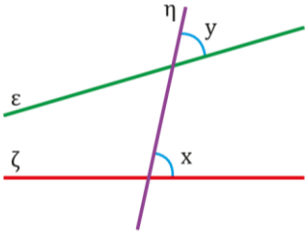
Δύο ευθείες του επιπέδου λέγονται **παράλληλες**, αν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, αν δηλαδή δεν τέμνονται.

Έννοιες-Επανάληψη από μικρότερες τάξεις



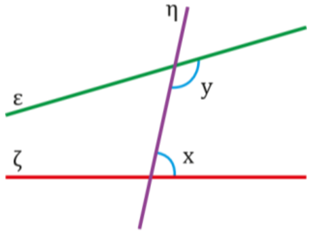
(Σχ. α)

Οι γωνίες x, y είναι εντός εναλλάξ.



(Σχ. β)

Οι γωνίες x, y είναι εντός – εκτός και επί τα αυτά.



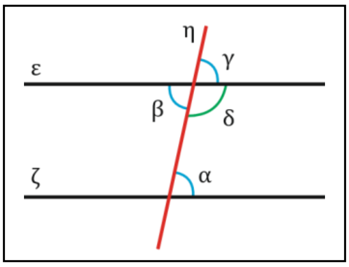
(Σχ. γ)

Οι γωνίες x, y είναι εκτός και επί τα αυτά.

Θεώρημα (Κριτήριο παραλληλίας)

Έστω ότι δύο ευθείες τέμνονται από μία τρίτη. Αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις, τότε οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες:

- Δύο εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.
- Δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες.
- Δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές.



Αν είναι:

- $\alpha = \beta$ (εντός εναλλάξ ίσες) ή
- $\alpha = \gamma$ (εντός, εκτός και επί τα αυτά ίσες) ή
- $\alpha + \delta = 180^{o}$ (εντός και επί τα αυτά παραπληρωματικές),

τότε οι ευθείες (ε) και (ζ) είναι παράλληλες.

Πόρισμα

Αν δύο ευθείες είναι κάθετες προς την ίδια ευθεία, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Θεώρημα

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε:

- Οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές.
- Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.
- Οι εντός – εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες.

Απόδειξη

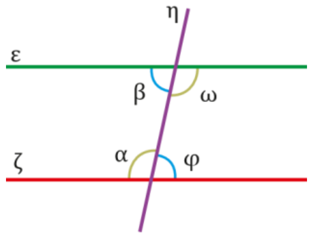
α) Έστω $\varepsilon // \zeta$ και φ, ω οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζει με αυτές η τέμνουσα (η) (Σχ. α). Θα αποδείξουμε ότι $\varphi+\omega=180^0$.

Έστω ότι $\varphi+\omega\neq 180^0$.

- Αν $\varphi+\omega<180^0$, τότε, σύμφωνα με το Ευκλείδειο αίτημα, οι ευθείες (ε) και (ζ) τέμνονται προς τα δεξιά της (η), άτοπο.
- Αν $\varphi+\omega>180^0$, τότε $\alpha+\beta<180^0$ και έτσι οι (ε), (ζ) τέμνονται αριστερά της (η), άτοπο.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση οδηγούμαστε σε άτοπο, οπότε θα είναι:

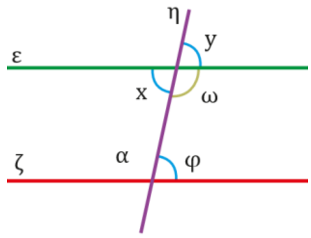
$$\varphi+\omega=180^o.$$



(Σχ. α)

β) Έστω φ και x δύο εντός εναλλάξ γωνίες (Σχ. β).
Αφού:
$\varphi+\omega=180^o$ και $x+\omega=180^o$,
οι γωνίες φ και x θα είναι ίσες, δηλαδή $\varphi=x$.
Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι λοιπόν ίσες.

γ) Ας πάρουμε τις εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες φ και y. Θα αποδείξουμε ότι $\varphi=y$.
Επειδή $\varphi+\omega=180^o$ και $y+\omega=180^o$, προκύπτει ότι $\varphi=y$, που είναι η ζητούμενη ισότητα.



(Σχ. β)

Αξίωμα παραλληλίας

Από σημείο εκτός ευθείας υπάρχει ακριβώς μία ευθεία παράλληλη προς αυτήν.

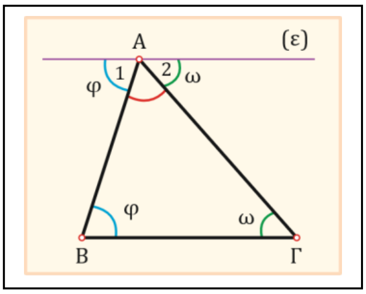
1.2 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Α. Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Θεώρημα

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές, δηλαδή 180^o.

Απόδειξη



Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία $(\varepsilon)//\text{ΒΓ}$. Είναι τότε:

- $\hat{B}=\hat{A}_1=\varphi$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων (ε) και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ.
- $\hat{\Gamma}=\hat{A}_2=\omega$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων (ε) και ΒΓ με τέμνουσα την ευθεία ΑΓ.

Επομένως $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=\varphi+\hat{A}+\omega=\hat{A}_1+\hat{A}+\hat{A}_2=180^o$. ■

Πορίσματα

α) Στα ορθογώνια τρίγωνα οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές.

β) Κάθε γωνία ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίση με 60^o.

γ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, τότε θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες (θα είναι ισογώνια).

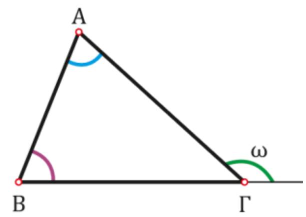
δ) Αν η γωνία της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι φ και οι ίσες γωνίες του είναι ω, τότε $\varphi = 180^o - 2\omega$, $\omega = 90^o - \frac{\varphi}{2}$.

Β. Εξωτερική γωνία τριγώνου

Θεώρημα

Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών του γωνιών.

Απόδειξη



Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι $\omega = \hat{A} + \hat{B}$, όπου $\omega = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$.

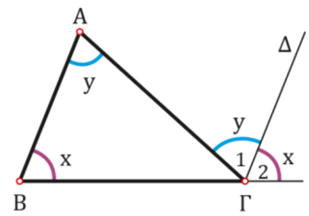
Πράγματι, στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o.$$

Είναι όμως $\omega + \hat{\Gamma} = 180^o$. Επομένως:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \omega + \hat{\Gamma} \text{ ή } \omega = \hat{A} + \hat{B}. \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση



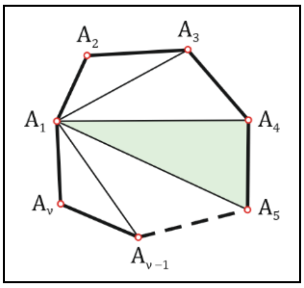
Αν φέρουμε ΓΔ // ΑΒ ,. Τότε $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A} = y$ και $\hat{\Gamma}_2 = \hat{B} = x$.

Επομένως:

$$\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = y + x = \hat{A} + \hat{B}.$$

Θεώρημα

Το άθροισμα των γωνιών κάθε (κυρτού) ν-γώνου είναι ίσο με: $2\nu - 4$ ορθές.



Απόδειξη

Φέρουμε όλες τις διαγώνιες του (κυρτού) ν-γώνου $A_1A_2 \ldots A_\nu$ από την κορυφή A_1. Το πλήθος αυτών των διαγωνίων είναι $\nu-3$, σχηματίζονται όμως $\nu-2$ τρίγωνα. Αφού το άθροισμα των γωνιών καθενός από αυτά τα τρίγωνα είναι 2 ορθές, το άθροισμα όλων των γωνιών του ν-γώνου θα είναι:

$$\Sigma_\nu = 2(\nu-2) = 2\nu - 4 \text{ ορθές.} \quad \blacksquare$$

Επειδή η ορθή γωνία έχει μέτρο 90^o, το άθροισμα των γωνιών του ν-γώνου θα είναι:

$$\boxed{\Sigma_\nu = (180\nu - 360)^o}$$

Γωνίες με πλευρές παράλληλες

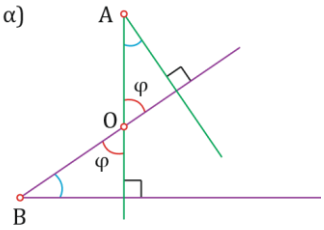
Για τις γωνίες με κάθετες ή παράλληλες πλευρές έχουμε τα παρακάτω συμπεράσματα:

Πρόταση 1

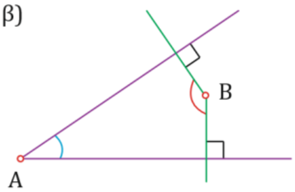
Έστω ότι δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους μία προς μία κάθετες.

- Αν οι γωνίες είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες, τότε είναι **ίσες.** (Σχ. α)
- Αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία, τότε είναι **παραπληρωματικές**. (Σχ. β)

(Σχ. α)



(Σχ. β)



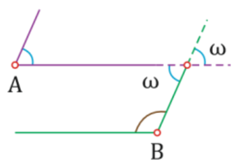
Πρόταση 2

Έστω ότι δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους παράλληλες.

- Αν οι γωνίες είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες, τότε είναι **ίσες.** (Σχ. α)
- Αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία, τότε είναι **παραπληρωματικές**. (Σχ. β)

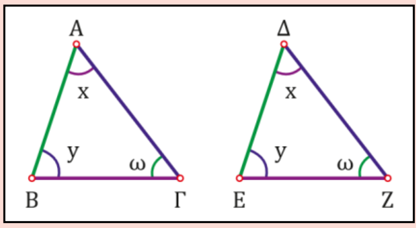
(Σχ. α)

(Σχ. β)



2.1: Ισότητα Τριγώνων

Δύο τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους ίσες, μία προς μία, και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές αντίστοιχα ίσες, μία προς μία, λέγονται **ίσα**.



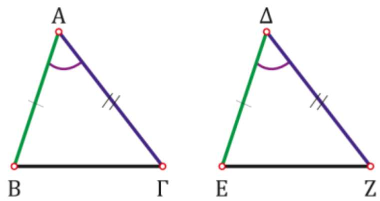
Σε δύο **ίσα τρίγωνα:**

- Απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
- Απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

Κριτήρια ισότητας τυχαίων τριγώνων

1ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (ΠΓΠ)

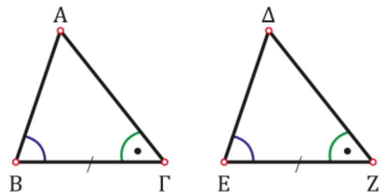
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες, μία προς μία, και τις περιεχόμενες στις ίσες πλευρές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.



(Σχ. α)

2ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (ΓΠΓ)

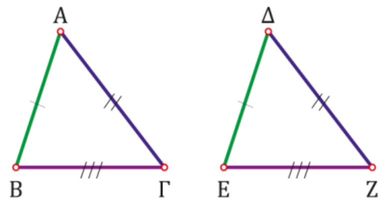
Αν δύο τρίγωνα έχουν από μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες, μία προς μία, τότε είναι ίσα.



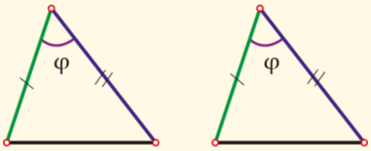
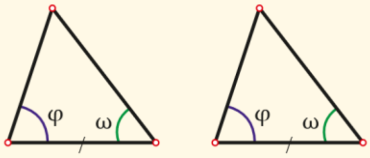
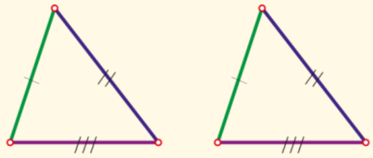
(Σχ. β)

3ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (ΠΠΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες, μία προς μία, τότε είναι ίσα.



(Σχ. γ)

Τα κριτήρια ισότητας τριγώνων		
1ο Κριτήριο (ΠΓΠ)	**2ο Κριτήριο (ΓΠΓ)**	**3ο Κριτήριο (ΠΠΠ)**
		
Δύο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες, μία προς μία, ίσες.	Μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες, μία προς μία.	Τρεις πλευρές ίσες, μία προς μία.

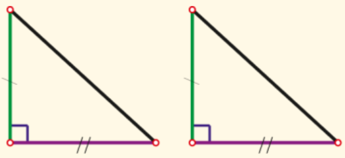
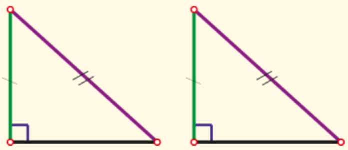
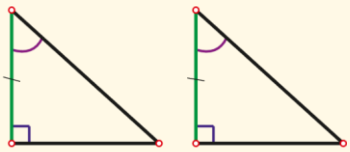
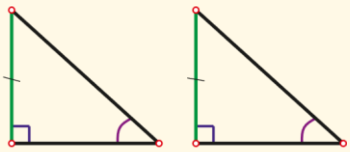
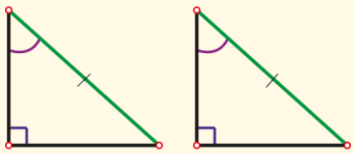
Θεώρημα

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

α) Οι γωνίες της βάσης είναι ίσες.

β) Η διχοτόμος, η διάμεσος και το ύψος προς τη βάση συμπίπτουν.

Β. Ισότητα Ορθογωνίων Τριγώνων

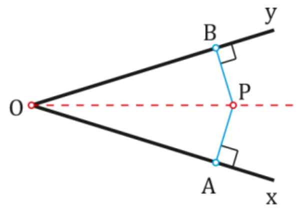
Τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων		
1ο Κριτήριο 	**2ο Κριτήριο** 	
Αν δύο αντίστοιχες πλευρές είναι μία προς μία ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.		
3ο Κριτήριο 	**4ο Κριτήριο** 	**5ο Κριτήριο** 
Αν μια αντίστοιχη πλευρά και μια αντίστοιχη γωνία είναι μία προς μία ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.		

Κριτήριο (γενικό)

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες ή μία αντίστοιχη πλευρά και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίσες, μία προς μία, τότε αυτά είναι ίσα.

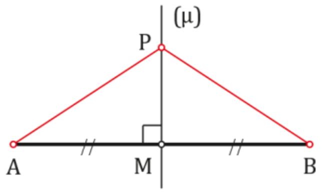
Βασικές προτάσεις

(α) Τα σημεία της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχουν από τις πλευρές της.



(β) Αν ένα εσωτερικό σημείο μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της, τότε αυτό βρίσκεται στη διχοτόμο της.

(γ) Τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχουν από τα άκρα του και αντιστρόφως.



Κριτήρια για να είναι ένα τρίγωνο ισοσκελές

Όπως το ορθογώνιο τρίγωνο, έτσι και το ισοσκελές παίζει έναν σημαντικό ρόλο σε όλη την έκταση της σχολικής γεωμετρίας.

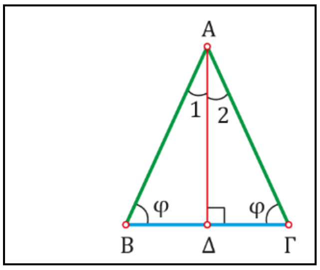
Είδαμε σε προηγούμενες ενότητες ορισμένες σημαντικές ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου, όπως:

- Οι γωνίες της βάσης είναι ίσες.
- Το ύψος, η διάμεσος και η διχοτόμος προς τη βάση συμπίπτουν.

Πότε όμως ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές; Θα δούμε ορισμένα κριτήρια.

Κριτήριο 1ο

Αν δύο γωνίες τριγώνου είναι ίσες, τότε αυτό είναι ισοσκελές.



Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \varphi$. Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Είναι τότε:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 90^o - \varphi$$

και έτσι τα τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ είναι ίσα. Άρα $AB = A\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Για να αποδείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, έχουμε και το παρακάτω απλό αλλά χρήσιμο κριτήριο.

Κριτήριο 2ο

Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, αν:

α) Μια διάμεσος είναι και διχοτόμος.

β) Μια διάμεσος είναι και ύψος.

γ) Μια διχοτόμος είναι και ύψος.

Απόδειξη

α) Έστω ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΑΜ είναι συγχρόνως και διχοτόμος. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\mathrm{MB} = \mathrm{M\Gamma} \text{ και } \mathrm{M\hat{A}B} = \mathrm{M\hat{A}\Gamma} = \varphi.$$

Στην προέκταση του ΑΜ παίρνουμε τμήμα $\mathrm{M\Delta} = \mathrm{MA}$.

Τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΓΔ είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{AB}$ και:

$$\hat{\Delta} = \mathrm{M\hat{A}B} = \varphi = \mathrm{M\hat{A}\Gamma}.$$

Αφού $\mathrm{\Gamma\hat{\Delta}A} = \mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta} = \varphi$, το τρίγωνο ΓΑΔ είναι ισοσκελές, οπότε:

$$\mathrm{\Gamma A} = \mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{AB}.$$

Είναι λοιπόν $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Έστω τώρα ότι η διάμεσος ΑΜ είναι και ύψος.

Αφού $\mathrm{MB} = \mathrm{M\Gamma}$ και $\mathrm{AM} \perp \mathrm{B\Gamma}$, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ είναι ίσα (η ΑΜ είναι κοινή). Επομένως $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$.

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι η διχοτόμος ΑΜ είναι και ύψος, δηλαδή $\mathrm{AM} \perp \mathrm{B\Gamma}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ είναι ίσα, αφού έχουν την ΑΜ κοινή και $\mathrm{M\hat{A}B} = \mathrm{M\hat{A}\Gamma} = \varphi$, διότι η ΑΜ είναι διχοτόμος της $\hat{\mathrm{A}}$. Άρα $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. ■

Συμπέρασμα

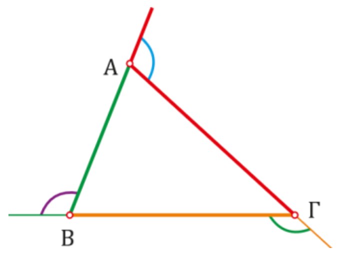
Αν κάποιο από τα τρία στοιχεία:

ύψος, διάμεσος, διχοτόμος

ενός τριγώνου είναι συγχρόνως και ένα από τα υπόλοιπα δύο, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

2.2: Ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα

Α. Εξωτερική και απέναντι εσωτερική γωνία



Θεώρημα

Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι εσωτερικές γωνίες του τριγώνου

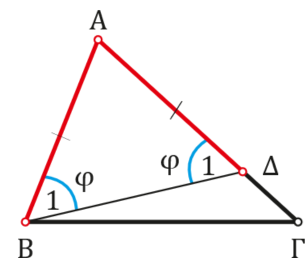
Β. Σύγκριση πλευρών – γωνιών τριγώνου

Θεώρημα

Απέναντι από άνισες πλευρές ενός τριγώνου βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες.

Απόδειξη

Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Θα αποδείξουμε ότι $\hat{Γ} < \hat{Β}$, δηλαδή απέναντι από τη μικρότερη πλευρά βρίσκεται η μικρότερη γωνία.



Αφού $ΑΓ > ΑΒ$, πάνω στην ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ με $ΑΔ = ΑΒ$.

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1 = φ$.

Το Δ είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας $\hat{Β}$, οπότε $\hat{Β} > Α\hat{Β}Δ = φ$, δηλαδή $\hat{Β} > \hat{Δ}_1$.

Στο τρίγωνο ΔΒΓ η γωνία $\hat{Δ}_1$ είναι εξωτερική. Επομένως $\hat{Δ}_1 > \hat{Γ}$. Είναι λοιπόν $\hat{Β} > \hat{Δ}_1 > \hat{Γ}$, δηλαδή $\hat{Β} > \hat{Γ}$. Επομένως $\hat{Γ} < \hat{Β}$.

Αντίστροφα

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι $\hat{Β} > \hat{Γ}$. Θα αποδείξουμε ότι $β > γ$.

- Αν ήταν $β = γ$, τότε θα παίρναμε $\hat{Β} = \hat{Γ}$, άτοπο.
- Αν είχαμε $β < γ$, τότε, σύμφωνα με το ευθύ, θα παίρναμε $\hat{Β} < \hat{Γ}$, άτοπο.

Επομένως αποδείξαμε ότι $β > γ$. ■

Θεώρημα

Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε αυτό είναι ισοσκελές.

Απόδειξη

Έστω ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Θα αποδείξουμε, με βάση το προηγούμενο θεώρημα, ότι $AB = A\Gamma$, δηλαδή $\gamma = \beta$.

- Αν $\beta < \gamma$, τότε $\hat{B} < \hat{\Gamma}$, άτοπο, αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
- Αν $\beta > \gamma$, τότε $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, άτοπο.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση οδηγούμαστε σε άτοπο. Άρα $\beta = \gamma$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Γ. Η τριγωνική ανισότητα

Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma, \quad |\alpha - \gamma| < \beta < \alpha + \gamma, \quad |\alpha - \beta| < \gamma < \alpha + \beta$$

Τριγωνική ανισότητα

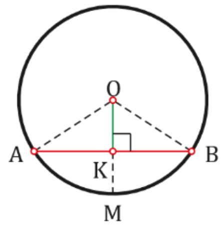
Δηλαδή, **κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.**

2.3: Κύκλος: Χορδές – Αποστήματα

Α. Χορδές και αποστήματα

Αν ΑΒ είναι χορδή ενός κύκλου, τότε η απόσταση του Ο από την ευθεία ΑΒ λέγεται **απόστημα**. Έτσι, στο σχήμα, το ΟΚ είναι το απόστημα της χορδής ΑΒ.

Ας πάρουμε έναν κύκλο (Ο, R) και μια χορδή του ΑΒ. Φέρνουμε το απόστημα ΟΚ της χορδής αυτής, δηλαδή $OK \perp AB$.
Επειδή $OA = OB = R$, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ. Επομένως το ύψος ΟΚ είναι και διάμεσος και διχοτόμος. Το Κ είναι λοιπόν μέσο της ΑΒ και η ευθεία ΑΚ διχοτομεί το τόξο $\overset{\frown}{AB}$, αφού διχοτομεί την επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$. Έτσι:



Θεώρημα

Η κάθετη από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί και τη χορδή και τα τόξα που σχηματίζει.

Β. Σύγκριση χορδών-αποστημάτων

Θεώρημα

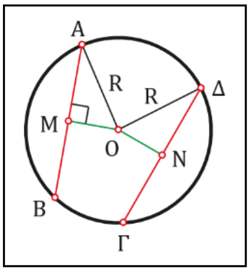
Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, αν και μόνο αν έχουν ίσα αποστήματα.

Απόδειξη

Θεωρούμε αρχικά δύο ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ του κύκλου (Ο, R) και τα αποστήματά τους ΟΜ, ΟΝ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι ΟΜ = ΟΝ.
Τα Μ, Ν είναι μέσα των ΑΒ, ΓΔ και αφού $AB = \Gamma\Delta$, θα είναι $AM = \Delta N$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΜΑ και ΟΝΔ έχουν:

$$MA = N\Delta \quad \text{και} \quad OA = O\Delta = R$$

οπότε είναι ίσα. Επομένως θα είναι $OM = ON$ των χορδών ΑΒ και ΓΔ, δηλαδή τα αποστήματα των χορδών ΑΒ και ΓΔ είναι ίσα.



Αντίστροφα

Έστω ότι τα αποστήματα ΟΜ και ΟΝ των χορδών ΑΒ και ΓΔ είναι ίσα. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΜΑ και ΟΝΔ είναι ίσα, διότι:

$$OM = ON \quad \text{και} \quad OA = O\Delta = R$$

Άρα $AM = \Delta N$, δηλαδή $\frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ και κατά συνέπεια $AB = \Gamma\Delta$.

Οι χορδές λοιπόν AB και ΓΔ είναι ίσες.

Γ. Σύγκριση τόξων και χορδών

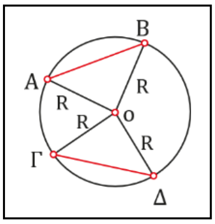
Ας πάρουμε δύο ίσα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου (O, R). Επειδή:

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$,

θα είναι $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$, αφού σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες επίκεντρες γωνίες. Τα τρίγωνα λοιπόν OAB και ΟΓΔ είναι ίσα, αφού

$OA = O\Gamma = R$, $OB = O\Delta = R$ και $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$.

Θα είναι επομένως και $AB = \Gamma\Delta$, δηλαδή οι χορδές AB και ΓΔ είναι ίσες. Αποδείξαμε λοιπόν ότι:



Θεώρημα

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι αντίστοιχες χορδές τους είναι ίσες.

Ελέγχουμε τις βασικές γνώσεις στη θεωρία

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος(Σ)

1ος Κύκλος

1. (α) Δύο ευθείες του επιπέδου λέγονται παράλληλες, αν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, αν δηλαδή δεν τέμνονται.

Σ Λ

(β) Έστω ότι δύο ευθείες τέμνονται από μία τρίτη. Αυτές είναι παράλληλες, αν

(i) Δύο εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.

Σ Λ

(ii) Δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Σ Λ

(iii) Δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Σ Λ

(δ) Αν δύο ευθείες είναι κάθετες προς την ίδια ευθεία, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Σ Λ

(ε) Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες και σχηματίζει με αυτές τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

Σ Λ

2. (α) Από σημείο εκτός ευθείας υπάρχει ακριβώς μία ευθεία παράλληλη προς αυτήν.

Σ Λ

(β) Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε:

(i) Οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Σ Λ

(ii) Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Σ Λ

(iii) Οι εντός – εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες.

Σ Λ

(γ) Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 360^o.

Σ Λ

(δ) Στα ορθογώνια τρίγωνα οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές.

Σ Λ

(ε) Κάθε γωνία ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίση με 60^o

Σ Λ

(στ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, τότε θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

(ζ) Αν η γωνία της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι φ και οι ίσες γωνίες του είναι ω, τότε:

$$\varphi = 180^o + 2\omega\,, \quad \omega = 90^o + \frac{\varphi}{2}$$

(η) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών του γωνιών.

Σ Λ

2ος Κύκλος

1. α) Να αναφέρετε τα κριτήρια ισότητας τυχαίων και ορθογωνίων τριγώνων, χαράσσοντας τα αντίστοιχα σχήματα.

β) Να γράψετε τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου.

γ) Να γράψετε τα κριτήρια, ώστε ένα τρίγωνο να είναι ισοσκελές.

δ) Ποια πρόταση συνδέει χορδές και αποστήματα σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους;

ε) Τι γνωρίζετε για την εξωτερική γωνία τριγώνου;

στ) Πώς συγκρίνουμε πλευρές ή γωνίες σε ένα τρίγωνο; Να διατυπώσετε τη σχετική πρόταση.

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (Σωστές) ή Λ (Λανθασμένες).

α) Αν δύο τρίγωνα έχουν μία προς μία πλευρά και δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Σ Λ

β) Δυο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές μία προς μία ίσες είναι ίσα.

Σ Λ

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο κάθε ύψος είναι και διάμεσος.

Σ Λ

δ) Σε ένα τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες.

Σ Λ

ε) Αν τα αποστήματα δύο χορδών ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές είναι ίσες.

Σ Λ

στ) Αν δοθούν τρία τμήματα, μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε τρίγωνο με πλευρές τα τμήματα αυτά.

Σ Λ

ζ) Τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός τμήματος ισαπέχουν από τα άκρα του και αντιστρόφως.

Σ Λ

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.

Τίτλος: Οδηγός επανάληψης Παραλληλία-Τρίγωνα-Κύκλος

Έκδοση: 1.0 Ημερομηνία: 26.04.2024

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

ΕΜΠΝΕΥΣΤΕΣ/ ΟΜΑΔΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ/ ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Κωνσταντίνος Ρεκούμης
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Λάμπρος Κατσάπας
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Νικόλαος Κουμάντος
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Ελένη Ρεκούμη
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03