Διδακτικό εγχειρίδιο/ Οδηγός 3

Διάταξη πραγματικών αριθμών

- **Ορισμοί**
- **Ιδιότητες**
- **Εφαρμογές – ασκήσεις**

Εισαγωγικό σημείωμα

Οι ανισότητες, οι ιδιότητες και οι εφαρμογές τους, είναι ένα από τα σπουδαιότερα κεφάλαια των Μαθηματικών. Ο χειρισμός τους απαιτεί πολλές φορές άριστη γνώση του λεγόμενου τεχνικού μέρους των Μαθηματικών σε συνδυασμό με γνώσεις και δεξιότητες που αποκτούνται με επιμελή και επίμονη προσπάθεια. Αυτός εξάλλου είναι ένας από τους λόγους που θέματα ανισοτήτων μπαίνουν συχνά σε διαγωνισμούς Μαθηματικών.

Το παρόν εγχειρίδιο σκοπό έχει να εισάγει τους/τις μαθητές/τριες στον γοητευτικό κόσμο των ανισοτήτων. Μην ξεχνάμε ότι η Φύση αρέσκεται στην ποικιλία φαινομένων στα οποία κυριαρχεί η ανισότητα έναντι της ισότητας. Περιέχει με απλό και κατανοητό τρόπο όλες εκείνες τις ασκήσεις που είναι κατάλληλες για Μαθητές/τριες Λυκείου.

Περιεχόμενα

Βασικές ιδιότητες της Διάταξης

Για την διάταξη έχουμε τους ορισμούς και ιδιότητες του επόμενου πίνακα:

Πίνακας 1
Ορισμοί – ιδιότητες διάταξης

Α. α) Είναι $\alpha \geq \beta$ αν και μόνο αν $\alpha - \beta \geq 0$ και

$\alpha \leq \beta$ αν και μόνο αν $\alpha - \beta \leq 0$

β) αν α, β > 0, τότε $\alpha + \beta > 0$ και $\alpha\beta > 0$

γ) αν $\alpha \geq \beta$ και $\gamma \geq \delta$, τότε $\alpha + \gamma \geq \beta + \delta$

δ) αν $\alpha \geq \beta \geq 0$ και $\gamma \geq \delta \geq 0$, τότε $\alpha\gamma \geq \beta\delta$

ε) αν $\alpha \geq \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha\gamma \geq \beta\gamma$

στ) αν $\alpha \geq \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$

ζ) αν $\alpha \geq \beta$ και $\beta \geq \gamma$, τότε $\alpha \geq \gamma$ *(μεταβατική ιδιότητα)*

η) το γινόμενο και το πηλίκο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός

Β. Ισχύει ότι:

α) $\alpha^{2\nu} \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$

β) Είναι $\alpha^{2\nu+1} \leq \beta^{2\nu+1}$ αν και μόνο αν $\alpha \leq \beta$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

γ) Είναι $\alpha^{2\nu} \leq \beta^{2\nu}$ αν και μόνο αν $|\alpha| \leq |\beta|$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$

δ) Αν οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι με $\alpha \geq \beta$, τότε $\frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\beta}$

Παρατηρήσεις

1. *Αποφεύγουμε να αφαιρούμε ή διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.*

2. *Οι πιο πολλές ιδιότητες των ανισοτήτων ισχύουν για μη αρνητικούς αριθμούς* $(\alpha \geq 0)$ *και για το λόγο αυτό χρειάζεται κάθε φορά να ελέγχουμε, αν πληρούνται οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή των ιδιοτήτων αυτών.*

3. *Όλες οι παραπάνω ιδιότητες είναι πολύ βασικές και προκύπτουν από τον ορισμό. Η έκταση του άρθρου αυτού δεν μας επιτρέπει να παρουσιάσουμε τις σχετικές αποδείξεις.*

4. *Στο δεύτερο μέρος θα παρουσιάσουμε τις πιο σημαντικές ανισότητες. Όλες αυτές τις ανισότητες ο μαθητής πρέπει να γνωρίζει πολύ καλά, ώστε να μπορεί να τις εφαρμόσει κατάλληλα και αποτελεσματικά, όπου αυτό κριθεί απαραίτητο.*

Για την διάταξη έχουμε τις ανισότητες του επόμενου πίνακα:

Πίνακας 2

Βασικές ανισότητες και οι αποδείξεις τους

Για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν οι ανισότητες:

Α. α) $\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$,

β) $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$, γ) $2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2$ για κάθε $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

B. α) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

β) $(\alpha+\beta+\gamma)^2\geq3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$,

γ) $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2$ για κάθε $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη

A. α) Είναι

$$\alpha^2+\beta^2\geq2\alpha\beta$$

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq0$$

$$(\alpha-\beta)^2\geq0, \text{ που ισχύει.}$$

β) Έχουμε:

$$(\alpha+\beta)^2\geq4\alpha\beta$$

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-4\alpha\beta\geq0$$

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq0$$

$$(\alpha-\beta)^2\geq0, \text{ που ισχύει.}$$

γ) Είναι:

$$2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2$$

$$2\alpha^2+2\beta^2\geq\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq0$$

$$(\alpha-\beta)^2\geq0, \text{ που ισχύει.}$$

Και στις τρεις από τις παραπάνω ανισότητες η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=\beta$.

Β. α) Ισχύει ότι:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

$$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha\geq0$$

$$(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)+(\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2)\geq0$$

$$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\geq0,$$

που ισχύει, ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών.

Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=\beta=\gamma$.

Ασκήσεις

1. Αν $\alpha<1<\beta$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3-1<\alpha^2-\alpha$,

β) $\alpha+\beta>\alpha\beta+1$.

2. Αν $\alpha=2^{65}$ και $\beta=5^{22}-125^7$, να αποδείξετε ότι $\alpha>\beta$.

3. Αν x, y είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α) $x^4+y^2\geq2x^2y$ και $y^4+x^2\geq2y^2x$,

β) $\dfrac{x}{x^4+y^2}+\dfrac{y}{y^4+x^2}\leq\dfrac{1}{xy}$.

Πότε ισχύει η ισότητα στις παραπάνω ανισότητες;

4. Αν $\alpha,\ \beta \geq 1$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{(1+\alpha)(1+\beta)}{1+\alpha\beta} \leq 2$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

5. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

α) $\alpha^3 - \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha - \beta)$, με $\alpha \geq \beta$,

β) $\alpha^3 - \beta^3 > (\alpha - \beta)^3$, με $\alpha > \beta > 0$.

6. Αν $x > 0$ και $y > 0$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{x^3}{y^3} + \dfrac{y^3}{x^3} \geq \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

7. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 + 5 \geq 2\alpha + 4\beta$ για κάθε α, β.

β) $\dfrac{\alpha}{\beta^2} + \dfrac{\beta}{\alpha^2} \geq \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$, όπου $\alpha,\ \beta > 0$.

γ) $(\alpha^2 + 2007\alpha + 1)(\beta^2 + 2007\beta + 1) \geq 2009^2$, όπου α, β είναι θετικοί αριθμοί με γινόμενο 1.

δ) $\dfrac{\alpha^4 + \beta^4}{2} \geq \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$ για κάθε α, β.

8. Έστω α, β, γ θετικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \dfrac{\beta^2}{\gamma^2} \geq \dfrac{2\alpha\beta}{\gamma}$,

β) $\beta^2+\dfrac{\gamma^2}{\alpha^2}\geq\dfrac{2\beta\gamma}{\alpha}$,

γ) $\left(\alpha^2+\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\left(\beta^2+\dfrac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)\left(\gamma^2+\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\geq 8\alpha\beta\gamma$.

9. Αν $x,\ y>0$ και $xy=1$, να αποδείξετε ότι:

α) $x+y\geq 2$,

β) $\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{2+y}\leq\dfrac{2}{3}$.

Πότε ισχύει η ισότητα στις παραπάνω ανισότητες;

10. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

β) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, για τυχαίους αριθμούς α, β, γ. Πότε ι-σχύει η ισότητα;.

11. Αν $\alpha>2$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3>2\alpha^2-\alpha+2$,

β) $\alpha^3+2\alpha>\alpha^2+2$.

12. Έστω $\alpha>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geq 2$,

β) $\alpha^4+\dfrac{1}{\alpha^2}\geq 2\alpha$,

γ) $\alpha^4+\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\geq 4$.

Πότε ισχύει η ισότητα στις παραπάνω ανισότητες;

13. Να αποδείξετε ότι:

α) $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq 2\alpha(\beta+\gamma)$,

β) $(\alpha+\beta+\gamma)^2\geq \alpha(\beta+\gamma-\alpha)+\beta(\gamma+\alpha-\beta)+\gamma(\alpha+\beta-\gamma)$.

14. Αν α, β, γ είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2+\beta^2>\gamma^2-2\alpha\beta$,

β) $\alpha^2+\beta^2<\gamma^2+2\alpha\beta$,

γ) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$.

15. Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α, β, γ με $\alpha\beta\gamma=1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha\beta+\gamma\geq 2$,

β) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1\geq 2(\alpha\beta+\gamma)$,

γ) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq 3$.

16. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha^3+\beta^3}{2}\geq\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$ για κάθε $\alpha,\ \beta\geq 0$.

β) $\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\leq\frac{\alpha^3+\beta^3}{2}$ για κάθε $\alpha,\ \beta\geq 0$.

17. Αν α, β, $\gamma>0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}\geq\alpha+\beta$,

β) $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma}+\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha}+\dfrac{\gamma^2+\alpha^2}{\beta}\geq 2(\alpha+\beta+\gamma)$.

18. Αν α, β και γ θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\alpha^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}\geq\dfrac{2\alpha-\beta}{3}$,

β) $\dfrac{\alpha^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}+\dfrac{\beta^3}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2}+\dfrac{\gamma^3}{\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2}\geq\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

19. Έστω α, β, $\gamma>0$, με $\alpha\beta\gamma=1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}\geq\dfrac{1}{3}$.

β) $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}+\dfrac{\beta^3+\gamma^3}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2}+\dfrac{\gamma^3+\alpha^3}{\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2}\geq\dfrac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$.

20. Αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=x^2+y^2+\omega^2=3$, να αποδείξετε ότι $\alpha x+\beta y+\gamma\omega\leq 3$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

21. Αν α, β, γ και δ είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4 \geq 4\alpha\beta\gamma\delta .$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

22. Αν $\alpha+\beta=2$, να αποδείξετε ότι $\alpha^4+\beta^4 \geq 2$.

Απαντήσεις – υποδείξεις για τη λύση των ασκήσεων

1. Είναι:

$$\alpha^3 - 1 < \alpha^2 - \alpha \;\text{ ή }\; \alpha^3 - \alpha^2 - 1 + \alpha < 0 \;\text{ ή}$$

$$\alpha^2(\alpha - 1) + (\alpha - 1) < 0 \;\text{ ή}$$

$$(\alpha^2 + 1)(\alpha - 1) < 0,\ \text{που ισχύει}$$

διότι $\alpha^2 + 1 > 0$ και $\alpha < 1$ ή $\alpha - 1 < 0$.

β) Είναι:

$$\alpha + \beta > \alpha\beta + 1 \;\text{ ή }\; \alpha + \beta - \alpha\beta - 1 > 0 \;\text{ ή}$$

$$\alpha(1 - \beta) - (1 - \beta) > 0 \;\text{ ή}$$

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0,\ \text{που ισχύει,}$$

διότι $\alpha < 1$ ή $\alpha - 1 < 0$ και $1 < \beta$ ή $1 - \beta < 0$.

2. Είναι:

- $\alpha = 2^{65} = 2^2 \cdot 2^{63} = 4(2^3)^{21} = 4 \cdot 8^{21}$
- $\beta = 5^{22} - 125^7 = 5^{22} - (5^3)^7 = 5^{22} - 5^{21} = 5^{21}(5 - 1) = 4 \cdot 5^{21}$.

Επειδή $8 > 5$, θα είναι και $8^{21} > 5^{21}$.

Άρα $4 \cdot 8^{21} > 4 \cdot 5^{21}$, δηλαδή $\alpha > \beta$.

3. α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

- $x^4 + y^2 - 2x^2y \geq 0$ ή $(x^2)^2 - 2x^2y + y^2 \geq 0$ ή

  $(x^2 - y)^2 \geq 0$,

  η οποία ισχύει, διότι γενικά $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε α.

- $y^4 + x^2 - 2y^2x \geq 0$ ή $(y^2)^2 - 2y^2x + x^2 \geq 0$ ή

$$(y^2 - x)^2 \geq 0,$$

η οποία ισχύει, διότι γενικά $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε α.

β) Αφού:

$$x^4 + y^2 \geq 2x^2y > 0 \text{ και } y^4 + x^2 \geq 2y^2x > 0,$$

- $\dfrac{1}{x^4+y^2} \leq \dfrac{1}{2x^2y}$ ή $\dfrac{x}{x^4+y^2} \leq \dfrac{x}{2x^2y}$ ή

  $\dfrac{x}{x^4+y^2} \leq \dfrac{1}{2xy}$ (1).

- $\dfrac{1}{y^4+x^2} \leq \dfrac{1}{2y^2x}$ ή $\dfrac{y}{y^4+x^2} \leq \dfrac{y}{2y^2x}$ ή

  $\dfrac{y}{y^4+x^2} \leq \dfrac{1}{2yx}$ (2).

Οι ανισότητες (1) και (2) έχουν την ίδια φορά, οπότε προσθέτουμε κατά μέλη και παίρνουμε:

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{2xy} + \frac{1}{2xy} \text{ ή}$$

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{xy}.$$

Για να ισχύει η ισότητα στο ερώτημα (α), πρέπει:

$$x^2 - y = 0 \text{ και } y^2 - x = 0.$$

Πρέπει επομένως $x^2 = y$ και $y^2 = x$.

Η πρώτη σχέση δίνει:

$$(x^2)^2 = y^2 \text{ ή } x^4 = y^2 \text{ ή } x^4 = x \text{ ή}$$

$$x^4 - x = 0 \text{ ή } x(x^3 - 1) = 0 \text{ ή}$$

$$x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει μόνο αν $x = 1$. Άρα θα είναι $x = 1$ και $y = 1$.

Εναλλακτικά, οι $x^2 = y$, $y^2 = x$, δίνουν $x^3 = y^3$, οπότε $x = y$. Άρα $x = y = 1$.

Αντίστοιχα και για το ερώτημα (β).

4. Γίνεται: $\dfrac{(1+\alpha)(1+\beta)}{1+\alpha\beta} \le 2 \Leftrightarrow 1+\beta+\alpha+\alpha\beta \le 2+2\alpha\beta \Leftrightarrow$

$$1-\alpha-\beta+\alpha\beta \ge 0 \Leftrightarrow (1-\alpha)-\beta(1-\alpha) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha)(1-\beta) \ge 0 \text{, ισχύει.}$$

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha = 1$ ή $\beta = 1$.

5. α) Είναι:

$$\alpha^3 - \beta^3 \ge \alpha\beta(\alpha-\beta) \text{ ή}$$

$$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) - \alpha\beta(\alpha-\beta) \ge 0 \text{ ή}$$

$$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-\alpha\beta) \ge 0 \text{ ή}$$

$$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2) \ge 0 \text{, που ισχύει.}$$

β) Είναι:

$$\alpha^3 - \beta^3 > (\alpha-\beta)^3 \text{ ή}$$

$$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) - (\alpha-\beta)^3 > 0 \text{ ή}$$

$$(\alpha-\beta)\left[(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) - (\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)\right] > 0 \text{ ή}$$

$$3\alpha\beta(\alpha-\beta) > 0$$

που ισχύει, διότι $\alpha - \beta > 0$.

6. Αρκεί:

$$x^6 + y^6 \ge x^4y^2 + x^2y^4 \text{ ή}$$

$$x^4(x^2-y^2) - y^4(x^2-y^2) \ge 0 \text{ ή}$$

$$(x^2-y^2)^2(x^2+y^2) \ge 0 \text{, που ισχύει.}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $x^2 - y^2 = 0$, δηλαδή $x = y$.

7. α) Αρκεί τελικά:

$$(\alpha-1)^2 + (\beta-2)^2 \geq 0 \text{, που ισχύει.}$$

β) Αρκεί τελικά $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 \geq 0$, που ισχύει.

γ) Είναι $\alpha^2 + 1^2 \geq 2\alpha$, οπότε:

$$\alpha^2 + 2007\alpha + 1 \geq 2\alpha + 2007\alpha = 2009\alpha .$$

Όμοια $\beta^2 + 2007\beta + 1 \geq 2009\beta$.

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη.

δ) Αρκεί:

$$\alpha^4 + \beta^4 \geq 2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) \text{ ή}$$

$$(\alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2) - 2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) \geq 0 \text{ ή}$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) \geq 0 \text{ ή}$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \geq 0 \quad \text{ή} \quad (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha-\beta)^2 \geq 0,$$

που ισχύει.

8. α) Αρκεί:

$$\alpha^2\gamma^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta\gamma \text{ ή } (\alpha\gamma - \beta)^2 \geq 0,$$

που ισχύει.

β) Όμοια.

γ) Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισότητες:

$$\alpha^2 + \frac{\beta^2}{\gamma^2} \geq \frac{2\alpha\beta}{\gamma}, \quad \beta^2 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \geq \frac{2\beta\gamma}{\alpha}, \quad \gamma^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \geq \frac{2\gamma\alpha}{\beta}.$$

9. Είναι:

$$x + y \geq 2 \text{ ή } x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ ή } (x-1)^2 \geq 0,$$

που ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν $x=y=1$.

β) Αρκεί:

$$\frac{(2+y)+(2+x)}{(2+x)(2+y)}\leq\frac{2}{3} \text{ ή } 3(4+x+y)\leq 2(x+2)(y+2) \text{ ή }$$

$$2\leq x+y \text{ ή } x+y\geq 2,$$

που ισχύει από το ερώτημα (α).

Η ισότητα ισχύει αν $x=y=1$.

10. α) Εκτελούμε τις πράξεις στο Α′ μέλος.

β)Σύμφωνα με το ερώτημα (α) είναι:

$$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=$$

$$=(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\geq 0$$

οπότε $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\geq 0$ κ.λπ.

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha=\beta=\gamma$, διότι:

$$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$$

μόνο αν:

$$\alpha-\beta=0 \text{ και } \beta-\gamma=0 \text{ και } \gamma-\alpha=0,$$

δηλαδή αν $\alpha=\beta=\gamma$.

11. α) Είναι:

$$\alpha^3>2\alpha^2-\alpha+2 \text{ ή } \alpha^3-2\alpha^2+\alpha-2>0 \text{ ή }$$

$$\alpha^2(\alpha-2)+(\alpha-2)>0 \text{ ή } (\alpha^2+1)(\alpha-2)>0$$

που ισχύει, διότι $\alpha>2$ και $\alpha^2+1>0$.

β) Έχουμε:

$$\alpha^3+2\alpha>\alpha^2+2\Leftrightarrow\alpha^3+2\alpha-\alpha^2-2>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha^2(\alpha-1)+2(\alpha-1)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\alpha^2+2)(\alpha-1)>0$$

που ισχύει διότι $\alpha > 2 > 1$ και $\alpha^2 + 2 > 0$.

12. α) Αρκεί:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 \geq 0 \text{ ή } (\alpha - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

β) Αρκεί:

$$\alpha^6 + 1 \geq 2\alpha^3 \text{ ή } (\alpha^3 - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

γ) Είναι:

$$\alpha^4 + \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = \left(\alpha^4 + \frac{1}{\alpha^2}\right) + \frac{2}{\alpha} \geq$$

$$\geq 2\alpha + \frac{2}{\alpha} = 2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \geq 2 \cdot 2 = 4.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = 1$.

13. α) Είναι:

$$2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha(\beta + \gamma) \text{ ή}$$

$$2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma \text{ ή}$$

$$(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) + (\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma) \geq 0 \text{ ή}$$

$$(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

β) Είναι:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 \geq \alpha(\beta + \gamma - \alpha) + \beta(\gamma + \alpha - \beta) + \gamma(\alpha + \beta - \gamma) \text{ ή}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma \geq \alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha^2 + \beta\gamma + \alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta + \beta\gamma - \gamma^2 \text{ ή}$$

$$2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 \geq 0 \text{ ή } 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq 0,$$

που ισχύει.

14. α) Γίνεται:

$$(\alpha + \beta)^2 > \gamma^2 \text{ ή } \alpha + \beta > \gamma, \text{ που ισχύει.}$$

β) Γίνεται:

$$(\alpha-\beta)^2<\gamma^2 \text{ ή } |\alpha-\beta|<\gamma \text{ που ισχύει}$$

(τριγωνική ανισότητα).

γ) Προσθέτουμε τις:

$$\alpha^2+\beta^2<\gamma^2+2\alpha\beta,$$

$$\beta^2+\gamma^2<\alpha^2+2\beta\gamma,$$

$$\gamma^2+\alpha^2<\beta^2+2\alpha\gamma \text{ κ.λπ.}$$

15. α) Είναι $\alpha\beta\gamma=1$, οπότε $\alpha\beta=\frac{1}{\gamma}$. Αρκεί λοιπόν:

$$\alpha\beta+\gamma\geq 2 \text{ ή } \frac{1}{\gamma}+\gamma\geq 2 \text{ ή } (\gamma-1)^2\geq 0,$$

που ισχύει.

β) Ισχύει:

$$\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \text{ και } \gamma^2+1\geq 2\gamma.$$

Άρα με πρόσθεση παίρνουμε:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1\geq 2(\alpha\beta+\gamma).$$

γ) Αφού $\alpha\beta+\gamma\geq 2$ (από το ερώτημα (α)), παίρνουμε:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1\geq 2(\alpha\beta+\gamma)\geq 2\cdot 2=4$$

Άρα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq 4-1=3$.

16. Είναι:

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2).$$

α) Καταλήγουμε στην:

$$3(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2\geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

β) Καταλήγουμε στην:

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 \geq 0 \text{, που ισχύει.}$$

17. α) Γίνεται:

$$\alpha^3+\beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha+\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-\alpha\beta(\alpha+\beta) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 \geq 0 \text{, που ισχύει.}$$

β) Το Α′ μέλος γράφεται:

$$\left(\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}\right)+\left(\frac{\beta^2}{\gamma}+\frac{\gamma^2}{\beta}\right)+\left(\frac{\gamma^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\gamma}\right) \geq$$

$$\geq (\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)$$

με βάση το ερώτημα (α).

18. α) Μας οδηγεί στην ισοδυναμία:

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 \geq 0 \text{, που ισχύει.}$$

β) Με βάση το ερώτημα (α).

Απ. Όταν $\alpha=\beta$ ή $\alpha=\beta=\gamma$ αντίστοιχα.

19. α) Γίνεται:

$$3\alpha^2-3\alpha\beta+3\beta^2 \geq \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta \text{, που ισχύει.}$$

β) Το ερώτημα (α) δίνει:

$$\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} \geq \frac{\alpha+\beta}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} \geq \frac{\alpha+\beta}{3} \text{ κ.λπ.}$$

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha=\beta=\gamma$.

20. Με βάση την ανισότητα $\kappa^2+\lambda^2\ge 2\kappa\lambda$, παίρνουμε:

$$\alpha^2+x^2\ge 2\alpha x,\quad \beta^2+y^2\ge 2\beta y \quad \text{και} \quad \gamma^2+\omega^2\ge 2\gamma\omega.$$

Προσθέτουμε τις παραπάνω ανισότητες κατά μέλη και παίρνουμε:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+x^2+y^2+\omega^2\ge 2\alpha x+2\beta y+2\gamma\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+3\ge 2(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)\Leftrightarrow \alpha x+\beta y+\gamma\omega\le 3.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $x=\alpha$, $y=\beta$, $\omega=\gamma$.

21. Σύμφωνα με τη βασική ανισότητα:

$$x^2+y^2\ge 2xy$$

η οποία ισχύει για κάθε $x,\ y\in \mathbb{R}$, παίρνουμε:

- $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2)^2+(\beta^2)^2\ge 2\alpha^2\beta^2$,
- $\gamma^4+\delta^4=(\gamma^2)^2+(\delta^2)^2\ge 2\gamma^2\delta^2$.

Έτσι:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4\ge 2\alpha^2\beta^2+2\gamma^2\delta^2 \qquad (1).$$

Αλλά:

$$2\alpha^2\beta^2+2\gamma^2\delta^2=2\left[(\alpha\beta)^2+(\gamma\delta)^2\right]\ge 2[2(\alpha\beta)(\gamma\delta)],$$

δηλαδή:

$$2\alpha^2\beta^2+2\gamma^2\delta^2\ge 4\alpha\beta\gamma\delta \qquad (2).$$

Οι σχέσεις (1) και (2), μεταβατικά, δίνουν:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4\ge 4\alpha\beta\gamma\delta.$$

Στην ανισότητα $x^2+y^2\ge 2xy$, η ισότητα ισχύει μόνο για $x=y$. Άρα η ισότητα στη δοσμένη ανισότητα ισχύει μόνο αν:

$$\alpha=\beta \text{ και } \gamma=\delta \text{ ή αν } \alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta \text{ ή}$$

$$\alpha=\delta \text{ και } \beta=\gamma.$$

22. Θέτουμε $\alpha = 1+\lambda$, οπότε:

$$\alpha+\beta=2 \Leftrightarrow \beta=2-\alpha \Leftrightarrow \beta=1-\lambda .$$

Έτσι:

$$\alpha^4+\beta^4 \geq 2 \Leftrightarrow (\alpha^2)^2+(\beta^2)^2 \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+2\lambda+\lambda^2)^2+(1-2\lambda+\lambda^2)^2 \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+2\lambda^4+12\lambda^2 \geq 2 \Leftrightarrow \lambda^4+6\lambda^2 \geq 0,$$

που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\lambda=0$, δηλαδή όταν $\alpha=1$ και $\beta=1$.

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.

Τίτλος: Διδακτικό εγχειρίδιο-οδηγός στη διάταξη πραγματικών αριθμών *Έκδοση: 1.0 Ημερομηνία: 26.04.2024*

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

ΕΜΠΝΕΥΣΤΕΣ/ ΟΜΑΔΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ/ ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Κωνσταντίνος Ρεκούμης
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Λάμπρος Κατσάπας
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Νικόλαος Κουμάντος
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Ελένη Ρεκούμη
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03