Διδακτικό εγχειρίδιο/Οδηγός 5

Ε Ξ Ι Σ Ω Σ Ε Ι Σ

- Ορισμοί
- Ιδιότητες
- Εφαρμογές – ασκήσεις

Εισαγωγικό σημείωμα

Στα μαθηματικά η δημιουργία μιας εξίσωσης και η επίλυσή της έχει καθοριστική σημασία. Τα περισσότερα προβλήματα, στα οποία ζητούμε την τιμή ενός μεγέθους, είτε αυτό είναι μήκος ή χρόνος ή πλήθος ή αξία κ.λπ., οδηγούν, ανάγονται καλύτερα, σε μια εξίσωση (ή σύστημα εξισώσεων).

Είναι επομένως πολύ σημαντικό οι μαθητές να κατανοήσουν όσο γίνεται καλύτερα τόσο τις τεχνικές για τη λύση εξισώσεων όσο και τον τρόπο μοντελοποίησης προβλημάτων από την καθημερινή ζωή, την επιστήμη ή άλλους τομείς από την ανθρώπινη δραστηριότητα.

Περιεχόμενα

Α. Εξισώσεις με παραγοντοποίηση

Για την λύση αυτών των εξισώσεων βασιζόμαστε στην ιδιότητα:

Το γινόμενο δύο ή περισσότερων αριθμών είναι μηδέν, αν και μόνο, αν ένας τουλάχιστον παράγοντας είναι ίσος με μηδέν. Με συμβολική γλώσσα αυτό γράφεται:

$$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Ασκήσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+3)^2+(x-7)(x+7)=2(x-3)^2-4$

β) $(2x-5)(2x+5)-(2x+1)^2=3(2x-5)-1$

γ) $(x+3)^2-(x-5)^2=(x-2)^2-(x+6)^2-16$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2(x-4)+2x(x-4)+x-4=0$,

β) $x(x^2-1)-x^3+x^2=0$,

γ) $(x+1)^2+x^2-1=0$,

δ) $(x-2)^2-(2-x)(4+x)=0$,

ε) $x(x-2)^2=x^2-4x+4$,

στ) $(x^2-4)(x-1)=(x^2-1)(x-2)$

ζ) $x^3-2x^2-x+2=0$,

η) $x^3-2x^2-(2x-1)(x-2)=0$.

Απαντήσεις - υποδείξεις

1. α) $x=3$, β) $x=-1$, γ) $x=-1$.

2. Με παραγοντοποίηση έχουμε:

α) $(x-4)(x^2+2x+1)=0 \Leftrightarrow (x-4)(x+1)^2=0$.

Απ. $x=4$ ή $x=-1$.

β) $x(x-1)(x+1)-x^2(x-1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1-x)=0$.

Απ. $x=0$ ή $x=1$.

γ) $(x+1)^2+(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+1+x-1)=0$.

Απ. $x=-1$ ή $x=0$.

δ) $(x-2)^2+(x-2)(x+4)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-2+x+4)=0$.

Απ. $x=2$ ή $x=-1$.

ε) $x(x-2)^2=(x-2)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2(x-1)=0$.

Απ. $x=2$ ή $x=1$.

στ) $(x-2)(x+2)(x-1)-(x-1)(x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+2-x-1)=0$.

Απ. $x=2$ ή $x=1$.

ζ) $x^2(x-2)-(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-1)=0$.

Απ. $x=2$ ή $x=1$ ή $x=-1$.

η) $x^2(x-2)-(2x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)^2=0$.

Απ. $x=2$ ή $x=1$.

Β. Εξισώσεις με απαλοιφή των παρονομαστών

Για την λύση αυτών των εξισώσεων βασιζόμαστε στο γεγονός ότι μια εξίσωση είναι ισοδύναμη με μια εξίσωση που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της με έναν μη μηδενικό αριθμό.

Αυτός ο αριθμός προτιμάμε να είναι το ΕΚΠ όλων των παρονομαστών ή κάποιο πολλαπλάσιό του.

Ασκήσεις

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x-1}{4}-\left[\frac{x+2}{3}-\left(\frac{5-x}{12}+1\right)-3\right]=1$.

β) $3\left\{x-\frac{3x-1}{4}-\left[1-2\left(x-\frac{3+x}{5}\right)\right]\right\}=5x-2$.

γ) $\frac{1}{2}\left[8-\frac{x}{3}-2\left(\frac{x}{2}+5\right)\right]-\left[6-\frac{3x}{2}+3(x-5)\right]+5=0$.

δ) $\frac{3x}{2}-\frac{2}{3}+5\left(4x+\frac{7x}{10}\right)-\frac{103}{3}=9x-\frac{x+7}{3}$.

ε) $\frac{x-1}{2+3+4}+\frac{x-2}{1+3+4}+\frac{x-3}{1+2+4}+\frac{x-4}{1+2+3}=4$.

στ) $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}+\frac{x+4}{5}=4$.

Απαντήσεις - υποδείξεις

3. Πρώτα εξάγουμε τις παρενθέσεις.

Απ. α) $x=15$. β) $x=7$.

γ) Εκτελούμε την επιμεριστική ιδιότητα στην πρώτη αγκύλη.

Απ. $x=6$.

δ) Είναι:

$$5\left(4x+\frac{7x}{10}\right)=20x+\frac{7x}{2}\ .$$

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το ΕΚΠ = 6.

Απ. $x=2$.

ε) Από τον κάθε όρο του πρώτου μέλους αφαιρούμε το 1.

Απ. $x=10$.

στ) Από τον κάθε όρο του πρώτου μέλους αφαιρούμε το 1.

Απ. $x=1$.

Γ. Παραμετρικές εξισώσεις

Ασκήσεις

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων:
α) $\lambda^2(x-1)=2(\lambda x-2)$, β) $\lambda(\lambda x-1)=4x+\mu-3$.

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x+\alpha)^2-(x+\beta)^2=2\alpha(\alpha-\beta)$ έχει πάντα λύση.

3. Να βρείτε τις τιμές των λ, $\mu\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $(\lambda^2+\mu^2-2\lambda+2\mu+2)x=\mu+\lambda+2004$ να είναι αδύνατη.

4. Να βρείτε τις τιμές των λ, $\mu\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\lambda\left[(\lambda-1)x-2\right]=\mu-5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

5. Αν η εξίσωση $(\alpha^4+\beta^4+\alpha\beta-1)x=\alpha^2+\beta^2+2\alpha-2\beta+2$ είναι αόριστη, να βρείτε τις τιμές των α και β.

6. Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του α:

α) $\dfrac{x}{x-4}+\dfrac{\alpha}{\alpha-2}+\dfrac{2}{(x-4)(\alpha-2)}=0$, **β)** $\dfrac{3x+\alpha}{x-1}=\alpha-2$.

7. Αν η εξίσωση $(\alpha^8+\beta^6+\alpha\beta-1)x=(\alpha-1)^2+(\beta+1)^2$ είναι ταυτότητα, να βρείτε τις τιμές των α και β.

Απαντήσεις - υποδείξεις

1. α) Παίρνουμε την εξίσωση:

$$\lambda(\lambda-2)x=\lambda^2-4$$

Απ. • Για $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 2$ μοναδική λύση $x=\dfrac{\lambda+2}{\lambda}$

• Για $\lambda=0$ αδύνατη

• Για $\lambda=2$ αόριστη (ταυτότητα).

β) Η εξίσωση γράφεται:

$$(\lambda^2-4)x=\lambda+\mu-3\,.$$

- Για $\lambda\neq\pm 2$, έχουμε μοναδική λύση:

$$x=\frac{\lambda+\mu-3}{\lambda^2-4}\,.$$

- Για $\lambda=2$ η εξίσωση γίνεται $0x=\mu-1$, που είναι αόριστη για $\mu=1$ και αδύνατη για $\mu\neq 1$.
- Για $\lambda=-2$ η εξίσωση γίνεται $0x=\mu-5$, που είναι αόριστη για $\mu=5$ και αδύνατη για $\mu\neq 5$.

2. Μετά τις πράξεις παίρνουμε την εξίσωση:

$$2(\alpha-\beta)x=(\alpha-\beta)^2\,.$$

3. Πρέπει:

- $\lambda^2+\mu^2-2\lambda+2\mu+2=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2+(\mu+1)^2=0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (\lambda=1$ και $\mu=-1$).
- $\mu+\lambda+2004\neq 0$.

Απ. $\lambda=1$, $\mu=-1$.

4. Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$\lambda(\lambda-1)x=2\lambda+\mu-5\,.$$

Πρέπει $\lambda(\lambda-1)=0$ και $2\lambda+\mu-5=0$.

Απ. $(\lambda=0$ και $\mu=5)$ ή $(\lambda=1$ και $\mu=3)$.

5. Πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} \alpha^4+\beta^4+\alpha\beta-1=0 \\ \alpha^2+\beta^2+2\alpha-2\beta+2=0 \end{cases}.$$

Η δεύτερη δίνει:

$$(\alpha+1)^2+(\beta-1)^2=0 \Leftrightarrow (\alpha=-1\ ,\ \beta=1)$$

και επαληθεύεται έτσι και η πρώτη εξίσωση.

Απ. $\alpha=-1\ ,\ \beta=1$.

6. α) Πρέπει $\alpha\neq 2$ και $x\neq 4$, οπότε παίρνουμε:

$$(\alpha-1)x=2\alpha-1$$

- Για $\alpha\neq 1$ και $\alpha\neq 2$, έχει μοναδική λύση $x=\dfrac{2\alpha-1}{\alpha-1}$, αρκεί επιπλέον $x\neq 4 \Leftrightarrow \alpha\neq \dfrac{3}{2}$.
- Για $\alpha=1$ και $\alpha=\dfrac{3}{2}$ είναι αδύνατη.

β) Πρέπει $x\neq 1$, οπότε $(5-\alpha)x=2-2\alpha$.

- Για $\alpha\neq 5$ είναι $x=\dfrac{2-2\alpha}{5-\alpha}$. Πρέπει:

$$\frac{2-2\alpha}{5-\alpha}\neq 1 \Leftrightarrow 2-2\alpha\neq 5-\alpha \Leftrightarrow \alpha\neq -3\ .$$

- Για $\alpha=5$ (και $\alpha=-3$) είναι αδύνατη.

7. Πρέπει τόσο το Α′ όσο και το Β′ μέλος να είναι ίσα με 0.

Απ. $\alpha=1\ ,\ \beta=-1$.

Δ . Εξισώσεις με απόλυτα

Ασκήσεις

1. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $|x|=4$, **β)** $|x-2|=-1$,

γ) $|x-1|=5$, **δ)** $|2x-3|=3$

ε) $|2x-1|=|x-5|$,

στ) $2(|x-2|-3)+|4-2x|=10$,

ζ) $\dfrac{|2x-6|-1}{3}-\dfrac{8-|9-3x|}{2}=\dfrac{|15-5x|-10}{4}$, **η)** $|x^2+3x-1|=3$,

θ) $||x-3|-10|=4$.

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\dfrac{3|x|+1}{2}-|x|=\dfrac{6|x|-4}{7}$,

β) $\dfrac{|x|+5}{2}+2=\dfrac{2(|x|+7)}{3}-2$,

γ) $\dfrac{|x-1|+3}{2}-\dfrac{2(|x-1|+1)}{3}=|x-1|-5$,

δ) $3\left(1+\dfrac{|2x-2|}{3}\right)-6\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{|1-x|}{9}\right)=9\left(\dfrac{|4-4x|-3}{6}-\dfrac{3}{2}\right)+8$.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{2|x+3|-1}{3}-\dfrac{3-2|x+3|}{4}=\dfrac{5-|x+3|}{6}-\dfrac{|6+2x|-13}{12}$,

β) $\dfrac{5-|x-2|}{4}-\dfrac{19-5|2-x|}{6}=\dfrac{|6-3x|-7}{2}-\dfrac{|2x-4|-1}{3}$,

γ) $\dfrac{|x-3|-6}{10}-\dfrac{4-|3x-9|}{7}=\dfrac{|6-2x|+3}{5}-\dfrac{|9-3x|-4}{14}$,

δ) $\dfrac{|x+7|+7}{4}-\dfrac{|2x+14|+1}{5}=\dfrac{7-3|7+x|}{8}+\dfrac{7|x+7|+21}{10}$.

4. Να υπολογίστε τον ακέραιο αριθμό x, ώστε να ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$\sqrt{(x-4)^2}-4+x=0 \quad \text{και} \quad \sqrt{x^2-4x+4}+2-x=0 .$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x-5|^3+|5-x|^6+|x^2-25|^9=0$,

β) $|x-2|^{100}+|4-x^2|^{200}+|x^2-3x+2|^{300}=0$,

γ) $|x^2-1|^{1000}+|x^3-1|^{2000}+|x^8+x^5-2|^{3000}=0$.

6. **α)** Να γράψετε χωρίς τα απόλυτα την παράσταση $A(x)=2|x-3|-3x+4$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $A(x)=0$.

7. Δίνεται η παράσταση $A(x)=|x-3|+|x+2|-x-4$.

α) Να γράψετε την παράσταση A(x) χωρίς τα απόλυτα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $A(x)=0$.

8. Δίνεται η παράσταση $A(x)=|x-3|+|2-x|-x+1$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση.

β) Να λύσετε την εξίσωση $A(x)=0$.

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x|-|x-2|=2$, **β)** $|x-3|+2|x+1|=4$,

γ) $|2-x|+|x+1|=x+2$, **δ)** $|x-2|+|x+4|=|6-x|+x$.

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|2x-1|=|x-5|$, **β)** $2(|x-2|-3)+|4-2x|=10$,

γ) $|x+3|+|2-x|=4-x$.

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3(2|x-3|-1)-1=2(|6-2x|+1)+4$, **β)** $|x^2-4x-1|=4$,

γ) $||x|-3|=x+3$.

Απαντήσεις - υποδείξεις

1. α) $x=4$, $x=-4$. β) Αδύνατη.

γ) $x=6$, $x=-4$. δ) $x=0$, $x=3$.

ε) $x=2$, $x=-4$. στ) $x=-2$, $x=6$.

ζ) $x=1$, $x=5$.

η) $x=-4$, $x=1$, $x=-1$, $x=-2$.

θ) $x=17$, $x=-11$, $x=9$, $x=-3$.

2. α) $x=3$, $x=-3$. β) $x=1$, $x=-1$.

γ) $x=-4$, $x=6$. δ) $x=4$, $x=-2$.

3. α) $x=-1$, $x=-5$. β) $x=-3$, $x=7$.

γ) $|6-2x|=2|x-3|$ κ.λπ.

Απ. $x=9$, $x=-3$.

δ) Αδύνατη $\left(|x+7|=...=-3\right)$.

4. Είναι:

- $$\sqrt{(x-4)^2}-4+x=0 \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2}=4-x \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |x-4|=4-x \Leftrightarrow |x-4|=-(x-4) \Leftrightarrow x-4\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\le 4$.

- $$\sqrt{(x-2)^2}+2-x=0 \Leftrightarrow \sqrt{(2-x)^2}=x-2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |2-x|=x-2 \Leftrightarrow |2-x|=-(2-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-x\le 0 \Leftrightarrow x\ge 2.$

Άρα $(x\le 4$ και $x\ge 2) \Leftrightarrow x\in[2,\,4]$. Επομένως οι ακέραιες τιμές του x είναι οι 2, 3 και 4.

5. Κάθε όρος είναι ίσος με μηδέν.

Απ. α) $x=5$, β) $x=2$, γ) $x=1$.

6. Δύο περιπτώσεις:

$$x-3\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 3 \text{ και } x-3<0 \Leftrightarrow x<3 .$$

Απ. α) $A(x)=\begin{cases} -5x+10 & \text{αν } x<3 \\ -x-2 & \text{αν } x\ge 3 \end{cases}$

β) $A(x)=0 \Leftrightarrow x=2$.

7. Με τη βοήθεια του πίνακα προσήμων.

Απ. α) $A(x)=\begin{cases} -3x-3 & \text{αν } x\le -2 \\ -x+1 & \text{αν } x\in(-2,\,3] \\ x-5 & \text{αν } x>3 \end{cases}$

β) $(x=-1$ απορρίπτεται), $x=1$, $x=5$.

8. α) Με τη βοήθεια του πίνακα προσήμων.

Απ. $A(x)=\begin{cases} -3x+6 & \text{αν } x\le 2 \\ -x+2 & \text{αν } x\in(2,\,3] \\ x-4 & \text{αν } x>3 \end{cases}$.

β) Με βάση το ερώτημα (α).

Απ. $x=2$ ή $x=4$.

9. α) Με πίνακα προσήμων και περιπτώσεις.

Απ. $x\in[2,+\infty)$.

β) Εργαζόμαστε παρόμοια.

Απ. $x=-1$.

γ) Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων των όρων $2-x$ και $x+1$.

Απ. $x=1$ ή $x=3$.

δ) Με τη βοήθεια πίνακα προσήμων.

Απ. $x \in [-4, 2]$.

10. α) $x=-4$ ή $x=2$. β) $x=6$ ή $x=-2$.

γ) $x=-5$ ή $x=-1$.

11. α) Είναι $|6-2x|=2|x-3|$.

Θέτουμε (προαιρετικά) $|x-3|=\omega$ κ.λπ.

Απ. $x=-2$ ή $x=8$.

β) Όπως στο ερώτημα (β).

Απ. $x=-1$, $x=5$, $x=1$, $x=3$.

γ) Με τέχνασμα.

- Για $x+3<0 \Leftrightarrow x<-3$ είναι αδύνατη.
- Για $x \geq -3$ παίρνουμε:

  $x^2-6|x|+9=x^2+6x+9 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow |x|=-x \Leftrightarrow x \leq 0$

Απ. $x \in [-3, 0]$.

Ε. Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Ασκήσεις

1. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $x^2+2\alpha x+\alpha^2-\beta^2=0$, $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$,

β) $(\alpha^2+\beta^2)x^2+2(\alpha+\beta)x+2=0$, $\alpha\neq\beta$,

γ) $x+\dfrac{1}{\alpha}=\alpha+\dfrac{1}{x}$, $\alpha\neq 0$,

δ) $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{x}=\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\alpha,\ \beta\neq 0$,

ε) $\alpha^2x^2-2\alpha^3x+\alpha^4-1=0$, $\alpha\neq 0$,

στ) $x^2-2\alpha^2x+\alpha^4-\alpha^2=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

2. Για τα x που επαληθεύουν την εξίσωση $9x^2+12x+4=0$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{9x^2+18x+24}+\sqrt{81x^2+3x+2}=10.$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2-2(\alpha^2+\beta^2)x+(\alpha^2-\beta^2)^2=0$,

β) $(\alpha^2-\beta^2)x^2-2(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2-\beta^2=0$, με $|\alpha|\neq|\beta|$,

γ) $(\alpha^2-\gamma^2)x^2+2(\alpha\beta-\gamma\delta)x+\beta^2-\delta^2=0$, με $|\alpha|\neq|\gamma|$,

δ) $x^2-(\alpha+\beta)x-\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=0$.

4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2-2(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)^2-\gamma^2=0$ δεν είναι ποτέ αδύνατη.

5. Δίνεται η εξίσωση $x^2+\lambda x+1=0$. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η εξίσωση:

α) να έχει πραγματικές ρίζες,

β) να είναι αδύνατη.

γ) να έχει μία διπλή ρίζα, την οποία και να βρείτε.

6. Να βρείτε την τιμή του λ για τις οποίες οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές λύσεις:

α) $x^2+2x+\lambda=0$,

β) $x^2-4x+2\lambda=0$,

γ) $2x^2+\lambda x+2=0$,

δ) $3x^2+\lambda x+3=0$.

7. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $\alpha x^2+2x+2-\alpha=0$, $\alpha\neq 0$, έχει πραγματικές ρίζες,

β) η εξίσωση $(\kappa^2+\lambda^2)x^2+2(\kappa+\lambda)x+2=0$ με $\kappa\neq\lambda$, είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

γ) η εξίσωση $\kappa^2x^2-2\kappa^3x+\kappa^4-1=0$, με $\kappa\neq 0$, έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

8. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta-\gamma\delta=0$, όπου α, β, γ, δ είναι ακέραιοι αριθμοί με $\alpha-\beta=\gamma-\delta$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης και να τη γράψετε ως τέλειο τετράγωνο ακέραιου αριθμού.

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση και να αποδείξετε ότι οι ρίζες της είναι ακέραιοι αριθμοί.

9. Αν η εξίσωση $x^2+\alpha x+\beta=0$ έχει μία διπλή ρίζα, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(2-2\beta+\alpha^2)x^2+2\alpha(\beta+1)x+2\beta(\beta-1)+\alpha^2=0,$$

$\alpha\neq 0$, έχει επίσης μια διπλή ρίζα.

10. Αν $\beta^2<3\gamma$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2-\beta x+\gamma=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

11. Αν $\beta^2\neq\alpha\gamma$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha^2+\beta^2)x^2-2\beta(\alpha+\gamma)x+\beta^2+\gamma^2=0$ είναι αδύνατη.

12. Αν η εξίσωση $(\alpha^2+1)x^2-2(\alpha+\beta)x+\beta^2+1=0$ έχει ρίζες, να βρείτε τις ρίζες αυτές.

13. Αν οι α, β, γ και δ είναι ρητοί αριθμοί με $\alpha-\beta=\gamma-\delta$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta-\gamma\delta=0$$

α) έχει ρητές ρίζες,

β) οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $\beta+\gamma$ και $\alpha-\gamma$.

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και η εξίσωση:

$$(\beta^2+\gamma^2)x^2-2\alpha\gamma x+\alpha^2-\beta^2=0.$$

Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση έχει μοναδική λύση, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

15. Αν η εξίσωση $x^2+(\alpha-3\beta)x+\alpha\beta=0$ έχει μία διπλή ρίζα, να αποδείξετε ότι και η εξίσωση:

$$x^2+(\alpha-5\beta)x+4\beta^2=0$$

έχει επίσης μία διπλή ρίζα. Να εξετάστε αν οι παραπάνω εξισώσεις έχουν το ίδιο είδος ριζών.

16. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}=\frac{1}{\gamma^2}$ έχει πάντα πραγματικές ρίζες.

17. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\neq 0$, να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ είναι οι $x_1=1$ και $x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$.

18. Αν η εξίσωση $(\alpha x+\beta)^2+(\gamma x+\delta)^2=0$, με $\alpha\gamma\neq 0$, έχει πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι έχει μία διπλή ρίζα, τη $\rho=-\frac{\beta}{\alpha}$.

19. Δίνεται η εξίσωση $(\alpha+\gamma-\beta)x^2+2\gamma x+\beta+\gamma-\alpha=0$, με $\beta\neq\alpha+\gamma$. Αν οι αριθμοί α, β και γ είναι ρητοί, να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

β) οι ρίζες της εξίσωσης είναι ρητοί αριθμοί.

20. Αν τα α, β και γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\gamma^2x^2+(\gamma^2-\alpha^2+\beta^2)x+\beta^2=0$$

δεν έχει ρίζες.

21. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\beta^2+\gamma^2)x^2+2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x+\alpha^2+\beta^2=0$ με $\alpha\beta\neq 0$, έχει πάντα δύο άνισες ρίζες.

22. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2-(1-\lambda)x-1=0$.

α) Πότε η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες;

β) Πότε η εξίσωση έχει μόνο μία ρίζα;

23. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2-(\mu+2\lambda)x+2\mu=0$, όπου λ και μ είναι ρητοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση έχει πάντοτε πραγματικές ρίζες,

β) οι ρίζες της εξίσωσης είναι ρητοί αριθμοί, με την προϋπόθεση ότι δεν είναι περισσότερες από δύο.

24. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+1)x^2-(2\lambda+3)x+\lambda+2=0$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η εξίσωση να έχει μόνο μία λύση.

β) Να λύσετε τη δοσμένη εξίσωση.

25. Ο καθηγητής έγραψε στον πίνακα την εξίσωση $x^2+10x+20=0$ και είπε στους μαθητές να γράψουν τις εξισώσεις που προκύπτουν αν προσθέσουν ή αφαιρέσουν στον συντελεστή του x ή στον σταθερό όρο (όχι όμως και τα δύο ταυτόχρονα) το 1. Κάποια στιγμή εμφανίστηκε στον πίνακα η εξίσωση $x^2+20x+10=0$. Να αποδείξετε ότι κάποια από τις εξισώσεις που εμφανίστηκαν στο πίνακα είχε ακέραιες ρίζες.

Απαντήσεις - υποδείξεις

1. α)
- Αν $\beta \neq 0$, τότε $x=\beta-\alpha$, $x=-\alpha-\beta$.
- Αν $\beta=0$, τότε $x=-\alpha$.

β) $\Delta=-4(\alpha-\beta)^2<0$, αδύνατη.

γ) $x=\alpha$, $x=-\dfrac{1}{\alpha}$.

δ) $x=\beta$, $x=\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ $\left(\Delta=(\alpha^2-\beta^2)^2\right)$.

ε) $\Delta=4\alpha^2$, $x=\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}$, $x=\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}$.

στ)
- Αν $\alpha \neq 0$, τότε $x=\alpha^2+\alpha$, $x=\alpha^2-\alpha$.
- Αν $\alpha=0$, τότε $x=0$.

2. Είναι $\Delta=144-144=0$, οπότε $x=-\dfrac{2}{3}$.

3. α) $x_1=(\alpha-\beta)^2$, $x_2=(\alpha+\beta)^2$.

β) $x_1=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$, $x_2=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$.

γ) Είναι $\Delta=\ldots=4(\alpha\delta-\beta\gamma)^2\geq 0$.

Απ. $x_1=\dfrac{\delta-\beta}{\alpha-\gamma}$, $x_2=-\dfrac{\beta+\delta}{\alpha+\gamma}$.

δ) Είναι $\Delta=(\alpha+\beta+2\gamma)^2\geq 0$.

Απ. $x_1=\alpha+\beta+\gamma$, $x_2=-\gamma$.

4. Είναι:

$$\Delta=4(\alpha+\beta)^2-4(\alpha+\beta)^2+4\gamma^2=4\gamma^2\geq 0.$$

5. α) Πρέπει και αρκεί:

$$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\geq 0 \Leftrightarrow |\lambda|\geq 2.$$

Απ. $\lambda\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

β) Πρέπει και αρκεί $\Delta<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |\lambda|<2$.

Απ. $\lambda \in (-2, 2)$.

γ) Πρέπει και αρκεί $\Delta = 0$.

Απ. $\lambda = 2 \ \ (\rho = -1), \ \ \lambda = -2 \ \ (\rho = 1)$.

6. α) $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 1$.

β) $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 16 - 8\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 2$.

γ) $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow |\lambda| \geq 4 \Leftrightarrow \lambda \leq -4$ ή $\lambda \geq 4$.

δ) $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 36 \geq 0 \Leftrightarrow |\lambda| \geq 6 \Leftrightarrow \lambda \leq -6$ ή $\lambda \geq 6$.

7. α) Είναι $\Delta = 4(\alpha - 1)^2 \geq 0$.

β) Είναι $\Delta = -4(\kappa - \lambda)^2 < 0$.

γ) Είναι $\Delta = 4\kappa^2 > 0$.

8. α) Είναι:

$$\Delta = (\alpha + \beta)^2 - 4(\alpha\beta - \gamma\delta) = \ldots =$$

$$= (\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta = (\gamma - \delta)^2 + 4\gamma\delta = \ldots = (\gamma + \delta)^2.$$

β) Είναι $x = \dfrac{(\alpha + \beta) \pm (\gamma + \delta)}{2}$. Όμως:

$$\alpha + \delta = \beta + \gamma \quad \text{και} \quad \alpha - \beta = \gamma - \delta.$$

Απ. $x = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = \beta + \gamma$,

$x = \dfrac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{2} = \beta - \delta$.

9. Είναι $\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4\beta$.

Έτσι η δεύτερη εξίσωση γίνεται:

$$(\beta + 1)x^2 + \alpha(\beta + 1)x + \beta(\beta + 1) = 0 \qquad (1).$$

Αν είναι $\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = -1$, τότε:

$$\alpha^2 = 4\beta \Leftrightarrow \alpha^2 = -4, \text{ άτοπο.}$$

Έτσι είναι $\beta + 1 \neq 0$ και η σχέση (1) είναι β′ βαθμού:

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

που είναι η ίδια με την πρώτη εξίσωση.

Άλλος τρόπος

Είναι:

$$\Delta_2 = \ldots = 4\left[4\beta(\beta + 1)^2 - 4\beta(\beta + 1)^2\right] = 0.$$

10. Είναι:

- $\gamma > \dfrac{\beta^2}{3} \geq 0$, δηλαδή $\gamma > 0$.
- $\Delta = \beta^2 - 4\gamma = (\beta^2 - 3\gamma) - \gamma < 0$, διότι:

$$\beta^2 - 3\gamma < 0 \quad \text{και} \quad -\gamma < 0.$$

11. Αν $\alpha = \beta = 0$, τότε από τη σχέση $\beta^2 \neq \alpha\gamma$, προκύπτει $0 \neq 0$, άτοπο. Άρα:

$$\alpha \neq 0 \ \text{ ή } \ \beta \neq 0,$$

που σημαίνει ότι $\alpha^2+\beta^2\neq 0$ και η εξίσωση είναι β′ βαθμού. Είναι:

$$\Delta = 4\beta^2(\alpha+\gamma)^2-4(\alpha^2+\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)=\ldots=$$
$$=-4(\beta^2-\alpha\gamma)^2<0\,,$$

αφού $\beta^2\neq\alpha\gamma$.

12. Είναι:

$$\Delta = 4(\alpha+\beta)^2-4(\alpha^2+1)(\beta^2+1)=$$
$$=4(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\alpha^2\beta^2-\alpha^2-\beta^2-1)=$$
$$=4(-\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta-1)=-4(\alpha\beta-1)^2\leq 0\,.$$

Πρέπει $\Delta=0\Leftrightarrow\alpha\beta=1$, οπότε η μοναδική ρίζα είναι η:

$$\rho=\frac{2(\alpha+\beta)}{2(\alpha^2+1)}=\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{\alpha^2+1}=\frac{\alpha^2+1}{\alpha(\alpha^2+1)}=\frac{1}{\alpha}\,.$$

Απ. $\rho=\frac{1}{\alpha}$.

13. α) Είναι:

- $\Delta=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta+4\gamma\delta=(\alpha-\beta)^2+4\gamma\delta=$
  $=(\gamma-\delta)^2+4\gamma\delta=(\gamma+\delta)^2\geq 0$.
- $x_{1,2}=\frac{\alpha+\beta\pm(\gamma+\delta)}{2}\in\mathbb{Q}$.

β) Είναι:

- $x_1=\frac{(\alpha+\delta)+(\beta+\gamma)}{2}=\beta+\gamma$, διότι $\alpha+\delta=\beta+\gamma$.
- $x_2=\frac{(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)}{2}=\alpha-\gamma$, διότι $\beta-\delta=\alpha-\gamma$.

14. Είναι:

$$\Delta=(-2\alpha\gamma)^2-4(\beta^2+\gamma^2)(\alpha^2-\beta^2)=$$
$$=4(\alpha^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2+\beta^4-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)=$$
$$=4\beta^2(\beta^2-\alpha^2+\gamma^2)\,.$$

Πρέπει $\Delta=0$ ή $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$.

15. Είναι:

- $\Delta_1=(\alpha-3\beta)^2-4\alpha\beta=\alpha^2+9\beta^2-10\alpha\beta$
- $\Delta_2=(\alpha-5\beta)^2-16\beta^2=\alpha^2+9\beta^2-10\alpha\beta$.

Άρα $\Delta_1=\Delta_2$, οπότε οι εξισώσεις έχουν το ίδιο είδος ριζών.

16. Η εξίσωση (για $x\neq\alpha$, $x\neq\beta$, $\gamma\neq 0$) γίνεται:

$$\gamma^2(2x-\alpha-\beta)=(x-\alpha)(x-\beta)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-(\alpha+\beta+2\gamma^2)x+\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma^2=0\,.$$

Είναι:

$$\Delta=(\alpha+\beta+2\gamma^2)^2-4\left[\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma^2\right]=$$

$$=(\alpha+\beta)^2+4\gamma^4+4\gamma^2(\alpha+\beta)-4\alpha\beta-$$
$$-4(\alpha+\beta)\gamma^2=(\alpha-\beta)^2+4\gamma^4\geq 0\,.$$

17. Είναι:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-\alpha-\gamma)^2-4\alpha\gamma=\ldots=(\alpha-\gamma)^2.$$

Άρα:

- $x_1=\dfrac{-\beta+\alpha-\gamma}{2\alpha}=\dfrac{\alpha-(\beta+\gamma)}{2\alpha}=1\,.$
- $x_2=\dfrac{-\beta-\alpha+\gamma}{2\alpha}=\dfrac{2\gamma}{2\alpha}=\dfrac{\gamma}{\alpha}\,.$

18. Η εξίσωση γράφεται:

$$(\alpha^2+\gamma^2)x^2+2(\alpha\beta+\gamma\delta)x+\beta^2+\delta^2=0$$

και έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\ldots=-4(\alpha\delta-\beta\gamma)^2\leq 0\,.$$

Πρέπει λοιπόν $\Delta=0$, οπότε $\rho=-\dfrac{\alpha\beta+\gamma\delta}{\alpha^2+\gamma^2}$.

Όμως $\Delta=0\Leftrightarrow\alpha\delta=\beta\gamma\Leftrightarrow\delta=\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$.

Έτσι:

$$\rho=-\frac{\alpha\beta+\gamma\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}}{\alpha^2+\gamma^2}=-\frac{\beta(\alpha^2+\gamma^2)}{\alpha(\alpha^2+\gamma^2)}=\frac{-\beta}{\alpha}\,.$$

19. α) Είναι:

$$\Delta=\ldots=4\left[\gamma^2-\left(\gamma+(\alpha-\beta)\right)\left(\gamma-(\alpha-\beta)\right)\right]=$$
$$=\ldots=4(\alpha-\beta)^2\geq 0\,.$$

β) Οι ρίζες είναι οι $x_{1,2}=\dfrac{-\gamma\pm(\alpha-\beta)}{\alpha+\gamma-\beta}$, που είναι ρητοί αριθμοί.

20. Είναι:

$$\Delta=\ldots=(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\beta+\alpha-\gamma)(\beta-\alpha-\gamma)<0$$

διότι:

$$\beta<\alpha+\gamma\,,\quad \beta+\gamma>\alpha\,,\quad \beta+\alpha>\gamma$$
$$\text{και}\quad \alpha+\beta+\gamma>0\,.$$

21. Είναι:

$$\Delta=\ldots=4(\alpha^4+\gamma^4+\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2)>0\,.$$

22. Προσοχή! Δεν γνωρίζουμε τον βαθμό της εξίσωσης. Έτσι:

α) Για $\lambda=0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση x=1. Για $\lambda\neq 0$ είναι:

$$\Delta=\ldots=(\lambda+1)^2\,.$$

Απ. $\lambda\neq-1$ και $\lambda\neq 0$.

β) Για $\lambda=0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση x=1. Για $\lambda\neq 0$ πρέπει $\Delta=0$, οπότε $\lambda=-1$

Απ. $\lambda=-1$, $\lambda=0$.

23. α) Προσοχή! Δεν γνωρίζουμε τον βαθμό της εξίσωσης. Έτσι:

- Αν $\lambda=0$, τότε η εξίσωση γίνεται $\mu x=2\mu$, η οποία είτε έχει μοναδική λύση τη $x=2$ (αν $\mu\neq 0$), είτε είναι αόριστη (αν $\mu=0$).
- Αν $\lambda\neq 0$, τότε $\Delta=...=(\mu-2\lambda)^2\geq 0$.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{\mu+2\lambda\pm(\mu-2\lambda)}{2\lambda},$$

που είναι ρητές.

24. α) Στην εξίσωση:

$$(\lambda+1)x^2-(2\lambda+3)x+\lambda+2=0 \qquad (1)$$

είναι:

$$\alpha=\lambda+1,\ \ \beta=-(2\lambda+3)\ \text{και}\ \gamma=\lambda+2.$$

Επειδή ο συντελεστής $\alpha=\lambda+1$ περιέχει την παράμετρο λ, δεν μπορούμε αμέσως να γνωρίζουμε τον βαθμό της εξίσωσης.

Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

- $\alpha=0\Leftrightarrow\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=-1$.

Για $\lambda=-1$ η εξίσωση (1) γίνεται:

$$0x^2-(-2+3)x+(-1)+2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x+1=0\Leftrightarrow x=1.$$

Βλέπουμε ότι για $\lambda=-1$ η εξίσωση έχει τη μοναδική λύση $x=1$.

- $\alpha\neq 0\Leftrightarrow\lambda+1\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq -1$.

Για $\lambda\neq -1$ η εξίσωση (1) είναι β′ βαθμού. Έτσι, για να έχει η εξίσωση (1) μόνο μία ρίζα, θα πρέπει (και αρκεί) $\Delta=0$. Όμως:

$$\Delta=(2\lambda+3)^2-4(\lambda+1)(\lambda+2)=$$
$$=4\lambda^2+12\lambda+9-4\lambda^2-12\lambda-8=1>0$$

Άρα, για $\lambda\neq -1$, η εξίσωση έχει πάντα δύο άνισες ρίζες. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η εξίσωση έχει μόνο μία λύση, αν $\lambda=-1$.

β) Για $\lambda=-1$ είδαμε ότι η εξίσωση έχει μόνο τη ρίζα $x=1$. Για $\lambda\neq -1$ είναι $\Delta=1$, οπότε:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{2\lambda+3\pm 1}{2(\lambda+1)}.$$

Δηλαδή:

- $x_1=\dfrac{2\lambda+3+1}{2(\lambda+1)}=\dfrac{2(\lambda+2)}{2(\lambda+1)}=\dfrac{\lambda+2}{\lambda+1}$,
- $x_2=\dfrac{2\lambda+3-1}{2(\lambda+1)}=\dfrac{2\lambda+2}{2(\lambda+1)}=1$.

Έτσι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις $x=1$ και $x=\dfrac{\lambda+2}{\lambda+1}$.

25. Έστω $x^2+\alpha x+\beta=0$ η εξίσωση. Αρχικά είναι $\alpha=10$ και $\beta=20$, ενώ στο τέλος είναι $\alpha=20$ και $\beta=10$. Οι αλλαγές γίνονται σε κάθε βήμα με πρόσθεση του +1 ή –1 μόνο στον έναν από τα α, β. Άρα σε κάποια στιγμή οι αριθμοί α, β διαφέρουν κατά 1, δηλαδή θα είναι:

$$\alpha=\lambda+1\ \text{και}\ \beta=\lambda.$$

Άρα:

$$x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \ \text{ή} \ x = -\kappa$$

δηλαδή οι ρίζες είναι ακέραιοι αριθμοί.

ΣΤ. Προβλήματα μοντελοποίησης

Προβλήματα

1. Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν $80 cm^2$. Αν ελαττώσουμε τη μια του διάσταση κατά 3 cm και αυξήσουμε τη άλλη κατά 6 cm, το εμβαδόν του δεν μεταβάλλεται. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

2. Ένας μαθητής διέθεσε 60 € για να αγοράσει ορισμένα ολόιδια τετράδια. Αν το κάθε τετράδιο είχε 1 ευρώ λιγότερο, τότε με τα χρήματα αυτά θα αγόραζε 3 επιπλέον τετράδια. Πόσα τετράδια αγόρασε ο μαθητής αυτός;

3. Ένα κατάστημα ηλεκτρονικών ειδών αγόρασε ορισμένες φωτογραφικές μηχανές και έδωσε 2400€. Κατά τη μεταφορά όμως 4 μηχανές καταστράφηκαν. Τις υπόλοιπες μηχανές το κατάστημα τις πούλησε με κέρδος 40€ και έτσι κέρδισε συνολικά 160€. Πόσες μηχανές είχε αγοράσει το κατάστημα;

4. Οι 60 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου πλήρωσαν για μια θεατρική παράσταση 1750 ευρώ. Ο κάθε μαθητής πλήρωσε τόσα ευρώ, όσα ήταν τα κορίτσια της τάξης, και η κάθε μαθήτρια πλήρωσε τόσα ευρώ, όσα ήταν τα αγόρια της τάξης. Να βρείτε τον αριθμό των αγοριών και τον αριθμό των κοριτσιών της τάξης, αν τα αγόρια είναι περισσότερα από τα κορίτσια.

5. Δύο εργάτες χρειάζονται 12 ημέρες για να τελειώσουν ένα έργο, όταν εργάζονται και οι δύο μαζί. Ο ένας μόνος του χρειάζεται 7 ημέρες περισσότερες από τον άλλο για να τελειώσει το ίδιο έργο. Να βρείτε πόσες ημέρες χρειάζεται ο καθένας μόνος του για να τελειώσει το έργο.

6. Το ψηφίο των μονάδων ενός διψήφιου αριθμού α είναι κατά 2 μεγαλύτερο από το ψηφίο των δεκάδων. Όταν ο αριθμός αυτός διαιρεθεί με το γινόμενο των ψηφίων του, δίνει πηλίκο 3. Να βρείτε τον αριθμό αυτό.

7. Ένα τρένο κάνει τη διαδρομή ΑΒ με σταθερή ταχύτητα. Αν το τρένο πήγαινε κατά 6 km/h γρηγορότερα, θα συντόμευε το ταξίδι κατά 4 ώρες, ενώ αν πήγαινε αργότερα κατά 6 km/h, θα αργοπορούσε κατά 6 ώρες, από τον συνηθισμένο χρόνο. Πόση είναι η απόσταση ΑΒ που διανύει το τρένο;

8. Δύο κινητά $K_α$ και $K_β$ ξεκινούν από τα σημεία Α και Β αντίστοιχα ενός δρόμου, κινούνται με σταθερή αλλά διαφορετική ταχύτητα και κατευθύνονται το ένα

προς το άλλο. Τη στιγμή που συναντώνται, το $K_β$ έχει διανύσει 60 km περισσότερα από το $K_α$. Από τη στιγμή της συνάντησης και σε 5 ώρες το κινητό $K_β$ φτάνει στο Α, ενώ σε 7 ώρες και 12 λεπτά από τη στιγμή της συνάντησης το κινητό $K_α$ φτάνει στη θέση Β. Πόσο απέχουν μεταξύ τους τα σημεία Α και Β;

9. Δύο παραποτάμια χωριά Α και Β του Δούναβη απέχουν μεταξύ τους 24 km. Ο χρόνος που χρειάζεται ένα ποταμόπλοιο για να πάει από το Α στο Β και να επιστρέψει είναι 10 h και 40 s. Αν η ταχύτητα του ρεύματος του ποταμού είναι 3 km/h, να βρείτε την ταχύτητα του πλοίου.

10. Δύο δρομείς μεγάλων αποστάσεων τρέχουν με την ίδια κατεύθυνση σε έναν κυκλικό στίβο, με σταθερή ταχύτητα. Ο γρηγορότερος δρομέας προσπερνάει τον αργό κάθε 12 λεπτά και κάνει τον κάθε γύρο 10 δευτερόλεπτα λιγότερο απ' ότι ο άλλος. Σε πόσο χρόνο διανύει ο γρήγορος αθλητής τον κάθε γύρο;

Απαντήσεις - υποδείξεις

1. Είναι:

$$xy = 80 \text{ και } (x-3)(y+6) = 80.$$

Έτσι:

$$y = 2x - 6 \quad \text{και} \quad xy = 80.$$

2. Έστω ότι αγόρασε x τετράδια. Η τιμή του καθενός ήταν $\frac{60}{x}$. Η νέα τιμή θα έπρεπε να είναι $\frac{60}{x+3}$. Πρέπει:

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+3} = 1 \text{ ή } x^2 + 3x - 180 = 0$$

με x θετικό ακέραιο.

Απ. $x = 12$.

3. Έστω x μηχανές. Το κόστος είναι $\frac{2400}{x}$. Αφού 4 καταστράφηκαν, πούλησε τις υπόλοιπες $x-4$ με τιμή $\frac{2400}{x} + 40$ και εισέπραξε $(x-4)\left(\frac{2400}{x} + 40\right)$. Το κέρδος ήταν 160 €, οπότε:

$$(x-4)\left(\frac{2400}{x} + 40\right) - 2400 = 160 \text{ ή}$$

$$(x-4)\left(\frac{60}{x} + 1\right) = 64 \text{ ή } x^2 - 8x - 240 = 0.$$

$$\Delta = 64 + 960 = 1024 = 32^2.$$

Απ. $x = 20$.

4. Αν x ήταν τα αγόρια, τότε τα κορίτσια ήταν $60 - x$. Τα αγόρια πλήρωσαν $x(60 - x)$ € και τα κορίτσια $(60-x)x$ €. Πρέπει:

$$x(60-x)+(60-x)x=1750 \text{ ή}$$

$$x^2-60x+875=0.$$

Άρα $x=25$ ή $x=35$.

Απ. 35 αγόρια, 25 κορίτσια.

5. Έστω ότι ο ένας χρειάζεται x ημέρες για να τελειώσει το έργο. Άρα ο άλλος χρειάζεται $x+7$ ημέρες. Σε μια ημέρα ο ένας τελειώνει το $\frac{1}{x}$ του έργου και ο άλλος το $\frac{1}{x+7}$ του έργου. Αλλά και οι δύο μαζί σε μια ημέρα τελειώνουν το $\frac{1}{12}$ του έργου. Επομένως:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{12}.$$

Με $x\neq 0$ και $x\neq -7$, προκύπτει η εξίσωση:

$$x^2-17x-84=0.$$

Άρα $x=-4$ (απορρίπτεται) ή $x=21$.

Απ. 21 και 28 ημέρες.

6. Έστω $\alpha=\overline{xy}=10x+y$. Τότε:

$$y=x+2 \text{ και}$$

$$10x+y=3xy \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 3x^2-5x-2=0.$$

Απ. $x=2$, $y=4$, $\alpha=24$.

7. Έστω x η κανονική (συνήθης) ταχύτητα και $AB=y$. Προκύπτουν από τα δεδομένα οι εξισώσεις:

- $\frac{y}{x+6}=\frac{y}{x}-4 \Leftrightarrow 4x^2+24x=6y$.
- $\frac{y}{x-6}=\frac{y}{x}+6 \Leftrightarrow 6x^2-36x=6y$.

Άρα, εξισώνοντας τα πρώτα μέλη, παίρνουμε:

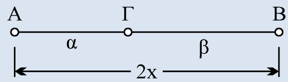
$$2x^2-60x=0 \Leftrightarrow x=30.$$

Απ. $AB=720$ km.

8. Έστω:

$$AB=2x,\ A\Gamma=\alpha \text{ και } B\Gamma=\beta,$$

όπου Γ το σημείο συνάντησης.



Τότε:

- $\alpha+\beta=2x$,
- $\beta-\alpha=60$.

Είναι:

$$\begin{cases}\beta=30+x\\ \alpha=x-30\end{cases}.$$

Έστω υ_α και υ_β οι ταχύτητες των K_α και K_β. Τότε:

- $\dfrac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{x-30}{30+x}$ (1).
- $\beta=t_\alpha\cdot\upsilon_\alpha \Leftrightarrow 30+x=\left(7+\dfrac{12}{60}\right)\cdot\upsilon_\alpha \Leftrightarrow \upsilon_\alpha=\dfrac{30+x}{7{,}2}$,

  όπου t_α ο χρόνος για να πάει το K_α από το Γ στο Β.
- $\alpha=t_\beta\cdot\upsilon_\beta \Leftrightarrow x-30=5\upsilon_\beta \Leftrightarrow \upsilon_\beta=\dfrac{x-30}{5}$.

Άρα η σχέση (1) γράφεται:

$$\frac{\frac{30+x}{7{,}2}}{\frac{x-30}{5}}=\frac{x-30}{30+x}\Leftrightarrow \frac{50}{72}\cdot\frac{30+x}{x-30}=\frac{x-30}{30+x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{36}\cdot\frac{(30+x)^2}{(x-30)^2}=1\Leftrightarrow [5(30+x)]^2=[6(x-30)]^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(30+x)=\pm 6(x-30)\ ,\ x>30\ .$$

Απ. $x=330$, $AB=660\ \text{km}$.

9. Έστω x km/h η ταχύτητα του πλοίου. Υποθέτουμε πως καθώς το πλοίο κινείται από το Α στο Β πλέει παράλληλα με το ρεύμα του ποταμού. Επομένως θα χρειαστεί:

$$\frac{24}{x+3}\ h\ .$$

Για να επανέλθει το πλοίο από το Β στο Α, κόντρα στο ρεύμα, θα χρειαστεί $\dfrac{24}{x-3}\ h$. Θα είναι επομένως:

$$\frac{24}{x+3}+\frac{24}{x-3}=10+\frac{40}{60}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{24}{x+3}+\frac{24}{x-3}=\frac{32}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x+3}+\frac{3}{x-3}=\frac{4}{3} \quad (1).$$

Πρέπει $x>3$. Με τον περιορισμό αυτό η σχέση (1) γίνεται:

$$9(x-3)+9(x+3)=4(x+3)(x-3)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x-27+9x+27=4x^2-36\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-18x-36=0\Leftrightarrow 2x^2-9x-18=0\ .$$

Είναι $\Delta=81+144=225=15^2$, οπότε:

$$x=\frac{9\pm 15}{4}\Leftrightarrow\left(x=6\ \text{ή}\ x=-\frac{3}{2}\right).$$

Δεκτή όμως είναι μόνο η τιμή $x=6$, οπότε η ταχύτητα του ποταμόπλοιου είναι 6 km/h.

10. Καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{720}{x}-\frac{720}{x+10}=1$$

όπου x ο χρόνος του ταχύτερου.

Απ. $x=80$.

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.

Τίτλος: Διδακτικό εγχειρίδιο-οδηγός στις εξισώσεις

Έκδοση: 1.0 Ημερομηνία: 26.04.2024

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

ΕΜΠΝΕΥΣΤΕΣ/ ΟΜΑΔΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ/ ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Κωνσταντίνος Ρεκούμης
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Λάμπρος Κατσάπας
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Νικόλαος Κουμάντος
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Ελένη Ρεκούμη
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03