

Διδακτικό εγχειρίδιο/Οδηγός 4

Η κλασική Άλγεβρα στο Σχολείο

- ◆ Ορισμοί
- ◆ Ιδιότητες
- ◆ Εφαρμογές - ασκήσεις

Εισαγωγικό σημείωμα

Αγαπητοί μαθητές αγαπητές μαθήτριες !

Η καλή γνώση της Άλγεβρας παίζει σπουδαίο ρόλο στη μαθηματική μας πορεία. Η γνώση αυτή δεν είναι μόνο για να ανταπεξέλθουμε με επιτυχία στις απαιτήσεις του σχολείου και των εξετάσεων που θα ακολουθήσουν για την εισαγωγή στις ανώτατες Σχολές αλλά και για την ολοκλήρωση των Σπουδών στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση.

Όπως με κάθε κλάδο των μαθηματικών αλλά και όλων των τομέων της Επιστήμης, η σε βάθος κατανόηση και κατάκτηση των βασικών γνώσεων έχει τεράστια σημασία. Με τη διαρκή μελέτη του βιβλίου που κρατάτε στα χέρια σας, αυτό θεωρούμε ότι επιτυγχάνεται σε μεγάλο βαθμό.

Το παρόν εγχειρίδιο που είναι συγχρόνως και ένας Οδηγός Μελέτης, θα μας εφοδιάσει συμπληρωματικά με ακόμα πιο στέρεες γνώσεις, θα τις διευρύνει και θα μας εξασφαλίσει τεχνικές, εμπειρία και αυτοπεποίθηση στην ενασχόλησή μας με τα Μαθηματικά.

Περιεχόμενα

Οι εκφωνήσεις των ασκήσεων 5

Υποδείξεις για τη λύση των ασκήσεων 13

Οι Εκφωνήσεις των ασκήσεων

Να βρείτε το λάθος!

1. Με τους παρακάτω συλλογισμούς καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι!

Να βρείτε το λάθος στους συλλογισμούς αυτούς:

«Εστω δύο τυχαίοι αριθμοί α και β . Θέτουμε $\alpha - \beta = \gamma$. Τότε:

$$(\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \gamma(\alpha - \beta), \text{ Άρα}$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = \gamma\alpha - \gamma\beta, \text{ οπότε}$$

$$\alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma = \alpha\beta - \beta\gamma - \beta^2, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha(\alpha - \beta - \gamma) = \beta(\alpha - \gamma - \beta).$$

Επομένως τελικά, απλοποιούμε τον παράγοντα $(\alpha - \beta - \gamma)$ και προκύπτει $\alpha = \beta$.»

Ιδιότητες αναλογιών- Ισότητα δύο λόγων

2. Αν $\alpha\beta = \gamma\delta$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι αριθμοί διαφορετικοί από το μηδέν,

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \gamma^2} + \frac{\beta^2}{\beta^2 + \delta^2}$.

Συνεχής αναλογία

Η ισότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$ λέγεται συνεχής αναλογία, η οποία, μεταξύ

άλλων, μελετήθηκε και από τον Ιπποκράτη.

3. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$, να αποδείξετε ότι $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3 = \frac{\alpha}{\delta}$.

Ισότητα τριών λόγων

4. Αν $\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\gamma}{\omega}$, να αποδείξετε ότι $\frac{(\alpha + \beta + \gamma)^3}{(x + y + \omega)^3} = \frac{\alpha\beta\gamma}{xy\omega}$.

Εφαρμογές στην ισότητα τριών λόγων

5. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ, αν η περίμετρός του είναι 30 και οι πλευρές είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 5 και 6.

6. Αν $\frac{\lambda}{\alpha - \beta} = \frac{\mu}{\beta - \gamma} = \frac{\nu}{\alpha - \gamma}$, να αποδείξετε ότι $\lambda + \mu = \nu$.

7. Αν οι γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 3, 4 και 5, να βρείτε τα μέτρα των γωνιών αυτών.

8. Έστω x, y και ω ομόσημοι αριθμοί. Αν $\frac{x}{y + \omega} = \alpha$, $\frac{y}{\omega + x} = \beta$ και

$\frac{\omega}{x + y} = \gamma$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{\beta}{1 + \beta} + \frac{\gamma}{1 + \gamma} = 1.$$

9. Αν είναι $\alpha + \beta + \gamma = 3$ και $\frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{1}{\beta + \gamma} + \frac{1}{\gamma + \alpha} = 671$, να υπολογίσετε

την παράσταση:

$$B = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}.$$

Υπόδειξη: Ας προσθέσουμε την μονάδα $\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + 1 = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\beta + \gamma}$.

Διαδοχικοί ακέραιοι

- 10.** Αν οι α και β είναι δύο διαδοχικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων τους είναι περιττός αριθμός.
- 11.** Δίνονται οι διαδοχικοί ακέραιοι α, β, γ και δ . Να αποδείξετε ότι:
- α)** ο αριθμός $\beta\delta - \alpha\gamma$ είναι περιττός,
 - β)** ο αριθμός $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ είναι άρτιος, αλλά δεν διαιρείται με τον 4,
 - γ)** ο αριθμός $\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{2}$ είναι ακέραιος.

Πότε ένα κλάσμα ακεραίων είναι ακέραιος;

- 12.** Να βρείτε τις τιμές του φυσικού αριθμού v , ώστε ο αριθμός

$$A = \frac{5}{v-2}$$
 να είναι ακέραιος.

Διαίρεση διά 71

- 13.** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$\alpha = 15^v + 3^{v+2} \cdot 5^{v+1} + 3^v \cdot 5^{v+2}$$

διαιρείται με τον 71 για κάθε $v \in \mathbb{N}$.

Άρτιοι και περιττοί

14. Να αποδείξετε ότι όταν το άθροισμα ή το γινόμενο κάποιων ακέραιων αριθμών είναι περιττός, τότε ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι περιττός.

Γινόμενο αριθμών διάφορο του μηδενός

15. Να αποδείξετε ότι αν το γινόμενο 2 αριθμών είναι διάφορο του μηδενός, τότε οι αριθμοί είναι διάφοροι από το μηδέν.

Τέλειο τετράγωνο

16. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha = 2^{2^v} + 2^{2^{v+3}} + 2^{2^{v+4}}$ όταν v είναι φυσικός αριθμός, είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή τετράγωνο φυσικού αριθμού.

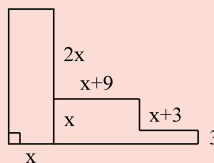
(Ρουμανία - 2005, 2006)

Ο συμβολισμός τετραψήφιου αριθμού, ως $x = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$

17. Το πρώτο ψηφίο ενός τετραψήφιου φυσικού αριθμού x είναι ίσο με το τελευταίο και το δεύτερο είναι ίσο με το τρίτο. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 11.

Τετραγωνισμός σχήματος

18. Να βρείτε την πλευρά ενός τετραγώνου που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος.



19. Οι πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$ έχουν μήκη α, β, γ . Αν ισχύει $\alpha^2\beta^2 + \gamma^4 = \alpha^2\gamma^2 + \beta^4$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές ή ορθογώνιο.

Μαθηματικό παιχνίδι

20. Να χρησιμοποιήσετε όλα τα ψηφία 1, 4, 8, 9, ακριβώς μία φορά το καθένα, ώστε με τα μαθηματικά σύμβολα $+, -, \cdot, :, \alpha^v, \sqrt{\quad}$ και παρενθέσεις να προκύψουν οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5, 10 και 11. Για παράδειγμα:

$$2 = -1 + 8 - 9 + 4.$$

Κριτήριο διαιρετότητας με το 9

21. Το αποτέλεσμα μιας παράστασης ήταν 3^{19} . Όμως η Μαρία υπολόγισε τον αριθμό 3^{19} και έγραψε

$$3^{19} = 1132261467$$

Ο καθηγητής της έλεγξε το αποτέλεσμα και της είπε ότι το τρίτο από αριστερά ψηφίο (που είναι το 3) είναι λάθος, **ενώ όλα τα άλλα ψηφία είναι σωστά.**

Ποιο είναι το ψηφίο που πρέπει να μπει στη θέση του 3, ώστε το αποτέλεσμα να είναι σωστό;

Σκέψου έναν αριθμό!

22. Ζητήστε από έναν φίλο σας να σκεφτεί έναν αριθμό,
- έπειτα να τον πολλαπλασιάσει επί 3,
 - από το γινόμενο να αφαιρέσει το 1 και

- να πολλαπλασιάσει και πάλι το υπόλοιπο με 3.
- Τέλος ζητήστε του να προσθέσει τον αριθμό που σκέφτηκε στο τελευταίο γινόμενο.

Στη συνέχεια ρωτήστε το αποτέλεσμα και προσθέστε σε αυτό νοερώς το 3.

Πώς θα βρείτε τον αριθμό που σκέφτηκε ο φίλος σας;

Το τέχνασμα με την αλγεβρική παράσταση για τον υπολογισμό αριθμητικής παράστασης

23. Χωρίς να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί να αποδείξετε ότι:

$$2004^2 - 2003 \cdot 2005 = 1.$$

Αν $\alpha = \overline{xy}$, τότε $\alpha = 10x + y$

24. Δίνεται ένας διψήφιος αριθμός α . Ονομάζουμε β τον αριθμό που προκύπτει αν εναλλάξουμε τα ψηφία του α (δηλαδή, αν $\alpha = \overline{xy}$, τότε $\beta = \overline{yx}$). Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha - \beta$ είναι πολλαπλάσιο του 9.

Ταυτότητα του Euler

Αφού αποδείξετε την ταυτότητα (ταυτότητα του Euler)

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$$

να δείξετε στη συνέχεια ότι:

Αν τρεις αριθμοί έχουν άθροισμα μηδέν, τότε το άθροισμα των

κύβων τους ισούται με το τριπλάσιο του γινομένου τους.

Με την βοήθεια των παραπάνω να δοκιμάσετε την επόμενη άσκηση.

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-2)^3 + (x-4)^3 + (6-2x)^3 = 0$,

β) $(x-3)^3 + (x-7)^3 + (10-2x)^3 = 0$.

Άθροισμα τετραγώνων ίσο με μηδέν

26. Αν είναι $x^2 - y\omega = \alpha$, $y^2 - \omega x = \beta$, $\omega^2 - xy = \gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$x = y = \omega \text{ και } \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

27. Αν είναι:

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma),$$

να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

28. Να βρείτε τους αριθμούς x, y, ω που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \omega^2 = 12 \\ xy + y\omega + \omega x = 12 \end{cases}$$

Η δύναμη της Παραγοντοποίησης

29. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, με $\alpha + \alpha\beta = 1$, $\beta + \beta\gamma = 1$ και $\gamma + \gamma\alpha = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$,

β) $\alpha = \beta = \gamma$ ή $\alpha\beta\gamma = 1$.

30. Αν α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί με $\alpha\beta\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x^2 - \alpha}{1 + \alpha + \alpha\beta} + \frac{x^2 - \beta}{1 + \beta + \beta\gamma} + \frac{x^2 - \gamma}{1 + \gamma + \gamma\alpha} = 3.$$

Υποδείξεις για τη λύση των ασκήσεων

1. Διαγράψαμε το $\alpha - \beta - \gamma = 0$, που οδηγεί σε άτοπο.

2. Έχουμε:

$$\alpha\beta = \gamma\delta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\gamma}{\beta} = \lambda \Leftrightarrow (\alpha = \delta\lambda \text{ ή } \gamma = \beta\lambda).$$

Έτσι:

$$A = \frac{\lambda^2\delta^2}{\lambda^2\delta^2 + \lambda^2\beta^2} + \frac{\beta^2}{\beta^2 + \delta^2} = \frac{\delta^2}{\beta^2 + \delta^2} + \frac{\beta^2}{\beta^2 + \delta^2} = 1.$$

Απ. $A = 1$.

3. Είναι $\alpha = \lambda\beta$, $\beta = \lambda\gamma$ και $\gamma = \lambda\delta$. Έτσι:

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma &= (\lambda\beta)(\lambda\gamma)(\lambda\delta) \Leftrightarrow \alpha = \lambda^3\delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\delta} = \lambda^3 = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3.\end{aligned}$$

(Προφανώς $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ για να ορίζονται τα κλάσματα.)

4. Θέτουμε $\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\gamma}{\omega} = \lambda$. Συνεπώς $\alpha = \lambda x$, $\beta = \lambda y$, $\gamma = \lambda \omega$ κλπ.

5. Είναι:

$$\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{5} = \frac{\gamma}{6} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{15} = \frac{30}{15} = 2.$$

Απ. 8, 10, 12.

6. Θέτουμε ρ τους ίσους λόγους. Τότε:

$$\lambda = \rho(\alpha - \beta), \mu = \rho(\beta - \gamma) \text{ και } \nu = \rho(\alpha - \gamma).$$

$$\text{Άρα } \lambda + \mu = \rho(\alpha - \gamma) = \nu.$$

7. Είναι:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{\omega}{5} = \frac{x+y+\omega}{12} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ.$$

Απ. $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$.

8. Είναι:

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{\frac{x}{y+\omega}}{1+\frac{x}{y+\omega}} = \frac{\frac{x}{y+\omega}}{\frac{y+\omega+x}{y+\omega}} = \frac{x}{x+y+\omega}.$$

Όμοια:

$$\frac{\beta}{1+\beta} = \frac{y}{x+y+\omega} \text{ και } \frac{\gamma}{1+\gamma} = \frac{\omega}{x+y+\omega}.$$

9. Είναι:

$$\begin{aligned} B+1+1+1 &= \left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+1\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+1\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha+\beta}+1\right) = \\ &= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma+\alpha} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta} = \\ &= (\alpha+\beta+\gamma) \left(\frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\beta+\gamma} + \frac{1}{\gamma+\alpha}\right) = 3 \cdot 671 = 2.013. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } B = 2.013 - 3 = 2.010.$$

10. Είναι $\beta = \alpha + 1$, οπότε:

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= \alpha^2 - (\alpha+1)^2 = \dots = -2\alpha - 1 = \\ &= 2\lambda + 1 \text{ (με } \lambda = -\alpha - 1 \text{), περιττός.} \end{aligned}$$

11. Οι αριθμοί είναι οι:

$$\alpha, \beta = \alpha + 1, \gamma = \alpha + 2, \delta = \alpha + 3$$

α) Είναι:

$$\begin{aligned}\beta\delta - \alpha\gamma &= (\alpha + 1)(\alpha + 3) - \alpha(\alpha + 2) = \dots = \\ &= 2\alpha + 3 = (2\alpha + 2) + 1 = 2(\alpha + 1) + 1 = \\ &= 2\mu + 1, \mu \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

β) Είναι:

- $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \dots = 4\alpha + 4 + 2 = 4(\alpha + 1) + 2 \neq \text{πολ}4.$
- $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \dots = 2(2\alpha + 3) = \text{πολ}2 \text{ \acute{a}ρτιος}.$

γ) Είναι $\beta\gamma - \alpha\delta = 2.$

12. Πρέπει:

$$\begin{aligned}v - 2 = 1 \text{ \acute{\eta} } v - 2 = -1 \text{ \acute{\eta} } v - 2 = 5 \text{ \acute{\eta} } \\ v - 2 = -5 \text{ (απορρίπτεται)}.\end{aligned}$$

$$\mathbf{Απ.} \ v = 3 \text{ \acute{\eta} } v = 1 \text{ \acute{\eta} } v = 7.$$

13. Είναι:

$$\begin{aligned}\alpha &= 15^v + 3^{v+2} \cdot 5^{v+1} + 3^v \cdot 5^{v+2} = \\ &= 3^v \cdot 5^v + 3^2 \cdot 3^v \cdot 5 \cdot 5^v + 3^v \cdot 5^2 \cdot 5^v = \\ &= 3^v \cdot 5^v (1 + 9 \cdot 5 + 25) = \\ &= 15^v (1 + 45 + 25) = 71 \cdot 15^v.\end{aligned}$$

14. Με απαγωγή σε άτοπο: Αν όλοι οι αριθμοί είναι άρτιοι, τότε το άθροισμά τους και το γινόμενό τους είναι άρτιος αριθμός, άτοπο.

15. Με απαγωγή σε άτοπο: Αν κάποιος αριθμός είναι το μηδέν, τότε το γινόμενο όλων των αριθμών θα είναι ίσο με μηδέν, άτοπο.

16. Είναι $\alpha = 25 \cdot 2^{2^v} = (5 \cdot 2^v)^2$.

17. Έστω $x = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ ο δοσμένος αριθμός. Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $\delta = \alpha$ και $\gamma = \beta$. Άρα ο x έχει τη μορφή $\overline{\alpha\beta\beta\alpha}$. Επομένως είναι:

$$\begin{aligned}x &= \overline{\alpha\beta\beta\alpha} = 1000\alpha + 100\beta + 10\beta + \alpha = \\&= 1001\alpha + 110\beta = 11 \cdot 91\alpha + 11 \cdot 10\beta = \\&= 11(91\alpha + 10\beta) = 11\lambda,\end{aligned}$$

όπου $\lambda = 91\alpha + 10\beta$.

Επειδή $x = 11\lambda$ και ο λ είναι φυσικός, συμπεραίνουμε ότι ο x διαιρείται με το 11.

18. Το σχήμα έχει εμβαδόν:

$$\begin{aligned}E &= x \cdot 3x + x(x+9) + (x+3) \cdot 3 = \\&= 3x^2 + x^2 + 9x + 3x + 9 = 4x^2 + 12x + 9 = \\&= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x+3)^2.\end{aligned}$$

Απ. $2x+3$.

19. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^2 + \gamma^4 &= \alpha^2\gamma^2 + \beta^4 \quad \text{ή} \\ \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\gamma^2 + \gamma^4 - \beta^4 &= 0 \quad \text{ή} \\ \alpha^2(\beta^2 - \gamma^2) + (\gamma^2 - \beta^2)(\gamma^2 + \beta^2) &= 0 \quad \text{ή} \\ (\beta^2 - \gamma^2)(\alpha^2 - \gamma^2 - \beta^2) &= 0.\end{aligned}$$

- Αν $\beta^2 - \gamma^2 = 0$, τότε $\beta = \gamma$ κ.λπ.
- Αν $\alpha^2 - \gamma^2 - \beta^2 = 0$, δηλαδή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

20. Πρόκειται για μαθηματικό παιχνίδι.

Είναι:

$$1=1^{489}, \quad 2=\sqrt{1-9+8+4},$$

$$3=1(-9+8+4)=\frac{1+\sqrt{9}+8}{4},$$

$$4=1+4-9+8=(1\cdot 9-8)4=4(9-8)1,$$

$$5=1(9-8+4)=\frac{-1+9}{8}+4,$$

$$10=1-\sqrt{9}+8+4=1+\sqrt{9}+8-\sqrt{4},$$

$$11=1^9+8+\sqrt{4}=1\cdot 9+\frac{8}{4}.$$

Οι παραπάνω τρόποι δεν είναι και οι μοναδικοί.

21. Ο αριθμός $3^{19} = 3^{17} \cdot 3^2$ διαιρείται και με το $3^2 = 9$. Τα ψηφία, εκτός του 3 έχουν άθροισμα:

$$1+1+2+2+6+1+4+6+7=30.$$

Επειδή το άθροισμα των ψηφίων του 3^{19} πρέπει να διαιρείται με το 9, το ψηφίο που ζητάμε είναι το 6.

22. Το τελικό αποτέλεσμα είναι $10x$, όπου x ο αριθμός που σκέφτηκε ο φίλος σας. (γιατί;)

Αρκεί λοιπόν από τον αριθμό αυτό που βρήκαμε, έχοντας προσθέσει νοερά και τον 3, να διαγράψετε το τελευταίο ψηφίο, δηλαδή το 0.

23. Αν $2004 = x$, τότε $2003 = x - 1$ και $2005 = x + 1$.

Έτσι το πρώτο μέλος δίνει:

$$x^2 - (x-1)(x+1) = \dots = 1.$$

24. Είναι:

$$\begin{aligned}\alpha - \beta &= 10x + y - (10y + x) = \dots = \\ &= 9(x - y) = \text{πολ}9\end{aligned}$$

διότι ο $x - y$ είναι ακέραιος.

25. α) Παρατηρούμε ότι:

$$(x - 2) + (x - 4) + (6 - 2x) = 0$$

οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$(x - 2)(x - 4)(6 - 2x) = 0.$$

$$\text{Απ. } x = 2 \text{ ή } x = 4 \text{ ή } x = 3.$$

β) Όπως το ερώτημα (α).

$$\text{Απ. } x = 3 \text{ ή } x = 7 \text{ ή } x = 5.$$

26. Προσθέτουμε κατά μέλη, πολλαπλασιάζουμε με 2 και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}(x - y)^2 + (y - \omega)^2 + (\omega - x)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = y = \omega.\end{aligned}$$

Τότε όμως $\alpha = 0$, $\beta = 0$ και $\gamma = 0$, δηλαδή:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

27. Φέρνουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \beta\gamma)^2 + (\beta^2 - \alpha\gamma)^2 + (\gamma^2 - \alpha\beta)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\alpha^2 = \beta\gamma \text{ και } \beta^2 = \gamma\alpha \text{ και } \gamma^2 = \alpha\beta).\end{aligned}$$

Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη, αφού πολλαπλασιαστούν πρώτα με 2, δίνουν:

$$(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma.$$

28. Αφαιρούμε τη δεύτερη σχέση από την πρώτη και έχουμε:

$$\begin{aligned}
& x^2 + y^2 + \omega^2 - xy - y\omega - \omega x = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2\omega^2 - 2xy - 2y\omega - 2\omega x = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-\omega)^2 + (\omega-x)^2 = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x = y = \omega.
\end{aligned}$$

Άρα $3x^2 = 12 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Απ. $(x, y, \omega) = (2, 2, 2)$ ή $(x, y, \omega) = (-2, -2, -2)$.

29. α) Για $\alpha = 0$ είναι:

$$\alpha + \alpha\beta = 1 \Leftrightarrow 0 = 1, \text{ άτοπο.}$$

Όμοια για $\beta = 0$ ή $\gamma = 0$.

β) Αφαιρούμε τις δύο πρώτες σχέσεις κατά μέλη, οπότε:

$$\alpha - \beta = \beta(\gamma - \alpha)$$

και όμοια:

$$\beta - \gamma = \alpha(\alpha - \beta) \text{ και } \gamma - \alpha = \alpha(\beta - \gamma).$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη, οπότε:

$$\begin{aligned}
& (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha\beta\gamma - 1) = 0 \Leftrightarrow \\
& \alpha = \beta \text{ ή } \beta = \gamma \text{ ή } \gamma = \alpha \text{ ή } \alpha\beta\gamma = 1.
\end{aligned}$$

Αν $\alpha = \beta$, τότε:

$$\beta(\gamma - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \text{ ή } \gamma = \alpha.$$

30. Είναι $\gamma = \frac{1}{\alpha\beta}$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{x^2 - \alpha}{1 + \alpha + \alpha\beta} + \frac{x^2 - \beta}{1 + \beta + \frac{1}{\alpha}} + \frac{x^2 - \gamma}{1 + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta}} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - \alpha) + \alpha(x^2 - \beta) + \alpha\beta(x^2 - \gamma)}{1 + \alpha + \alpha\beta} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 + \alpha + \alpha\beta)x^2 = 4(1 + \alpha + \alpha\beta) \Leftrightarrow x^2 = 4,$$

διότι $1 + \alpha + \alpha\beta \neq 0$.

Απ. $x = 2$ ή $x = -2$.

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων
και Αθλητισμού



ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ

1013-1017

Πρόγραμμα
Ανθρώπινο Δυναμικό και
Κοινωνική Συνοχή

Τίτλος: Διδακτικό εγχειρίδιο-οδηγός κλασική άλγεβρα

Έκδοση: 1.0 Ημερομηνία: 26.04.2024

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

ΕΜΠΝΕΥΣΤΕΣ/ ΟΜΑΔΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ/ ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Κωνσταντίνος Ρεκούμης

Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03

Λάμπρος Κασιπάτσ

Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03

Νικόλαος Κουμάντος

Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03

Ελένη Ρεκούμη

Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03



Το παρόν χορηγείται με άδεια Creative Commons

Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση 4.0 Διεθνής (CC BY-NC 4.0).

Με τη συγκεκριμένη άδεια, μπορείτε να:

- **Μοιραστείτε** — αντιγράψετε και αναδημιουργήσετε το υλικό με κάθε μέσο και τρόπο
- **Προσαρμόσετε** — αναμίξετε, τροποποιήσετε και δημιουργήσετε πάνω στο υλικό

Υπό τους ακόλουθους όρους:

- **Αναφορά Δημιουργού** — Θα πρέπει να καταχωρήσετε αναφορά στον δημιουργό, με σύνδεσμο της άδειας, και με αναφορά αν *Έχουν γίνει αλλαγές*. Μπορείτε να το κάνετε αυτό με οποιοδήποτε εύλογο τρόπο, αλλά όχι με τρόπο που να υπονοεί ότι ο δημιουργός αποδέχεται το έργο σας ή τη χρήση που εσείς κάνετε.
- **Μη Εμπορική Χρήση** — Δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το υλικό για **εμπορικούς σκοπούς**.
- **Παρόμοια Διανομή** — Αν αναμίξετε, τροποποιήσετε, ή δημιουργήσετε πάνω στο υλικό, πρέπει να διανείμετε τις δικές σας συνεκφορές υπό την ίδια άδεια όπως και το πρωτότυπο.

Δεν υπάρχουν πρόσθετοι περιορισμοί — Δεν μπορείτε να εφαρμόσετε νομικούς όρους ή **τεχνολογικά μέτρα** που να περιορίζουν νομικά τους άλλους από το να κάνουν οποιδήποτε επιτρέπει η άδεια.

Ο αδειοδότης δεν μπορεί να ανακλήσει αυτές τις ελευθερίες όσο εσείς ακολουθείτε τους όρους της άδειας.