ΨΗΦΙΑΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Περιεχόμενα

Σύνδεση με το Γυμνάσιο

1.1 Αριθμητικές παραστάσεις - Βασική Άλγεβρα

Οι ασκήσεις στοχεύουν να δώσουν αφορμή αλλά και υλικό για σύνδεση των γνώσεων μικρότερων τάξεων με την ύλη στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου.
Απαραίτητες γνώσεις είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων και η προτεραιότητα των πράξεων.

1. Δυνάμεις

Α. Με ν θετικό ακέραιο έχουμε ορίσει

- $\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \ldots \alpha}_{\nu \text{ φορές}}$, $\nu > 1$
- $\alpha^{1} = \alpha$
- $\alpha^{0} = 1$, με $\alpha \neq 0$
- $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$, με $\alpha \neq 0$

Με την προϋπόθεση ότι οι παραστάσεις που εμφανίζονται έχουν νόημα, ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες των δυνάμεων:

- $\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$, $\alpha^{\kappa} : \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}$
- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\lambda}$, $(\alpha\beta)^{\kappa} = \alpha^{\kappa}\beta^{\kappa}$
- $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa} = \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}$, $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\kappa} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\kappa}$

Β. Αξίζει ακόμα να αναφέρουμε ότι:

$$(-\alpha)^{\nu} = \begin{cases} \alpha^{\nu}, & \nu - \text{άρτιος} \\ -\alpha^{\nu}, & \nu - \text{περιττός} \end{cases}$$

2. Η προτεραιότητα των πράξεων

Για τον υπολογισμό μιας αριθμητικής παράστασης είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε την προτεραιότητα των πράξεων:

- Υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- Εκτελούμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.
- Όταν έχουμε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις ταυτόχρονα, κάνουμε τις πράξεις με τη σειρά που τις συναντούμε. Π.χ. $8:4\cdot 3 = 2\cdot 3 = 6$, $12:3:2\cdot 4 = 4:2\cdot 4 = 8$.
- Αν υπάρχουν παρενθέσεις εκτελούμε πρώτα τις πράξεις σε αυτές με την ίδια σειρά.

Ασκήσεις

Ιδιότητες των δυνάμεων

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=2002\cdot\left[(-1)^{2001}+(-1)^{2002}\right]^2-\left[(-2)^{-3}\right]^2+\frac{1}{64}$.

2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\beta}\right)^{-3}-9\beta^2-\frac{8}{9}$ για $\beta=-\frac{1}{3}$.

3. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=(-5)^2-(-2)^{-3}:\left(-\frac{1}{2}\right)^3+(-1)^{1000},$$

$$B=\left[(-5)^2-(-2)^3-1\right]:\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{35}{24}\right].$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς Α και Β.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{A}{B}$ και $\frac{25A}{23B}$.

4. Αν $x+y=3(-2)^2$ και $y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=7x+10y-3w-87.$$

5. Αν $A=\frac{(-2)^\nu}{2\nu^2}$ και $B=\frac{(-2)^\nu}{2\nu^2+3}$, όπου ν είναι θετικός ακέραιος, να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

6. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\left(8^7-9\cdot8^6+9\cdot8^5-\ldots-9\cdot8^2+9\cdot8-1\right)^{2000}$ και $\beta=1024^{200}\cdot625^{1000}$.
Να συγκρίνετε τους αριθμούς α^2 και β.
.

Υποδείξεις στη λύση των ασκήσεων

1. $A=2002\cdot(-1+1)^2-2^{-6}+\frac{1}{64}=0-\frac{1}{64}+\frac{1}{64}=0$.

2.

Για $\beta=-\frac{1}{3}$ είναι:

$$A=\left(\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\right)^{-3}-9\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{8}{9}=\left(9+\frac{1}{9}\right)(-1)^{-3}-9\left(+\frac{1}{9}\right)-\frac{8}{9}==\frac{82}{9}\cdot(-1)-1-\frac{8}{9}=-\frac{82}{9}-1-\frac{8}{9}=$$

$$=-\frac{82+8}{9}-1=-\frac{90}{9}-1=-10-1=-11.$$

3. α) Είναι:

- $A=25+\frac{1}{8}:\left(-\frac{1}{8}\right)+1=26+\frac{1}{8}(-8)=26-1=25$.
- $B=\left[25-(-8)-1\right]:\left(-\frac{1}{8}+\frac{35}{24}\right)=(25+8-1):\frac{35-3}{24}=32\cdot\frac{24}{32}=24$.

β) Έχουμε $A=25$ και $B=24$, οπότε:

- $\frac{A}{B}=\frac{25}{24}=1+\frac{1}{24}$.
- $\frac{25B}{23A}=\frac{25\cdot 24}{23\cdot 25}=\frac{24}{23}=1+\frac{1}{23}$.

Επειδή $23<24$, είναι $\frac{1}{23}>\frac{1}{24}$. Άρα $\frac{A}{B}<\frac{25B}{23A}$.

4. Είναι:

- $x+y=3\cdot 4=12$
- $y-w=\left(\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{-24}=\left(\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{24}=\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\right)^{24}=$

  $=1^{24}=1$.
- $A=(7x+7y)+(3y-3w)-87=7(x+y)+3(y-w)-87=7\cdot 12+3\cdot 1-87=84+3-87=87-87=0$.

5.
- Έστω ν–άρτιος. Προφανώς είναι $2\nu^2<2\nu^2+3$ και επειδή $(-2)^\nu=2^\nu>0$, είναι $A>B$.
- Έστω ν–περιττός. Τότε $(-2)^\nu=-2^\nu<0$ και επειδή $\frac{1}{2\nu^2}>\frac{1}{2\nu^2+3}$ είναι $\frac{-2^\nu}{2\nu^2}<\frac{-2^\nu}{2\nu^2+3}\Leftrightarrow A<B$.

6. Αρχικά παρατηρούμε ότι:

$$8^7-9\cdot 8^6+9\cdot 8^5-9\cdot 8^4+9\cdot 8^3-9\cdot 8^2+9\cdot 8-1=8^7-(8+1)8^6+(8+1)8^5-(8+1)8^4+(8+1)8^3-(8+1)8^2+(8+1)8-1=$$

$$=8^7-8^7-8^6+8^6+8^5-8^5-8^4+8^4+8^3-8^3-8^2+8^2+8-1=8-1=7.$$

Έτσι:

- $\alpha=7^{2000}$ και $\alpha^2=\left(7^{2000}\right)^2=7^{4000}$.
- $\beta=1024^{200}\cdot 625^{1000}=\left(2^{10}\right)^{200}\cdot\left(5^4\right)^{1000}=2^{2000}\cdot 5^{4000}=2^{2000}\cdot\left(5^2\right)^{2000}==2^{2000}\cdot 25^{2000}=50^{2000}>49^{2000}=$

  $=(7^2)^{2000}=7^{4000}=\alpha^2$.

Πράξεις και δυνάμεις

1. Αν $\alpha=\frac{1}{7}$ και $\beta=\frac{1}{3}$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha+\frac{2\beta}{1-\beta^2}}{1-\alpha\cdot\frac{2\beta}{1-\beta^2}}=1$.

2. Αν είναι $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{5}$, $\gamma=\frac{1}{8}$ και $A=\frac{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}+\gamma}{1-\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}\cdot\gamma}$, να αποδείξετε ότι $A=1$.

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A=(0{,}25)^{30}\cdot 8^{20}$.

β) $B=12^{2000}\cdot(1{,}5)^{1000}\cdot 6^{-3000}$.

4. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A=\left[\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^2\left(\frac{\beta}{\alpha^2}\right)^2\right]:(\alpha\beta)^{-2}$, όπου α, β είναι αριθμοί διάφοροι του μηδέν.

5. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\left[(x^2y^3)^{-2}(xy^3)^4\right]:(x^3:y^{-1})^{-3}$ για $x=2007$ και $y=\frac{2}{2007}$ και να τη γράψετε ως μια δύναμη με βάση φυσικό αριθμό.

6. Να βρείτε την αριθμητική τιμή των επόμενων παραστάσεων για $x=0{,}4$ και $y=-2{,}5$:

α) $A=\left[x^5(xy^2)^3\right]:(x^{-2}:y)^{-2}$.

β) $B=\left[(xy^{-1})^2:(x^3y^7)^{-1}\right]^2$.

7. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A=x^2(x^2y^3)^2(x^{-1})^{-3}$, όταν $x^3y^2=-2$.

β) $B=\left[x^2(xy^2)^3\right]^3:\left[(x^{-2}y^{-3})^{-2}\right]^3$, όταν $x=-3$.

8. Αν είναι $A=\frac{\alpha\beta^{-2}(\alpha^{-1}\beta^2)^4(\alpha\beta^{-1})^2}{\alpha^{-2}\beta(\alpha^2\beta^{-1})^3\alpha^{-1}\beta}$ και $\alpha=10^{-3}$, $\beta=10^{-2}$, να αποδείξετε ότι $A=100$.

9. Αν είναι $A=\left[(\alpha^2\beta^{-1})^2\cdot\alpha^{-2}\cdot(\beta^2)^{-3}\right]^{-1}:\left(\frac{\beta^{-2}}{\alpha^4}\right)^{-3}$ όπου $\alpha=0{,}01$ και $\beta=0{,}1$, να αποδείξετε ότι $A=10^{26}$.

10. Σε πόσα μηδενικά τελειώνουν οι αριθμοί:

α) $7^{100}\cdot 100^7$, **β)** $3^{500}\cdot 500^3$, **γ)** $8^4\cdot 25^8$,

δ) $50^{40}\cdot 40^{50}$, **ε)** $15^{30}\cdot 30^{15}$, **στ)** $60^{30}\cdot 30^{60}$,

ζ) 100^{200^4}, **η)** $(-4)^{3000}\cdot(-1{,}25)^{2000}$.

11. Για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $\alpha=x^2-2x$ και $\beta=(x-4)(x+5)$ έχουν αντίστροφο;

12. Να βρείτε τις τιμές των x και y για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $f(x)=\frac{x+5}{(x-2)(x+3)}+\frac{5}{x(x+1)}$, **β)** $g(y)=\frac{y^2}{y+5}-\frac{y+2}{(y+1)(4-4y)}$.

13. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $A=\frac{2+\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x}}$, **β)** $B=\frac{3-\frac{9}{x+1}}{3+\frac{3}{3-x}}$.

Υποδείξεις στη λύση των ασκήσεων

1. Η παράσταση δίνει:

$$\frac{\alpha-\alpha\beta^2+2\beta}{1-\beta^2-2\alpha\beta}=\frac{\frac{1}{7}-\frac{1}{63}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}-\frac{2}{21}}=\frac{\frac{9-1+42}{63}}{\frac{63-7-6}{63}}=\frac{\frac{50}{63}}{\frac{50}{63}}=1.$$

2. Είναι $A=\frac{\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma}{1-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma}=...=\frac{40+16+10-1}{80-8-5-2}=1.$

3. α) $A=1$, β) $B=1$.

4. $A=1$.

5. $A=(xy)^9=2^9$.

6. α) Βρίσκουμε ότι $A=(xy)^4=1$.
   β) Βρίσκουμε ότι $B=(xy)^{10}=1$.

7. α) $A=(x^3y^2)^3=-8$.
   β) $B=x^3=(-3)^3=-27$.

8. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων βρίσκουμε $A=\alpha^{-4}\beta^5$.

9. Είναι:

- $A=(\alpha^4\beta^{-2}\alpha^{-2}\beta^{-6})^{-1}:\frac{\beta^6}{\alpha^{-12}}=(\alpha^4\beta^{-2}\alpha^{-2}\beta^{-6})^{-1}\cdot\frac{\alpha^{-12}}{\beta^6}=$
  $=\alpha^{-2}\beta^8\cdot\alpha^{-12}\beta^{-6}=\alpha^{-14}\beta^2=\frac{\beta^2}{\alpha^{14}}$.
- $A=\frac{(10^{-1})^2}{(10^{-2})^{14}}=\frac{10^{-2}}{10^{-28}}=10^{26}$.

10. Για να βρούμε σε πόσα μηδενικά τελειώνει ο αριθμός $8^4\cdot25^8$ θα τον γράψουμε στη μορφή $\beta\cdot10^\nu$, όπου β είναι ένας αριθμός που δεν τελειώνει σε 0.

   α) $100^7=10^{14}$,
   β) $500^3=5^3\cdot10^6$,
   γ) Είναι:

$$8^4\cdot25^8=(2^3)^4\cdot(5^2)^8=2^{12}\cdot5^{16}=2^{12}\cdot5^{12+4}=2^{12}\cdot5^{12}\cdot5^4=(2\cdot5)^{12}\cdot5^4=10^{12}\cdot5^4=5^4\cdot10^{12}.$$

   Άρα ο αριθμός $8^4\cdot25^8$ τελειώνει σε 12 μηδενικά.
   δ) Θα γράψουμε τον αριθμό ως γινόμενο δυνάμεων με βάση μόνο το 2 ή το 5.

Είναι:

$$50^{40}\cdot 40^{50}=(2\cdot 25)^{40}(5\cdot 8)^{50}=(2\cdot 5^2)^{40}(5\cdot 2^3)^{50}=2^{40}\cdot 5^{80}\cdot 5^{50}\cdot 2^{150}=2^{40+150}\cdot 5^{80+50}=2^{190}\cdot 5^{130}$$

$$=2^{130}\cdot 2^{60}\cdot 5^{130}=2^{60}(2^{130}\cdot 5^{130})=2^{60}(2\cdot 5)^{130}=2^{60}\cdot 10^{130}\,.$$

Άρα ο αριθμός τελειώνει σε 130 μηδενικά.

Άλλος τρόπος

Επειδή:

$$50=5\cdot 10 \quad \text{και} \quad 40=4\cdot 10=2^2\cdot 10$$

είναι:

$$(5\cdot 10)^{40}(2^2\cdot 10)^{50}=5^{40}\cdot 10^{40}(2^2)^{50}\cdot 10^{50}=5^{40}\cdot 10^{40}\cdot 2^{100}\cdot 10^{50}=5^{40}\cdot 2^{100}\cdot 10^{40+50}=$$

$$=5^{40}\cdot 2^{40+60}\cdot 10^{90}=5^{40}\cdot 2^{40}\cdot 2^{60}\cdot 10^{90}=(5\cdot 2)^{40}\cdot 2^{60}\cdot 10^{90}=2^{60}\cdot 10^{40}\cdot 10^{90}=2^{60}\cdot 10^{130}\,.$$

ε) $15^{30}\cdot(3\cdot 10)^{15}=15^{30}\cdot 3^{15}\cdot 10^{15}$.

στ) $(6^{30}\cdot 10^{30})(3^{60}\cdot 10^{60})=6^{30}\cdot 3^{60}\cdot 10^{90}$.

ζ) $200^4=(2\cdot 10^2)^4=16\cdot 10^8$.

Άρα $3.200.000.000=32\cdot 10^8$ μηδενικά.

η) $(-2^2)^{3000}\cdot\left(\dfrac{125}{100}\right)^{2000}=2^{6000}\left(\dfrac{5}{4}\right)^{2000}=2^{6000}\cdot\dfrac{5^{2000}}{4^{4000}}=2^{2000}\cdot 5^{2000}=10^{2000}$.

11. Πρέπει:

- $\alpha\neq 0 \Leftrightarrow (x\neq 0$ και $x\neq 2)$.
- $\beta\neq 0 \Leftrightarrow (x\neq 4$ και $x\neq -5)$.

12. Πρέπει οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός.

Απ. α) $x\neq 2$, $x\neq -3$, $x\neq 0$, $x\neq -1$

1.2 Ταυτότητες - Παραγοντοποίηση

Α. Ταυτότητες

α) Οι ταυτότητες είναι ισότητες που ισχύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους. Η χρησιμότητά τους βρίσκεται κυρίως στο γεγονός ότι μας επιτρέπουν να κάνουμε γρήγορα πράξεις, αλλά και να διακρίνουμε πιο εύκολα τα αλγεβρικά τεχνάσματα που πολύ συχνά απαιτούνται για τη λύση των ασκήσεων.
Οι βασικότερες ταυτότητες είναι ο παρακάτω:

- $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$
- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$
- $(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$
- $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$, $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
- $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$

β) Εκτός από τις παραπάνω βασικές ταυτότητες, ο αναγνώστης που ασχολείται με τους διαγωνισμούς είναι χρήσιμο να έχει κατά νου και τις παρακάτω ταυτότητες:

- $(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$
- $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\left[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2\right]$

  (Ταυτότητα Euler)
- $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\beta^2\gamma^2 - 2\gamma^2\alpha^2 = -(\alpha + \beta + \gamma)(-\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)$

  (Ταυτότητα de Moivre)
- Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.
- Αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$, τότε $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ή $\alpha = \beta = \gamma$.
- $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$

  (Ταυτότητα Lagrange)

Β. Παραγοντοποίηση

Παραγοντοποίηση λέγεται η διαδικασία, με την οποία μια παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο.
Π.χ. $2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)$, $\alpha^2+\alpha\beta=\alpha(\alpha+\beta)$.

Για την παραγοντοποίηση ενός αθροίσματος ή γενικότερα μιας παράστασης χρησιμοποιούμε ορισμένες βασικές τεχνικές, αλλά συχνά μικτή στρατηγική ή διάφορα αλγεβρικά τεχνάσματα. Οι βασικότερες τεχνικές για την παραγοντοποίηση είναι οι εξής:

- **Η μέθοδος του κοινού παράγοντα**

$$x^2y-xy^2=xy(x-y).$$

- **Η μέθοδος της ομαδοποίησης**

$$\overbrace{\alpha^2+\alpha\beta}+\overbrace{\beta\gamma+\gamma\alpha}=\alpha(\alpha+\beta)+\gamma(\beta+\alpha)=(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$$

- **Η μέθοδος των ταυτοτήτων**

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta),\ \alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2),\ \alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha\pm\beta)^2$$
$$x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)$$
$$x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma=(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$$
$$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3,\ \ \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3=(\alpha-\beta)^3$$
$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma,\ \text{όταν}\ \alpha+\beta+\gamma=0.$$

- **Η μέθοδος του τριωνύμου**

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq0)$, τότε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$$

Θυμίζουμε ότι $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma\geq0$ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης.

1 Απόδειξη ταυτοτήτων

1. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $A=(\alpha-2\beta)^2-(3\alpha+\beta)^2-2(\alpha-3\beta)(2\alpha+\beta)-3(3\beta^2-4\alpha^2)$,

β) $B=(\alpha+1)^3-(\alpha-1)^3-(2\alpha+1)(3\alpha+2)$.

2. Αν $x+y=3$ και $xy=1$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A=x^2+y^2$, **β)** $B=x^4+y^4$, **γ)** $\Gamma=3x^2-5xy+3y^2$.

3. Να υπολογίστε τις παραστάσεις:

α) $A=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\cdot(x^{16}+x^8+1)$,

β) $B=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2+\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2+\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2+\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$.

4. Δίνεται η παράσταση $A=(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $B=\left(\frac{999}{1000}+\frac{1000}{999}\right)^2-\left(\frac{999}{1000}-\frac{1000}{999}\right)^2$.

5. Να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\frac{1999}{2000}+\frac{2000}{1999}\right)^2-\left(\frac{1999}{2000}-\frac{2000}{1999}\right)^2=4$.

β) $1{,}3265^2-0{,}3265\cdot 2{,}3265=1$.

6. Να βρείτε τις τιμές των x, y αν ισχύει $x^2+y^2=2(x+y)-2$.

7. Να αποδείξετε ότι:

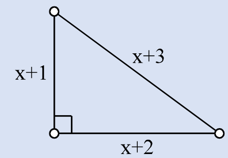
α) αν $1+\frac{\alpha+\beta}{\alpha}+\frac{\alpha+\beta}{\beta}=5$, τότε $\alpha=\beta$.

β) αν $2(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^2$, τότε $\alpha=\beta$.

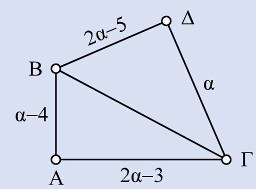
8. Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta)(\alpha^3+\beta^3)+3\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+6\alpha^2\beta^2=(\alpha+\beta)^4$.

9. Δίνεται η παράσταση $A=(2x+1)^2+(2y+1)^2+4(x+y)$. Να αποδείξετε ότι $A=4(x^2+y^2)+8(x+y)+2$.

10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παρακάτω ορθογωνίου τριγώνου.



11. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα μήκη των δύο πλευρών δύο τριγώνων. Αν ένα από τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α ή στο Δ, να αποδείξετε ότι και το άλλο τρίγωνο είναι ορθογώνιο.



12. Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $2(\alpha\beta-\gamma^2)=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-2\gamma)$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

13. Να αποδείξετε ότι $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{99^2}\right)=\frac{50}{99}$.

Υποδείξεις στη λύση των ασκήσεων

1. α) $A=0$. β) $B=-7\alpha$.

2. α) $A=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\ldots=7$.
   β) $B=x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=\ldots=47$.
   γ) $\Gamma=3(x^2+y^2)-5xy=\ldots=16$.

3. α) $A=x^{24}-1$. β) $B=x^2+20$.

4. α) $A=4\alpha\beta$.
   β) Αν $\alpha=\frac{999}{1000}$ και $\beta=\frac{1000}{999}$, τότε:

$$B=(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta=\ldots=4.$$

5. α) Έστω $\frac{1999}{2000}=\alpha$. Το πρώτο μέλος γίνεται:

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2=\ldots=4.$$

   β) Έστω $1{,}3265=\alpha$. Τότε το πρώτο μέλος δίνει:

$$\alpha^2-(\alpha-1)(\alpha+1)=\alpha^2-(\alpha^2-1)=1.$$

6. Είναι:

$$x^2+y^2=2(x+y)-2 \quad ή \quad (x-1)^2+(y-1)^2=0.$$

Άρα $x=y=1$.

7. α) Είναι απλή.
   β) Προκύπτει $(\alpha-\beta)^2=0$.

8. Α′ μέλος $=(\alpha+\beta)^2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)+\;+3\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)=\ldots\;=(\alpha+\beta)^2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2+3\alpha\beta)=(\alpha+\beta)^4$.

9. Αναπτύσσουμε τις ταυτότητες.

10. $E=6$ τ.μ.

11. Έστω $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ορθογώνιο με $\hat{A}=90^o$. Είναι:

$$B\Gamma^2=(\alpha-4)^2+(2\alpha-3)^2\;=\alpha^2-8\alpha+16+4\alpha^2-12\alpha+9\;=5\alpha^2-20\alpha+25\;.$$

Είναι:

$$B\Delta^2+\Delta\Gamma^2=(2\alpha-5)^2+\alpha^2\;=4\alpha^2-20\alpha+25+\alpha^2=5\alpha^2-20\alpha+25\;.$$

Από το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος, το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο στο Δ.

‘Όμοια εργαζόμαστε αν υποθέσουμε ότι $\hat{\Delta}=90^o$ αποδεικνύοντας ότι $\hat{A}=90^o$.

12. Είναι:

$$2(\alpha\beta-\gamma^2)=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-2\gamma)\;\text{ ή }\;(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2=0\;.$$

Άρα $\alpha=\beta=\gamma$.

13. Επειδή $1-\frac{1}{\nu^2}=\frac{\nu^2-1}{\nu^2}=\frac{(\nu-1)(\nu+1)}{\nu^2}$, το Α′ μέλος γίνεται:

$$A=\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\ldots\frac{97^2-1}{97^2}\cdot\frac{98^2-1}{98^2}\cdot\frac{99^2-1}{99^2}\;=\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdot\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\ldots$$

$$\cdot\frac{(98-1)(98+1)}{98^2}\cdot\frac{(99-1)(99+1)}{99^2}\;=\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{97\cdot99}{98^2}\cdot\frac{98\cdot100}{99^2}\;.$$

Αν είχαμε μόνο τους τρεις πρώτους όρους, η τιμή της παράστασης θα ήταν:

$$\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\;.$$

Βλέπουμε ότι όλοι οι παράγοντες απλοποιούνται και μένει το $\frac{1}{2}$ και το $\frac{5}{4}$. Στην παράταση μας, που έχει 98 όρους, μετά την απλοποίηση, θα μείνει το $\frac{1}{2}$ από τον α′ όρο και το $\frac{100}{99}$ από τον τελευταίο. Όλοι οι άλλοι παράγοντες απλοποιούνται.

Έτσι:

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{100}{99}=\frac{50}{99}\;.$$

2. Παραγοντοποίηση παραστάσεων

1. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $\alpha x-\alpha y-\alpha\omega$, **β)** $\alpha^2x-2\alpha^2y+3\alpha^2\omega$,

γ) $\alpha^2x-4\alpha x+3\alpha x^2$, **δ)** $\alpha\beta^2\gamma-\alpha\beta\gamma^2-\alpha\beta\gamma$,

ε) $6\alpha x^2-4\alpha x^2y+8\alpha xy^2$, **στ)** $5x^3y^3+10x^2y^3-15x^3y^4$.

2. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $(\alpha+\beta)x-(\alpha+\beta)y$, **β)** $(\alpha-\beta)x+(\beta-\alpha)y$,

γ) $(x-y)\alpha^2+\beta^2(y-x)$, **δ)** $\alpha\beta(xy-\omega)+2(\omega-xy)$,

ε) $\alpha(x-y)-2x+2y$, **στ)** $(x-2)^2-3x+6$.

3. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $2(\alpha-\beta)^2+4(\alpha-\beta)$, **β)** $2x(\alpha+\beta)-4(\beta+\alpha)$,

γ) $\alpha(x-y)-\beta(y-x)$, **δ)** $3(\alpha-\beta)^2+6(\beta-\alpha)$.

4. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $x^2(x-2)+x(2-x)^2$, **β)** $(\alpha+\beta)(x-y)-(y-x)^2$,

γ) $\alpha(x-2)^2+\beta(2-x)^3$, **δ)** $6(\alpha-\beta)^3-12(\beta-\alpha)^2$,

ε) $(x-2)(\alpha+\beta)+(2-x)(\alpha+\beta)^2$, **στ)** $(2x+y)(\alpha-\beta)+(\beta-\alpha)(x+2y)$.

5. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $x^2-xy+\omega x-y\omega$, **β)** $\alpha\beta-1+\alpha-\beta$,

γ) $x^2+y\omega-xy-x\omega$, **δ)** $y\omega-x^2-xy+x\omega$,

ε) $\alpha^3-\alpha^2-\alpha+1$, **στ)** $xy-x\omega-(\omega-y)^2$.

6. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $x(x-1)-2x+2$, **β)** $\alpha(x+y)+\beta y+\beta x$,

γ) x^3-x^2-4x+4 , **δ)** $x^3-5x^2-4x+20$,

ε) $2\alpha-8x-\alpha x+4x^2$, **στ)** $10\beta-5\alpha-18\beta^2+9\alpha\beta$.

7. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $(\alpha+\beta)(x+y)-\gamma x-\gamma y$, **β)** $2\alpha-2-(1-\alpha)^2$,

γ) $xy-3y-2x\omega+6\omega$, **δ)** $(\alpha-\beta)(x+y)-\gamma x-\gamma y$,

ε) $\alpha(x-y)-\beta y+\beta x$, **στ)** $\alpha\beta-\alpha-\beta+1$.

8. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) x^2-16 , **β)** $4y^2-9$,

γ) β^4-1 , **δ)** $4\alpha^2\beta^2-25$,

ε) $3x^2-12$, **στ)** $-5\alpha^2+20\beta^2$.

9. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $9x^2-4y^2$, **β)** $25x^2-9$,

γ) $4x^2y^4-1$, **δ)** x^4-16 ,

ε) $(x-1)^2-4$, **στ)** $4(y-2)^2-9y^2$.

10. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2x^2-18$, **β)** $3y^4-3$,

γ) $\alpha\beta^2-\alpha\gamma^2$, **δ)** $8x^2-50y^2$,

ε) $2\alpha^3-2\alpha$, **στ)** $3y^4-3\omega^4$.

11. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $A=4x^2+12xy+9y^2$, **β)** $B=9\alpha^4-12\alpha^2\beta^3+4\beta^6$.

12. Να κάνετε γινόμενα τα τριώνυμα:

α) $A=x^2-4x+3$, **β)** $B=y^2+4y-5$,

γ) $\Gamma=\alpha^2-\alpha-6$, **δ)** $\Delta=\beta^2+2\beta-8$.

13. Να κάνετε γινόμενα τις περιπτώσεις:

α) $\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1$, **β)** $y^6+3y^4+3y^2+1$,

γ) $(x+1)^3+3(x+1)^2+3(x+1)+1$, **δ)** $(\alpha+2)^3-3(\alpha+2)^2+3(\alpha+2)-1$.

14. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\alpha+\beta$, **β)** $x^2+y^2+2xy-2x-2y$,

γ) $x^2-y^2+2\alpha x+\alpha^2$, **δ)** $x^2-2xy+y^2-\omega^2$,

ε) x^2-y^2-6y-9 , **στ)** $9-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2$.

15. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $\alpha^2-x^2+\beta^2-4-2\alpha\beta-4x$, **β)** $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-x^2+4x-4$,

γ) $4\alpha^2-4\alpha^3+\alpha^4$, **δ)** $\alpha^3+1+2(\alpha^2-1)+(\alpha+1)^2$,

ε) $\alpha^3-1-2(\alpha^2-1)-(\alpha-1)^2$, **στ)** $x^3-2x^2+x-xy+y$.

16. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\alpha^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2$, **β)** x^2-y^2+4x+4 ,

γ) $x^2-y^2-6x+6y$, **δ)** x^2-x-y^2-y ,

ε) $\alpha^5+\alpha^4-\alpha-1$, **στ)** $\alpha^2-\beta^2-\alpha+\beta$

ζ) $x^2+4x+3+\alpha x+3\alpha$, **η)** $\alpha^4+\beta^4-11\alpha^2\beta^2$,

θ) x^4-15x^2+9 .

Υποδείξεις στη λύση των ασκήσεων

1. α) $\alpha(x-y-\omega)$.
   β) $\alpha^2(x-2y+3\omega)$.
   γ) $\alpha x(\alpha-4+3x)$.
   δ) $\alpha\beta\gamma(\beta-\gamma-1)$.
   ε) $2\alpha x(3x-2xy+4y^2)$.
   στ) $5x^2y^3(x+2-3xy)$.

2. α) $(\alpha+\beta)(x-y)$.
   β) $(\alpha-\beta)(x-y)$.
   γ) $(x-y)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$.
   δ) $(xy-\omega)(\alpha\beta-2)$.
   ε) $(x-y)(\alpha-2)$.
   στ) $(x-2)(x-5)$.

3. α) $2(\alpha-\beta)(\alpha-\beta+2)$.
   β) $2(\alpha+\beta)(x-2)$.
   γ) $(x-y)(\alpha+\beta)$.
   δ) $3(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-2)$.

4. α) Προσοχή, είναι: $(2-x)^2=(x-2)^2$.
   Άρα:
   $$x^2(x-2)+x(2-x)^2=x^2(x-2)+x(x-2)^2=$$
   $$=x(x-2)\left[(x+(x-2)\right]=x(x-2)(2x-2)=$$
   $$=2x(x-2)(x-1).$$
   β) $(x-y)(\alpha+\beta-x+y)$.
   γ) $(x-2)^2(\alpha-\beta x+2\beta)$.
   δ) $6(\alpha-\beta)^2(\alpha-\beta-2)$.
   ε) $(\alpha+\beta)(x-2)(1-\alpha-\beta)$.
   στ) $(\alpha-\beta)(x-y)$.

5. α) $(x-y)(x+\omega)$.
   β) $(\alpha-1)(\beta+1)$.
   γ) $(x-\omega)(x-y)$.
   δ) $(x+y)(\omega-x)$.
   ε) $(\alpha-1)^2(\alpha+1)$.
   στ) $(y-\omega)(x-y+\omega)$.

6. α) $(x-1)(x-2)$.
   β) $(x+y)(\alpha+\beta)$.
   γ) $x^2(x-1)-4(x-1)=(x-1)(x-2)(x+2)$.
   δ) $x^2(x-5)-4(x-5)=\ldots=(x-5)(x-2)(x+2)$.
   ε) $2(\alpha-4x)-x(\alpha-4x)=(\alpha-4x)(2-x)$.
   στ) $5(2\beta-\alpha)-9\beta(2\beta-\alpha)=(2\beta-\alpha)(5-9\beta)$.

7. α) $(x+y)(\alpha+\beta-\gamma)$.
   β) $(\alpha-1)(3-\alpha)$.
   γ) $(x-3)(y-2\omega)$.

δ) $(x+y)(\alpha-\beta-\gamma)$.
ε) $(x-y)(\alpha+\beta)$.
στ) $(\beta-1)(\alpha-1)$.

8. α) $(x-4)(x+4)$.
β) $(2y-3)(2y+3)$.
γ) $(\beta-1)(\beta+1)(\beta^2+1)$.
δ) $(2\alpha\beta-5)(2\alpha\beta+5)$.
ε) $3(x-2)(x+2)$.
στ) $-5(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)$.

9. α) $(3x)^2-(2y)^2=(3x-2y)(3x+2y)$.
β) $(5x)^2-3^2=(5x-3)(5x+3)$.
γ) $(2xy^2)^2-1^2=(2xy^2-1)(2xy^2+1)$.
δ) $(x^2)^2-4^2=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$.
ε) $(x-1)^2-2^2=(x-1-2)(x-1+2)=(x-3)(x+1)$.
στ) $\left[2(y-2)\right]^2-(3y)^2=(2y-4-3y)(2y-4+3y)=$
$=-(y+4)(5y-4)$.

10. α) $2(x^2-9)=2(x-3)(x+3)$.
β) $3(y^4-1)=3(y^2-1)(y^2+1)=3(y-1)(y+1)(y^2+1)$.
γ) $\alpha(\beta^2-\gamma^2)=\alpha(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)$.
δ) $2(4x^2-25y^2)=2(2x-5y)(2x+5y)$.
ε) $2\alpha(\alpha^2-1)=2\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)$.
στ) $3(y^4-\omega^4)=3(y^2-\omega^2)(y^2+\omega^2)=$
$=3(y-\omega)(y+\omega)(y^2+\omega^2)$.

11. α) $A=(2x+3y)^2$.
β) $B=(3\alpha^2-2\beta^3)^2$.

12. α) $A=x^2-x-3x+3=$
$=x(x-1)-3(x-1)=(x-1)(x-3)$.
β) $B=y^2+4y-5=y^2+5y-y-5=$
$=y(y+5)-(y+5)=(y+5)(y-1)$.
γ) $\Gamma=\alpha^2-\alpha-6=\alpha^2-3\alpha+2\alpha-6=$
$=\alpha(\alpha-3)+2(\alpha-3)=(\alpha-3)(\alpha+2)$.
δ) $\Delta=\beta^2+2\beta-8=\beta^2+4\beta-2\beta-8=$
$=\beta(\beta+4)-2(\beta+4)=(\beta+4)(\beta-2)$.
Μπορείτε φυσικά να χρησιμοποιήσετε και τον τύπο:
$x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)$.

13. α) $(\alpha-1)^3$.
β) $(y^2+1)^3$.
γ) $\left[(x+1)+1\right]^3=(x+2)^3$.
δ) $\left[(\alpha+2)-1\right]^3=(\alpha+1)^3$.

14. α) $(\alpha-\beta)^2-(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1)$.
β) $(x+y)^2-2(x+y)=(x+y)(x+y-2)$.

γ) $(x+\alpha)^2-y^2=(x+\alpha-y)(x+\alpha+y)$.

δ) $(x-y)^2-\omega^2=(x-y-\omega)(x-y+\omega)$.

ε) $x^2-(y^2+6y+9)=x^2-(y+3)^2=$

$=(x-y-3)(x+y+3)$.

στ) $3^2-(\alpha-\beta)^2=(3-\alpha+\beta)(3+\alpha-\beta)$.

15. α) $(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)-(x^2+4x+4)=$

$=(\alpha-\beta)^2-(x+2)^2=$

$=(\alpha-\beta-x-2)(\alpha-\beta+x+2)$

β) $(\alpha-\beta)^2-(x-2)^2=$

$=(\alpha-\beta-x+2)(\alpha-\beta+x-2)$.

γ) $\alpha^2(4-4\alpha+\alpha^2)=\alpha^2(2-\alpha)^2$.

δ) $(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)+2(\alpha-1)(\alpha+1)+$

$+(\alpha+1)^2=(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1+2\alpha-2+\alpha+1)=$

$=(\alpha+1)(\alpha^2+2\alpha)=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)$.

ε) $(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)-2(\alpha-1)(\alpha+1)-$

$-(\alpha-1)^2=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1-2\alpha-2-\alpha+1)=$

$=(\alpha-1)(\alpha^2-2\alpha)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$.

στ) $x(x^2-2x+1)-y(x-1)=x(x-1)^2-$

$-y(x-1)=(x-1)(x^2-x-y)$.

16. α) $\alpha^2-(\beta-\gamma)^2=(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$. .

β) $(x+2)^2-y^2=(x+2-y)(x+2+y)$.

γ) $(x-y)(x+y)-6(x-y)=(x-y)(x+y-6)$.

δ) $(x-y)(x+y)-(x+y)=(x+y)(x-y-1)$.

ε) $\alpha^4(\alpha+1)-(\alpha+1)=\ldots=(\alpha+1)^2(\alpha-1)(\alpha^2+1)$.

στ) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)$.

ζ) $(x+1)(x+3)+\alpha(x+3)=(x+3)(x+1+\alpha)$.

η) $\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2\beta^2-9\alpha^2\beta^2=(\alpha^2-\beta^2)^2-(3\alpha\beta)^2=$

$=(\alpha^2-\beta^2-3\alpha\beta)(\alpha^2-\beta^2+3\alpha\beta)$.

θ) $x^4-6x^2+9-9x^2=(x^2-3)^2-(3x)^2=$

$=(x^2-3-3x)(x^2-3+3x)$.

1.3 Ασκήσεις για διαγωνισμούς

Παραγοντοποίηση παραστάσεων

1. Να κάνετε γινόμενο τις παραστάσεις:

α) $A=x^4+x^2+1$, **β)** $B=x^5+x+1$.

2. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $A=x^4+4$, **β)** $B=x^4+x^2y^2+y^4$.

3. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $A=(x^2+x+2)^2-x^3$, **β)** $B=(1+x-x^2+x^3)^2+x^3$.

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A=\alpha^2(\gamma^4+1)-(\alpha^4+1)\gamma^2$, **β)** $B=(\alpha^4+\beta^4)\gamma^2-\alpha^2\beta^2(1+\gamma^4)$.

5. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $A=\alpha^2\beta^2(x^2+y^2)+xy(\alpha^4+\beta^4)$, **β)** $B=\alpha^2\beta^2(x^2+y^2)-xy(\alpha^4+\beta^4)$.

6. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $A=4(\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta\gamma\delta+\gamma^2\delta^2)-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2$,

β) $B=\alpha\beta\gamma-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma-1$.

7. Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ, με $\hat{A}=90^o$, να κάνετε γινόμενο τις παραστάσεις:

α) $A=\alpha^2+\gamma^2+\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma$, **β)** $A=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.

8. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A=\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha-\alpha\beta^2-\beta\gamma^2-\gamma\alpha^2$,

β) $B=\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)+3\alpha\beta\gamma$,

γ) $\Gamma=\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\gamma$,

δ) $\Delta=\alpha(x+y)+\beta(y+\omega)+\gamma(\omega+x)+\beta x+\gamma y+\alpha\omega$.

Υποδείξεις στη λύση των ασκήσεων

1. α) Επειδή: $x^4+2x^2+1=(x^2)^2+2x^2+1=(x^2+1)^2$, σκεφτόμαστε να γράψουμε $x^2=2x^2-x^2$. Έτσι:

$$A=x^4+x^2+1=x^4+(2x^2-x^2)+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=$$
$$=(x^2+1-x)(x^2+1+x)=(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

β) Το ερώτημα αυτό είναι ιδιαίτερα δύσκολο, διότι απαιτεί τέχνασμα. Είναι λοιπόν:

$$B=x^5+x+1=x^5-x^2+x^2+x+1=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$$
$$=(x^2+x+1)\left[x^2(x-1)+1\right]==(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)\ .$$

2. α) Το ερώτημα αυτό, όπως και το επόμενο, δεν πρέπει σε καμία περίπτωση να απογοητεύσει το μαθητή, επειδή λύνεται με τέχνασμα. Είναι ωστόσο σίγουρο ότι, μετά τη μελέτη του, ο μαθητής θα μπορεί να λύνει και μόνος του ανάλογες ασκήσεις.

Είναι $A=x^4+4=(x^2)+2^2$. Για το άθροισμα τετραγώνων δεν υπάρχει μέθοδος (τύπος). Παρατηρούμε όμως ότι αν είχαμε και τον όρο $2x^2\cdot 2=4x^2$, τότε το Α θα ήταν τέλειο τετράγωνο. Επομένως προσθέτουμε και αφαιρούμε τον όρο $4x^2$ και παίρνουμε:

$$A=x^4+4=\underbrace{(x^2)^2+2^2+4x^2}_{(x^2+2)^2}-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=$$
$$=(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)\,.$$

β) Είναι $x^4=(x^2)^2$, $y^4=(y^2)^2$ και έτσι:

$$B=x^4+x^2y^2+y^4=(x^2)^2+x^2y^2+(y^2)^2=$$

Αν αντί για x^2y^2 είχαμε $2x^2y^2$, τότε η παράσταση Β θα ήταν τέλειο τετράγωνο και συγκεκριμένα η $(x^2+y^2)^2$. Αν λοιπόν γράψουμε $x^2y^2=2x^2y^2-x^2y^2$ (δηλαδή αν προσθέσουμε και αφαιρέσουμε το x^2y^2), θα είναι:

$$B=x^4+x^2y^2+y^4=(x^2)^2+2x^2y^2-x^2y^2+(y^2)^2=\underbrace{(x^2)^2+2x^2y^2+(y^2)^2}_{(x^2+y^2)^2}-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=$$
$$=(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)=(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)\,.$$

3. α) $A=(x^2+x+2)^2-x^3=(x^2+x+2)^2-1^2+1^2-x^3=(x^2+x+2-1)(x^2+x+2+1)+(1-x^3)=$
$=(x^2+x+1)(x^2+x+3)+(1-x)(1+x+x^2)=(x^2+x+1)(x^2+x+3+1-x)=$
$=(x^2+x+1)(x^2+4)$.

β) $B=(1+x-x^2+x^3)^2-1^2+1^2+x^3=(1+x-x^2+x^3-1)(1+x-x^2+x^3+1)+(1+x^3)=$
$=(x-x^2+x^3)(2+x-x^2+x^3)+(1+x)(1-x+x^2)=x(1-x+x^2)(2+x-x^2+x^3)+(1+x)(1-x+x^2)=$
$=(1-x+x^2)[x(2+x-x^2+x^3)+(1+x)]=(1-x+x^2)(2x+x^2-x^3+x^4+1+x)=$
$=(1-x+x^2)(1+3x+x^2-x^3+x^4)$.

4. α) $A=\alpha^2\gamma^4+\alpha^2-\alpha^4\gamma^2-\gamma^2==\alpha^2\gamma^2(\gamma^2-\alpha^2)+(\alpha^2-\gamma^2)==\alpha^2\gamma^2(\gamma^2-\alpha^2)-(\gamma^2-\alpha^2)=$

$=(\gamma^2-\alpha^2)(\alpha^2\gamma^2-1)==(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha)(\alpha\gamma-1)(\alpha\gamma+1)$.

β) $B=\alpha^4\gamma^2+\beta^4\gamma^2-\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^4=\alpha^2\gamma^2(\alpha^2-\beta^2\gamma^2)+\beta^2(\beta^2\gamma^2-\alpha^2)=$
$=(\alpha^2-\beta^2\gamma^2)(\alpha^2\gamma^2-\beta^2)=(\alpha-\beta\gamma)(\alpha+\beta\gamma)(\alpha\gamma-\beta)(\alpha\gamma+\beta)$.

5. α) Είναι:

$A=\alpha^2\beta^2x^2+\alpha^2\beta^2y^2+xy\alpha^4+xy\beta^4=(\alpha^2\beta^2x^2+xy\alpha^4)+(\alpha^2\beta^2y^2+xy\beta^4)=\alpha^2x(\beta^2x+y\alpha^2)+\beta^2y(\alpha^2y+x\beta^2)=$
$=(\beta^2x+y\alpha^2)(\alpha^2x+\beta^2y)=(\alpha^2x+\beta^2y)(\alpha^2y+\beta^2x)$

β) $B=\alpha^2\beta^2x^2+\alpha^2\beta^2y^2-xy\alpha^4-xy\beta^4=(\alpha^2\beta^2x^2-xy\alpha^4)+(\alpha^2\beta^2y^2-xy\beta^4)=$
$=\alpha^2x(\beta^2x-y\alpha^2)+\beta^2y(\alpha^2y-x\beta^2)=\alpha^2x(\beta^2x-y\alpha^2)-\beta^2y(\beta^2x-y\alpha^2)=(\beta^2x-y\alpha^2)(\alpha^2x-\beta^2y)$.

6. α) Επειδή:

$$\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta\gamma\delta+\gamma^2\delta^2=(\alpha\beta+\gamma\delta)^2\,,$$

είναι:

$A=4(\alpha\beta+\gamma\delta)^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2=\left[2(\alpha\beta+\gamma\delta)\right]^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2=$
$=\left[2(\alpha\beta+\gamma\delta)-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)\right]\cdot\left[2(\alpha\beta+\gamma\delta)+(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)\right]=$

$=(2\alpha\beta+2\gamma\delta-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+\delta^2)\cdot(2\alpha\beta+2\gamma\delta+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)=$

$=\left[(2\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2)+(2\gamma\delta+\gamma^2+\delta^2)\right]\cdot\left[(2\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2)+(2\gamma\delta-\gamma^2-\delta^2)\right]=$

$=\left[-(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)+(\gamma+\delta)^2\right]\cdot\ \cdot\left[(\alpha+\beta)^2-(\gamma^2+\delta^2-2\gamma\delta)\right]=$

$=\left[(\gamma+\delta)^2-(\alpha-\beta)^2\right]\cdot\left[(\alpha+\beta)^2-(\gamma-\delta)^2\right]=$

$=(\gamma+\delta-\alpha+\beta)(\gamma+\delta+\alpha-\beta)\cdot$

$\cdot(\alpha+\beta-\gamma+\delta)(\alpha+\beta+\gamma-\delta)$.

β) Θα σχηματίσουμε δύο ομάδες τεσσάρων όρων. Έτσι:

$B=\alpha\beta\gamma-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma-1=(\alpha\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma+\alpha)-\beta\gamma+\beta+\gamma-1=$

$=\alpha(\beta\gamma-\beta-\gamma+1)-(\beta\gamma-\beta-\gamma+1)=(\beta\gamma-\beta-\gamma+1)(\alpha-1)=$

$=\left[(\beta(\gamma-1)-(\gamma-1)\right](\alpha-1)=(\gamma-1)(\beta-1)(\alpha-1)=(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$.

Άλλος τρόπος

Επειδή $\alpha\beta\gamma-\alpha\beta=\alpha\beta(\gamma-1)$ ομαδοποιούμε με οδηγό τη δημιουργία κοινού παράγοντα του $\gamma-1$. Έτσι:

$B=(\alpha\beta\gamma-\alpha\beta)+(-\beta\gamma+\beta)+(-\gamma\alpha+\alpha)+\gamma-1=\alpha\beta(\gamma-1)-\beta(\gamma-1)-\alpha(\gamma-1)+(\gamma-1)=(\gamma-1)(\alpha\beta-\beta-\alpha+1)=$

$=(\gamma-1)\left[\beta(\alpha-1)-(\alpha-1)\right]=(\gamma-1)(\alpha-1)(\beta-1)$

7. Είναι:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2,\ \ \beta^2=\alpha^2-\gamma^2 \quad (1)$$

$$\gamma^2=\alpha^2-\beta^2 \quad (2).$$

α) $A\overset{(2)}{=\!=}(\alpha^2+\alpha\beta)+(\alpha^2-\beta^2)-\alpha\gamma-\beta\gamma=\alpha(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)-\gamma(\alpha+\beta)=\ldots=(\alpha+\beta)(2\alpha-\beta-\gamma)$.

β) $B=\alpha^3+\beta\beta^2+\gamma^3=(\alpha^3+\gamma^3)+\beta\beta^2\overset{(1)}{=\!=}(\alpha+\gamma)(\alpha^2-\alpha\gamma+\gamma^2)+\beta(\alpha^2-\gamma^2)=(\alpha+\gamma)(\alpha^2-\alpha\gamma+\gamma^2)+\beta(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma)=$

$=(\alpha+\gamma)(\alpha^2-\alpha\gamma+\gamma^2+\alpha\beta-\beta\gamma)=(\alpha+\gamma)A\overset{(\alpha)}{=\!=}(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)(2\alpha-\beta-\gamma)$.

8. α) Είναι:

$A=(\alpha^2\beta-\alpha\beta^2)+(\beta^2\gamma-\gamma\alpha^2)+(\gamma^2\alpha-\beta\gamma^2)=\alpha\beta(\alpha-\beta)+\gamma(\beta^2-\alpha^2)+\gamma^2(\alpha-\beta)=\ldots=(\alpha-\beta)\left[\alpha\beta-\gamma(\beta+\alpha)+\gamma^2\right]=$

$=(\alpha-\beta)(\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma+\gamma^2)=(\alpha-\beta)\left[\beta(\alpha-\gamma)-\gamma(\alpha-\gamma)\right]=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)=-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

β) Είναι:

$B=\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\gamma=(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha\beta\gamma)+(\alpha^2\gamma+\gamma^2\alpha+\alpha\beta\gamma)+(\beta^2\gamma+\gamma^2\beta+\alpha\beta\gamma)=$

$=\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\gamma(\alpha+\gamma+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma+\alpha)=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$.

γ) Έχουμε:

$\Gamma=\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\gamma=(\alpha^2\beta+\beta^2\alpha)+(\alpha^2\gamma+\alpha\beta\gamma)+(\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma)+(\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta)=$

$=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\gamma(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)((\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2)=$

$=(\alpha+\beta)\left[\alpha(\beta+\gamma)+\gamma(\beta+\gamma)\right]=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)$.

δ) Κάνουμε πρώτα τις πράξεις και ομαδοποιούμε.

Απ. $\Delta=(\alpha+\beta+\gamma)(x+y+\omega)$.

Απλοποίηση ρητών παραστάσεων 1

1. Δίνεται η παράσταση $A(x)=x^3-x^2-4x+4$.

α) Να κάνετε γινόμενο την παράσταση Α.
β) Να λύσετε την εξίσωση $A(x)=0$.

2. Να βρείτε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) των παραστάσεων:
α) $\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$, $\alpha^3-\alpha\beta^2$, $\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+\beta^3$,
β) x^2-2x+1, x^3-x, $x(x-2)-x+2$.

3. Δίνεται ο αριθμός $\alpha=(x-2)(x-3)$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται ο αντίστροφος του α;
β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $B=\dfrac{(x^2-2x)(3x-x^2)}{(x-2)(x-3)}$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $B=0$.

4. Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{(x^2-2x)(x+3)}{x^2+3x}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση Α.
β) Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε $A=0$.
γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

5. Δίνονται οι παραστάσεις $A=\dfrac{(1-x^4)(2x-x^2)}{(x^3-4x)(x^3-x)}\cdot\dfrac{x^2+2x}{x^2+1}$ και $B=\dfrac{(x-1)(3-x)-(1-x)(5-x)}{1-x^2}\cdot\dfrac{x+1}{x-4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις Α και Β;
β) Να αποδείξετε ότι $A=1$ και $B=2$.

6. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x}$

β) $\dfrac{2x^2+\alpha x-\alpha^2}{x+\alpha}$

γ) $\dfrac{(x^4-1)(x^2-2x)}{(x^3-4x)(x^3-x)}$

δ) $\dfrac{(x-1)(x-3)-(1-x)(x-5)}{x^2-1}$

7. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$

β) $B=\dfrac{\dfrac{1}{x^2-1}}{1-\dfrac{x+1}{x-\dfrac{1}{x}}}$

Υποδείξεις στη λύση των ασκήσεων

4. Απλοποίηση ρητών παραστάσεων

1. α) $A(x) = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2)$.

β) $A(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -2)$.

2. Όλες οι παραστάσεις πρέπει να γίνουν γινόμενο.

α) $\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha(\alpha+\beta)^2$,

$\alpha^3 - \alpha\beta^2 = \alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$,

$\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \beta(\alpha-\beta)^2$.**Απ.** $\alpha\beta(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2$.

β) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$,

$x^3 - x = x(x-1)(x+1)$,

$x(x-2) - x + 2 = x(x-2) - (x-2) = (x-2)(x-1)$. **Απ.** $x(x-2)(x+1)(x-1)^2$.

3. α) Πρέπει $\alpha \neq 0$. **Απ.** $x \neq 2$ **και** $x \neq 3$.

β) Είναι:

$x^2 - 2x = x(x-2)$ και $3x - x^2 = x(3-x)$. **Απ.** $B = -x^2$.

γ) Είναι $B = 0 \Leftrightarrow -x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. **Απ.** $x = 0$.

4. α) Πρέπει: $x^2 + 3x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+3) \neq 0$. **Απ.** $x \neq 0$ **και** $x \neq -3$.

β) Πρέπει:

$$(x^2-2x)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+3) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -3).$$

Αλλά $x \neq 0$ και $x \neq -3$. **Απ.** $x = 2$.

γ) Είναι $A = x - 2$.

5. α) • Για $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$, $x \neq -2$, $x \neq 2$ η Α.

• Για $x \neq 1$, $x \neq -1$ και $x \neq 4$, η Β.

β) Όλοι οι όροι γίνονται γινόμενο, εκτός του $x^2 + 1$. Ο αριθμητής του Β γίνεται:

$(x-1)(3-x+5-x) = (x-1)(8-2x)$.

6. α) $x - 3$, β) $2x - \alpha$,

γ) $\dfrac{x^2+1}{x(x+2)}$, δ) $\dfrac{2(x-4)}{x+1}$.

7. α) $A = \dfrac{1}{x+y}$, β) $B = -\dfrac{1}{x+1}$.

Απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων 2

1. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A=\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}\right):\dfrac{2y}{x^2-y^2}$,

β) $B=\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+2\beta}+\dfrac{\alpha}{\alpha-2\beta}\right):\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2}$,

γ) $\Gamma=\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)\left(\dfrac{3}{4x}+\dfrac{x}{4}-x\right)$,

δ) $\Delta=\dfrac{\left[\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\right):\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\right]}{\left[\left(\dfrac{1}{\alpha^2}-\dfrac{1}{\beta^2}\right):\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\right)\right]}$,

ε) $E=\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{4x^2}{x^2-y^2}\right)\cdot\dfrac{x^2-2xy+y^2}{4xy}\cdot\dfrac{xy+y^2}{x-y}$.

2. Να μετατρέψετε σε απλά τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα:

α) $A=\dfrac{3\alpha-\beta}{\alpha+\beta+\dfrac{\alpha-\beta}{1+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}}$,

β) $B=\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2+\dfrac{2\beta^2}{1+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}}$.

3. Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\dfrac{2xy}{x+y}-y}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y-2x}}+\dfrac{\dfrac{2xy}{x+y}-x}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x-2y}}=xy$,

β) $\dfrac{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}+2\alpha}{\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}}+\dfrac{2\beta+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}}{\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}}=(\alpha+\beta)^2$.

4. Δίνεται το κλάσμα $A(x)=\dfrac{\dfrac{1}{1-x}-1}{x-\dfrac{1-2x^2}{1-x}+1}$

α) Για ποιες τιμές της μεταβλητής x ορίζεται το κλάσμα;

β) Να αποδείξετε ότι $A(x)=\dfrac{1}{x}$.

5. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α) $A=\dfrac{2\alpha^3+3\alpha^2\beta-2\alpha-3\beta}{2\alpha^2-2\alpha+3\beta(\alpha-1)}$,

β) $B=\dfrac{4\alpha^2x^4-4\alpha x^3+x^2+(2\alpha x-1)^2}{(x^4-1)(2\alpha x-1)^2}$.

Υποδείξεις στη λύση των ασκήσεων

1. α) $A=\dfrac{x}{y}$, β) $B=1$, γ) $\Gamma=3$,

δ) $\Delta=\alpha-\beta$, ε) $E=y-x$.

2. α) $A=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}$. β) $B=\alpha$.

3. Εκτελούμε κατάλληλα τις πράξεις, όπως έχουμε δει και σε άλλες αντίστοιχες περιπτώσεις. α) $A=1$, β) $B=1$.

4. α) Πρέπει $1-x\neq 0$ ή $x\neq 1$ και:

$$x-\frac{1-2x^2}{1-x}+1\neq 0 \quad ή \quad x+1-\frac{1-2x^2}{1-x}\neq 0 \quad ή \quad \frac{(x+1)(1-x)-(1-2x^2)}{1-x}\neq 0 \quad ή$$

$$\frac{1-x^2-1+2x^2}{1-x}\neq 0 \quad ή \quad \frac{x^2}{1-x}\neq 0 \quad ή$$

$$x^2\neq 0 \quad ή \quad x\neq 0 \, .$$

Άρα πρέπει $x\neq 0$ και $x\neq 1$.

β) Αφού $x-\dfrac{1-2x^2}{1-x}+1=\dfrac{x^2}{1-x}$ (το βρήκαμε στο α′ ερώτημα), είναι:

$$A(x)=\frac{\dfrac{1-(1-x)}{1-x}}{\dfrac{x^2}{1-x}}=\frac{\dfrac{x}{1-x}}{\dfrac{x^2}{1-x}}=\frac{x(1-x)}{x^2(1-x)}=\frac{1}{x}\, .$$

5. α) $A=\dfrac{\alpha^2(2\alpha+3\beta)-(2\alpha+3\beta)}{2\alpha(\alpha-1)+3\beta(\alpha-1)}=\dfrac{\cancel{(2\alpha+3\beta)}(\alpha^2-1)}{(\alpha-1)\cancel{(2\alpha+3\beta)}}=\dfrac{\cancel{(\alpha-1)}(\alpha+1)}{\cancel{(\alpha-1)}}=\alpha+1$.

β) $B=\dfrac{x^2(4\alpha^2x^2-4\alpha x+1)+(2\alpha x-1)^2}{(x^2-1)(x^2+1)(2\alpha x-1)^2}=\dfrac{x^2(2\alpha x-1)^2+(2\alpha x-1)^2}{(x^2-1)(x^2+1)(2\alpha x-1)^2}=\dfrac{\cancel{(2\alpha x-1)^2}\,\cancel{(x^2+1)}}{(x^2-1)\cancel{(x^2+1)}\,\cancel{(2\alpha x-1)^2}}=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Βιβλιογραφία

Πέτρος Τόγκας Άλγεβρα 1964

Σπύρος Καννέλος Άλγεβρα Ασκήσεις άλγεβρας Α 1973

Ντζιώρας Ηλίας Β. Μαθηματικά Ε' Γυμνασίου τόμος 1ος (Άλγεβρα) ΟΕΔΒ 1976

Μπάμπης Στεργίου-Νίκος Σκομπρής : Αλγεβρικές ανισότητες, Εκδόσεις Σαββάλας

Μπάμπης Στεργίου : Ολυμπιάδες μαθηματικών Α΄ Λυκείου, Εκδόσεις Σαββάλας

Χαράλαμπος Στεργίου - Σιλουανός Μπραζιτίκος: Μαθηματικοί Διαγωνισμοί, Εκδόσεις Σαββάλας (τόμος 1).

Ιστοσελίδα: mathematica.gr

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.

Τίτλος: Ψηφιακός οδηγός εκπαιδευτικού

Έκδοση: 1.0 Ημερομηνία: 26.04.2024

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

ΕΜΠΝΕΥΣΤΕΣ/ ΟΜΑΔΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ/ ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Κωνσταντίνος Ρεκούμης
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Λάμπρος Κατσάπας
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Νικόλαος Κουμάντος
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Ελένη Ρεκούμη
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03