

Διδακτικό εγχειρίδιο/Οδηγός 1

- Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων
- Απλοποίηση ρητών παραστάσεων

Εισαγωγικό σημείωμα

Στο παρόν διδακτικό εγχειρίδιο παρουσιάζουμε δύο σπουδαίες και βασικές Μαθηματικές διαδικασίες, την παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων και την απλοποίηση ρητών παραστάσεων.

Οι διαδικασίες αυτές είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, αλλά λόγω της κεφαλαιώδους χρησιμότητάς τους, τις παρουσιάζουμε κι εδώ δίνοντας στους/στις μαθητές/τριες την ευκαιρία να εξασκηθούν, ώστε να ανταπεξέρχονται με ευκολία σε τέτοιου είδους προβλήματα.

Περιλαμβάνονται όλων των ειδών οι περιπτώσεις που πρέπει να μπορούν να αντιμετωπίζουν με άνεση, ακρίβεια και ορθότητα μαζί με την απάντησή τους, ώστε να γίνεται ο έλεγχος των λύσεων.

Περιεχόμενα

Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων	5
Υποδείξεις για τη λύση των ασκήσεων	11
Απλοποίηση ρητών παραστάσεων	14
Υποδείξεις για τη λύση των ασκήσεων	16

Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

Παραγοντοποίηση λέγεται η διαδικασία, με την οποία μια παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο.

Για την παραγοντοποίηση ενός αθροίσματος ή γενικότερα μιας παράστασης χρησιμοποιούμε ορισμένες βασικές τεχνικές, αλλά συχνά μικτή στρατηγική ή διάφορα αλγεβρικά τεχνάσματα.

Οι βασικότερες τεχνικές για την παραγοντοποίηση παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Πίνακας 1

Μέθοδοι παραγοντοποίησης

- **Η μέθοδος του κοινού παράγοντα. Βασίζεται στην επιμεριστική ιδιότητα:**

$$xy + xz = x(y + z).$$

Ασκήσεις 1,2,3,4

- **Η μέθοδος της ομαδοποίησης ή κατά ομάδες:**

$$\overbrace{\alpha^2 + \alpha\beta} + \overbrace{\beta\gamma + \gamma\alpha} = \alpha(\alpha + \beta) + \gamma(\beta + \alpha) = (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma).$$

Ασκήσεις 5, 6,7

- **Η μέθοδος των ταυτοτήτων:**

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta),$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

Ασκήσεις 8, 9, 10

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2),$$

$$\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha \pm \beta)^2$$

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$$

$$x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x + \alpha\beta\gamma = (x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma)$$

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3, \quad \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma, \text{ όταν } \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

- **Η μέθοδος του τριωνύμου**

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$), τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

Θυμίζουμε ότι $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης.

Άσκηση 12

Γενικές ασκήσεις 11, 13, 14, 15, 16

Ασκήσεις

1. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $\alpha x - \alpha y - \alpha \omega$,

β) $\alpha^2 x - 2\alpha^2 y + 3\alpha^2 \omega$,

$$\gamma) \alpha^2 x - 4\alpha x + 3\alpha x^2,$$

$$\delta) \alpha\beta^2\gamma - \alpha\beta\gamma^2 - \alpha\beta\gamma,$$

$$\epsilon) 6\alpha x^2 - 4\alpha x^2 y + 8\alpha xy^2,$$

$$\sigma\tau) 5x^3 y^3 + 10x^2 y^3 - 15x^3 y^4.$$

2. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

$$\alpha) (\alpha + \beta)x - (\alpha + \beta)y,$$

$$\beta) (\alpha - \beta)x + (\beta - \alpha)y,$$

$$\gamma) (x - y)\alpha^2 + \beta^2(y - x),$$

$$\delta) \alpha\beta(xy - \omega) + 2(\omega - xy),$$

$$\epsilon) \alpha(x - y) - 2x + 2y,$$

$$\sigma\tau) (x - 2)^2 - 3x + 6.$$

3. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

$$\alpha) 2(\alpha - \beta)^2 + 4(\alpha - \beta),$$

$$\beta) 2x(\alpha + \beta) - 4(\beta + \alpha),$$

$$\gamma) \alpha(x - y) - \beta(y - x),$$

$$\delta) 3(\alpha - \beta)^2 + 6(\beta - \alpha).$$

4. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

$$\alpha) x^2(x - 2) + x(2 - x)^2,$$

$$\beta) (\alpha + \beta)(x - y) - (y - x)^2,$$

$$\gamma) \alpha(x-2)^2 + \beta(2-x)^3,$$

$$\delta) 6(\alpha-\beta)^3 - 12(\beta-\alpha)^2,$$

$$\epsilon) (x-2)(\alpha+\beta) + (2-x)(\alpha+\beta)^2,$$

$$\sigma\tau) (2x+y)(\alpha-\beta) + (\beta-\alpha)(x+2y).$$

5. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

$$\alpha) x^2 - xy + \omega x - y\omega,$$

$$\beta) \alpha\beta - 1 + \alpha - \beta,$$

$$\gamma) x^2 + y\omega - xy - x\omega,$$

$$\delta) y\omega - x^2 - xy + x\omega,$$

$$\epsilon) \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1,$$

$$\sigma\tau) xy - x\omega - (\omega - y)^2.$$

6. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

$$\alpha) x(x-1) - 2x + 2,$$

$$\beta) \alpha(x+y) + \beta y + \beta x,$$

$$\gamma) x^3 - x^2 - 4x + 4,$$

$$\delta) x^3 - 5x^2 - 4x + 20,$$

$$\epsilon) 2\alpha - 8x - \alpha x + 4x^2,$$

$$\sigma\tau) 10\beta - 5\alpha - 18\beta^2 + 9\alpha\beta.$$

7. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

$$\alpha) (\alpha + \beta)(x + y) - \gamma x - \gamma y,$$

β) $2\alpha - 2 - (1 - \alpha)^2$,

γ) $xy - 3y - 2x\omega + 6\omega$,

δ) $(\alpha - \beta)(x + y) - \gamma x - \gamma y$,

ε) $\alpha(x - y) - \beta y + \beta x$,

στ) $\alpha\beta - \alpha - \beta + 1$.

8. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x^2 - 16$,

β) $4y^2 - 9$,

γ) $\beta^4 - 1$,

δ) $4\alpha^2\beta^2 - 25$,

ε) $3x^2 - 12$,

στ) $-5\alpha^2 + 20\beta^2$.

9. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $9x^2 - 4y^2$,

β) $25x^2 - 9$,

γ) $4x^2y^4 - 1$,

δ) $x^4 - 16$,

ε) $(x - 1)^2 - 4$,

στ) $4(y - 2)^2 - 9y^2$.

10. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2x^2 - 18,$

β) $3y^4 - 3,$

γ) $\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2,$

δ) $8x^2 - 50y^2,$

ε) $2\alpha^3 - 2\alpha,$

στ) $3y^4 - 3\omega^4.$

11. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

α) $A = 4x^2 + 12xy + 9y^2,$

β) $B = 9\alpha^4 - 12\alpha^2\beta^3 + 4\beta^6.$

12. Να κάνετε γινόμενα τα τριώνυμα:

α) $A = x^2 - 4x + 3,$

β) $B = y^2 + 4y - 5$

γ) $\Gamma = \alpha^2 - \alpha - 6,$

δ) $\Delta = \beta^2 + 2\beta - 8.$

13. Να κάνετε γινόμενα τις περιπτώσεις:

α) $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1,$

β) $y^6 + 3y^4 + 3y^2 + 1,$

γ) $(x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1,$

$$\delta) (\alpha+2)^3 - 3(\alpha+2)^2 + 3(\alpha+2) - 1.$$

14. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha + \beta,$$

$$\beta) x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y,$$

$$\gamma) x^2 - y^2 + 2\alpha x + \alpha^2,$$

$$\delta) x^2 - 2xy + y^2 - \omega^2,$$

$$\epsilon) x^2 - y^2 - 6y - 9,$$

$$\sigma\tau) 9 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2.$$

15. Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις:

$$\alpha) \alpha^2 - x^2 + \beta^2 - 4 - 2\alpha\beta - 4x,$$

$$\beta) \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - x^2 + 4x - 4,$$

$$\gamma) 4\alpha^2 - 4\alpha^3 + \alpha^4,$$

$$\delta) \alpha^3 + 1 + 2(\alpha^2 - 1) + (\alpha + 1)^2,$$

$$\epsilon) \alpha^3 - 1 - 2(\alpha^2 - 1) - (\alpha - 1)^2,$$

$$\sigma\tau) x^3 - 2x^2 + x - xy + y.$$

16. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \alpha^2 - \beta^2 + 2\beta\gamma - \gamma^2,$$

$$\beta) x^2 - y^2 + 4x + 4,$$

$$\gamma) x^2 - y^2 - 6x + 6y,$$

$$\delta) x^2 - x - y^2 - y,$$

$$\epsilon) \alpha^5 + \alpha^4 - \alpha - 1,$$

$$\sigma\tau) \alpha^2 - \beta^2 - \alpha + \beta$$

$$\zeta) x^2 + 4x + 3 + \alpha x + 3\alpha,$$

$$\eta) \alpha^4 + \beta^4 - 11\alpha^2\beta^2,$$

$$\theta) x^4 - 15x^2 + 9.$$

Υποδείξεις στη λύση των ασκήσεων

1. α) $\alpha(x - y - \omega).$

β) $\alpha^2(x - 2y + 3\omega).$

γ) $\alpha x(\alpha - 4 + 3x).$

δ) $\alpha\beta\gamma(\beta - \gamma - 1).$

ε) $2\alpha x(3x - 2xy + 4y^2).$

στ) $5x^2y^3(x + 2 - 3xy).$

2. α) $(\alpha + \beta)(x - y).$

β) $(\alpha - \beta)(x - y).$

γ) $(x - y)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta).$

δ) $(xy - \omega)(\alpha\beta - 2).$

ε) $(x - y)(\alpha - 2).$

στ) $(x - 2)(x - 5).$

3. α) $2(\alpha - \beta)(\alpha - \beta + 2)$.

β) $2(\alpha + \beta)(x - 2)$.

γ) $(x - y)(\alpha + \beta)$.

δ) $3(\alpha - \beta)(\alpha - \beta - 2)$.

4. α) Προσοχή, είναι: $(2 - x)^2 = (x - 2)^2$.

Άρα:

$$\begin{aligned}x^2(x-2) + x(2-x)^2 &= x^2(x-2) + x(x-2)^2 = \\ &= x(x-2)[x + (x-2)] = x(x-2)(2x-2) = \\ &= 2x(x-2)(x-1).\end{aligned}$$

β) $(x - y)(\alpha + \beta - x + y)$.

γ) $(x - 2)^2(\alpha - \beta x + 2\beta)$.

δ) $6(\alpha - \beta)^2(\alpha - \beta - 2)$.

ε) $(\alpha + \beta)(x - 2)(1 - \alpha - \beta)$.

στ) $(\alpha - \beta)(x - y)$.

5. α) $(x - y)(x + \omega)$.

β) $(\alpha - 1)(\beta + 1)$.

γ) $(x - \omega)(x - y)$.

δ) $(x + y)(\omega - x)$.

ε) $(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)$.

στ) $(y - \omega)(x - y + \omega)$.

6. α) $(x-1)(x-2)$.

β) $(x+y)(\alpha+\beta)$.

γ) $x^2(x-1)-4(x-1)=(x-1)(x-2)(x+2)$.

δ) $x^2(x-5)-4(x-5)=\dots=(x-5)(x-2)(x+2)$

ε) $2(\alpha-4x)-x(\alpha-4x)=(\alpha-4x)(2-x)$.

στ) $5(2\beta-\alpha)-9\beta(2\beta-\alpha)=(2\beta-\alpha)(5-9\beta)$.

7. α) $(x+y)(\alpha+\beta-\gamma)$.

β) $(\alpha-1)(3-\alpha)$.

γ) $(x-3)(y-2\omega)$.

δ) $(x+y)(\alpha-\beta-\gamma)$.

ε) $(x-y)(\alpha+\beta)$.

στ) $(\beta-1)(\alpha-1)$.

8. α) $(x-4)(x+4)$.

β) $(2y-3)(2y+3)$.

γ) $(\beta-1)(\beta+1)(\beta^2+1)$.

δ) $(2\alpha\beta-5)(2\alpha\beta+5)$.

ε) $3(x-2)(x+2)$.

στ) $-5(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)$.

9. α) $(3x)^2-(2y)^2=(3x-2y)(3x+2y)$.

β) $(5x)^2-3^2=(5x-3)(5x+3)$.

γ) $(2xy^2)^2-1^2=(2xy^2-1)(2xy^2+1)$.

δ) $(x^2)^2-4^2=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$.

$$\varepsilon) (x-1)^2 - 2^2 = (x-1-2)(x-1+2) = (x-3)(x+1).$$

$$\sigma\tau) [2(y-2)]^2 - (3y)^2 = (2y-4-3y)(2y-4+3y) = -(y+4)(5y-4).$$

10. α) $2(x^2 - 9) = 2(x-3)(x+3).$

β) $3(y^4 - 1) = 3(y^2 - 1)(y^2 + 1) = 3(y-1)(y+1)(y^2 + 1).$

γ) $\alpha(\beta^2 - \gamma^2) = \alpha(\beta - \gamma)(\beta + \gamma).$

δ) $2(4x^2 - 25y^2) = 2(2x - 5y)(2x + 5y).$

ε) $2\alpha(\alpha^2 - 1) = 2\alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1).$

σ\tau) $3(y^4 - \omega^4) = 3(y^2 - \omega^2)(y^2 + \omega^2) = 3(y - \omega)(y + \omega)(y^2 + \omega^2).$

11. α) $A = (2x + 3y)^2.$

β) $B = (3\alpha^2 - 2\beta^3)^2.$

12. α) $A = x^2 - x - 3x + 3 =$
 $= x(x-1) - 3(x-1) = (x-1)(x-3).$

β) $B = y^2 + 4y - 5 = y^2 + 5y - y - 5 =$
 $= y(y+5) - (y+5) = (y+5)(y-1).$

γ) $\Gamma = \alpha^2 - \alpha - 6 = \alpha^2 - 3\alpha + 2\alpha - 6 =$
 $= \alpha(\alpha-3) + 2(\alpha-3) = (\alpha-3)(\alpha+2).$

δ) $\Delta = \beta^2 + 2\beta - 8 = \beta^2 + 4\beta - 2\beta - 8 =$
 $= \beta(\beta+4) - 2(\beta+4) = (\beta+4)(\beta-2).$

Μπορείτε φυσικά να χρησιμοποιήσετε και τον τύπο:

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta).$$

13. α) $(\alpha - 1)^3$.

β) $(y^2 + 1)^3$.

γ) $[(x+1)+1]^3 = (x+2)^3$.

δ) $[(\alpha+2)-1]^3 = (\alpha+1)^3$.

14. α) $(\alpha - \beta)^2 - (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta - 1)$.

β) $(x+y)^2 - 2(x+y) = (x+y)(x+y-2)$.

γ) $(x+\alpha)^2 - y^2 = (x+\alpha-y)(x+\alpha+y)$.

δ) $(x-y)^2 - \omega^2 = (x-y-\omega)(x-y+\omega)$.

ε) $x^2 - (y^2 + 6y + 9) = x^2 - (y+3)^2 = (x-y-3)(x+y+3)$.

στ) $3^2 - (\alpha - \beta)^2 = (3 - \alpha + \beta)(3 + \alpha - \beta)$.

15. α) $(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) - (x^2 + 4x + 4) =$

$$= (\alpha - \beta)^2 - (x+2)^2 =$$

$$= (\alpha - \beta - x - 2)(\alpha - \beta + x + 2)$$

β) $(\alpha - \beta)^2 - (x-2)^2 =$

$$= (\alpha - \beta - x + 2)(\alpha - \beta + x - 2).$$

γ) $\alpha^2(4 - 4\alpha + \alpha^2) = \alpha^2(2 - \alpha)^2$.

δ) $(\alpha+1)(\alpha^2 - \alpha + 1) + 2(\alpha-1)(\alpha+1) + (\alpha+1)^2 =$

$$= (\alpha+1)(\alpha^2 - \alpha + 1 + 2\alpha - 2 + \alpha + 1) =$$

$$= (\alpha+1)(\alpha^2 + 2\alpha) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2).$$

ε) $(\alpha-1)(\alpha^2 + \alpha + 1) - 2(\alpha-1)(\alpha+1) - (\alpha-1)^2 =$

$$\begin{aligned}
 &= (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1 - 2\alpha - 2 - \alpha + 1) = \\
 &= (\alpha - 1)(\alpha^2 - 2\alpha) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2).
 \end{aligned}$$

$$\sigma\tau) \ x(x^2 - 2x + 1) - y(x - 1) = x(x - 1)^2 - y(x - 1) = (x - 1)(x^2 - x - y).$$

16. α) $\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2 = (\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma).$

β) $(x + 2)^2 - y^2 = (x + 2 - y)(x + 2 + y).$

γ) $(x - y)(x + y) - 6(x - y) = (x - y)(x + y - 6).$

δ) $(x - y)(x + y) - (x + y) = (x + y)(x - y - 1).$

ε) $\alpha^4(\alpha + 1) - (\alpha + 1) = \dots = (\alpha + 1)^2(\alpha - 1)(\alpha^2 + 1).$

στ) $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1).$

ζ) $(x + 1)(x + 3) + \alpha(x + 3) = (x + 3)(x + 1 + \alpha).$

η) $\alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 9\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2 - (3\alpha\beta)^2 =$
 $= (\alpha^2 - \beta^2 - 3\alpha\beta)(\alpha^2 - \beta^2 + 3\alpha\beta).$

θ) $x^4 - 6x^2 + 9 - 9x^2 = (x^2 - 3)^2 - (3x)^2 = (x^2 - 3x - 3)(x^2 + 3x - 3).$

Απλοποίηση ρητών παραστάσεων

Πίνακας 2

Τα βασικά βήματα για να απλοποιήσουμε μια ρητή παράσταση

Για να απλοποιήσουμε μια ρητή αλγεβρική παράσταση εργαζόμαστε ως εξής:

- παραγοντοποιούμε τον αριθμητή,
- παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή και
- διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες αριθμητή και παρονομαστή.

Ασκήσεις

1. Δίνεται η παράσταση $A(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

α) Να κάνετε γινόμενο την παράσταση A.

β) Να λύσετε την εξίσωση $A(x) = 0$.

2. Να βρείτε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) των παραστάσεων:

α) $\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$, $\alpha^3 - \alpha\beta^2$, $\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \beta^3$,

β) $x^2 - 2x + 1$, $x^3 - x$, $x(x-2) - x + 2$.

3. Δίνεται ο αριθμός $\alpha = (x-2)(x-3)$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται ο αντίστροφος του α ;

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $B = \frac{(x^2 - 2x)(3x - x^2)}{(x-2)(x-3)}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $B = 0$.

4. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^2 - 2x)(x+3)}{x^2 + 3x}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A .

β) Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε $A = 0$.

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

5. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{(1-x^4)(2x-x^2)}{(x^3-4x)(x^3-x)} \cdot \frac{x^2+2x}{x^2+1}$$

και

$$B = \frac{(x-1)(3-x) - (1-x)(5-x)}{1-x^2} \cdot \frac{x+1}{x-4}$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις A και B ;

β) Να αποδείξετε ότι $A = 1$ και $B = 2$.

6. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x}$

$$\beta) \frac{2x^2 + \alpha x - \alpha^2}{x + \alpha}$$

$$\gamma) \frac{(x^4 - 1)(x^2 - 2x)}{(x^3 - 4x)(x^3 - x)}$$

$$\delta) \frac{(x-1)(x-3) - (1-x)(x-5)}{x^2 - 1}$$

7. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) A = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^4 - y^4}$$

$$\beta) B = \frac{\frac{1}{x^2 - 1}}{1 - \frac{x+1}{x - \frac{1}{x}}}$$

Υποδείξεις - απαντήσεις στη λύση των ασκήσεων

1. α) $A(x) = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2 - 4) = (x-1)(x-2)(x+2)$.

β) $A(x) = 0 \Leftrightarrow (x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-2)$.

2. Όλες οι παραστάσεις πρέπει να γίνουν γινόμενο.

α) $\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha(\alpha + \beta)^2$,

$\alpha^3 - \alpha\beta^2 = \alpha(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$,

$\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \beta(\alpha - \beta)^2$

Απ. $\alpha\beta(\alpha + \beta)^2(\alpha - \beta)^2$.

β) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$,

$x^3 - x = x(x-1)(x+1)$,

$x(x-2) - x + 2 = x(x-2) - (x-2) = (x-2)(x-1)$.

Απ. $x(x-2)(x+1)(x-1)^2$.

3. α) Πρέπει $\alpha \neq 0$.

Απ. $x \neq 2$ και $x \neq 3$.

β) Είναι:

$x^2 - 2x = x(x-2)$ και $3x - x^2 = x(3-x)$.

Απ. $B = -x^2$.

γ) Είναι $B=0 \Leftrightarrow -x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

Απ. $x=0$.

4. α) Πρέπει: $x^2 + 3x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+3) \neq 0$.

Απ. $x \neq 0$ και $x \neq -3$.

β) Πρέπει:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x)(x+3) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x(x-2)(x+3) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x=0 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-3).\end{aligned}$$

Αλλά $x \neq 0$ και $x \neq -3$.

Απ. $x=2$.

γ) Είναι $A = x-2$.

5. α) • Για $x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1, x \neq -2, x \neq 2$ η Α.

• Για $x \neq 1, x \neq -1$ και $x \neq 4$, η Β.

β) Όλοι οι όροι γίνονται γινόμενο, εκτός του $x^2 + 1$. Ο αριθμητής του Β γίνεται:

$$(x-1)(3-x+5-x) = (x-1)(8-2x).$$

6. α) $x-3$,

β) $2x-\alpha$,

γ) $\frac{x^2+1}{x(x+2)}$,

δ) $\frac{2(x-4)}{x+1}$.

7. α) $A = \frac{1}{x+y}$,

β) $B = -\frac{1}{x+1}$.

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων
και Αθλητισμού

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Πρόγραμμα
Ανθρώπινο Δυναμικό και
Κοινωνική Συνοχή

Τίτλος: Διδακτικό εγχειρίδιο-οδηγός στην παραγοντοποίηση

Έκδοση: 1.0 Ημερομηνία: 26.04.2024

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

ΕΜΠΝΕΥΣΤΕΣ/ ΟΜΑΔΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ/ ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Κωνσταντίνος Ρεκούμης

Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03

Λάμπρος Κατσάπας

Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03

Νικόλαος Κουμάντος

Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03

Ελένη Ρεκούμη

Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03



Το παρόν χορηγείται με άδεια Creative Commons
Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση 4.0 Διεθνές (CC BY-NC 4.0).

Με τη συγκεκριμένη άδεια, μπορείτε να:

- Μοιραστείτε — αντιγράψετε και αναδιανείμετε το υλικό με κάθε μέσο και τρόπο
- Προσαρμόσετε — αναμίξετε, τροποποιήσετε και δημιουργήσετε πάνω στο υλικό

Υπό τους ακόλουθους όρους:

- Αναφορά Δημιουργού — Θα πρέπει να καταχωρίσετε αναφορά στον δημιουργό, με σύνδεσμο της άδειας, και με αναφορά αν έχουν γίνει αλλαγές. Μπορείτε να το κάνετε αυτό με οποιονδήποτε εύλογο τρόπο, αλλά όχι με τρόπο που να υπονοεί ότι ο δημιουργός αποδέχεται το έργο σας ή τη χρήση που εσείς κάνετε.
- Μη Εμπορική Χρήση — Δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το υλικό για εμπορικούς σκοπούς.
- Παρόμοια Διανομή — Αν αναμίξετε, τροποποιήσετε, ή δημιουργήσετε πάνω στο υλικό, πρέπει να διανείμετε τις δικές σας συνεισφορές υπό την ίδια άδεια όπως και το πρωτότυπο.

Δεν υπάρχουν πρόσθετοι περιορισμοί — Δεν μπορείτε να εφαρμόσετε νομικούς όρους ή τεχνολογικά μέτρα που να περιορίζουν νομικά τους άλλους από το να κάνουν οτιδήποτε επιτρέπει η άδεια. Ο αδειοδότης δεν μπορεί να ανακαλέσει αυτές τις ελευθερίες όσο εσείς ακολουθείτε τους όρους της άδειας.