Διδακτικό εγχειρίδιο/ Οδηγός 2

Ρίζες πραγματικών αριθμών

- **Ορισμοί**
- **Ιδιότητες**
- **Εφαρμογές – ασκήσεις**

Εισαγωγικό σημείωμα

Το παρακάτω μαθηματικό υλικό απευθύνονται στους/στις μαθητές /τριες για καλύτερη κατανόηση των ριζών, για περαιτέρω έρευνα, εμβάθυνση και μελέτη, ώστε να αναπτύξουν, αν το επιθυμούν, τις μαθηματικές τους δεξιότητες και ικανότητες, πάντα υπό τι πρίσμα ότι «τα αγαθά κόποις κτώνται».

Υπάρχουν ασκήσεις όλων των επιπέδων δυσκολίας.
Ορισμένες από αυτές έχουν θεωρητικό χαρακτήρα και έχουν ως σκοπό τη σύνθεση των βασικών εννοιών με ευρύτερες γνώσεις και από άλλες ενότητες της Άλγεβρας.

Επειδή θεωρούμε ότι δεν υπάρχει τίποτε που να μη μπορεί να εξηγηθεί και να κατανοηθεί, τολμούμε να παρουσιάσουμε στους/στις μαθητές/τριες μας τον παρόντα οδηγό-διδακτικό εγχειρίδιο με την βεβαιότητα ότι μόνο ωφέλεια θα προκύψει αν ενσκήψουν στο περιεχόμενό του με θάρρος, υπομονή, επιμονή και «ανοιχτό μυαλό», αρετές που καλλιεργούνται και αναπτύσσονται με την ενασχόληση με τα Μαθηματικά.

Περιεχόμενα

Ορισμός:

Ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α λέμε τον μη αρνητικό αριθμό x που όταν υψωθεί στην ν-οστη δύναμη δίνει τον α.

Επομένως με $\alpha \geq 0$ και $x \geq 0$ ισχύουν:

- Αν $x^\nu = \alpha$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} = x$ και
- Αν $\sqrt[\nu]{\alpha} = x$ τότε $x^\nu = \alpha$.

Πίνακες με τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών:

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha \quad \text{και} \quad \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha, \text{ με } \alpha \geq 0$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \sqrt[\nu]{|\alpha|^\nu} = |\alpha|, \text{ ν άρτιος}$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha}\,\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}, \text{ με } \alpha, \beta \geq 0$$

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}, \text{ με } \alpha \geq 0 \text{ και } \beta > 0$$

Με την προϋπόθεση ότι οι εμφανιζόμενες παραστάσεις έχουν νόημα ισχύουν ακόμα:

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\kappa} = \sqrt[\nu]{\alpha_1}\,\sqrt[\nu]{\alpha_2} \ldots \sqrt[\nu]{\alpha_\kappa}$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\kappa$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\kappa}}}{\alpha}$$

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}=\sqrt[\nu\mu]{\alpha}$$

$$\sqrt[\nu\kappa]{\alpha^{\mu\kappa}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta}=\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$$

Ασκήσεις στις ρίζες

Για τη λύση των παρακάτω ασκήσεων χρησιμοποιούμε κυρίως τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες των ριζών.

1. Να βρείτε την τιμή του x, ώστε να ισχύει $\sqrt{x+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}=4$.

2. Να βρείτε το λάθος στον συλλογισμό που ακολουθεί:

Είναι:

$$4-10=9-15 \Leftrightarrow 4-10+\frac{25}{4}=9-15+\frac{25}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(3-\frac{5}{2}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2=3\ !!!$$

3. Αν είναι $\sqrt{\alpha} = \sqrt[4]{\beta} = \sqrt[8]{\gamma} = \sqrt[16]{256}$, να βρείτε τους αριθμούς α, β και γ.

4. Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 12x + 36} + \sqrt{(3x^2 + 1)^2} - \sqrt{(3x^2 + 5)^2} = 5.$$

5. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ και $\beta = \sqrt{3} + 2$,

β) $\alpha = \sqrt{5} - 2$ και $\beta = \sqrt{10} - \sqrt{2}$.

6. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\alpha = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad \text{και} \quad \beta = \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

7. Αν οι αριθμοί α, β και γ είναι ομόσημοι, $\alpha\beta\gamma = 1$ και:

$$\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\gamma\alpha} = \alpha + \beta + \gamma,$$

να αποδείξετε ότι:

$$\alpha = \beta = \gamma = 1.$$

8. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[4]{\frac{(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2)}{(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \delta^2)}} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} + \sqrt{\beta^2 + \delta^2}}{\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} + \sqrt{\beta^2 - \delta^2}}.$$

9. Αν είναι $\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 5} + \sqrt{\beta^2 - 6\beta + 10} = 3$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 3$.

10. Να γίνουν ρητοί οι παρονομαστές στις παραστάσεις που ακολουθούν:

α) $A=\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$,

β) $B=\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

11. Αν είναι $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ και $\beta=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, να αποδείξετε ότι:

$$3\alpha^2-5\alpha\beta+3\beta^2=289.$$

12. Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην περιέχουν ριζικά στον παρονομαστή:

α) $A=\dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\alpha\sqrt{\beta}-\beta\sqrt{\alpha}}$,

β) $B=\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$.

13. Αν είναι $x=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ και $y=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, να αποδείξετε ότι:

$$2x^2+3y^2-5xy=30-4\sqrt{3}.$$

14. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\alpha-2\sqrt{\alpha+1}-\frac{3\cdot\sqrt[3]{4\alpha-5}-\sqrt{2\alpha-7}}{\sqrt{\alpha-4}}$$

για $\alpha = 8$.

15. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \dfrac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$, όταν $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ και $\beta = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

16. Αν α, β είναι θετικοί ρητοί αριθμοί με $\alpha \neq \beta$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $K = \dfrac{\alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} + \dfrac{\alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}$ είναι ρητός.

17. Αν $x^{\nu+1} = 1821$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt[\nu+1]{x^{\nu^2}} \cdot \sqrt[\nu+1]{x^{2\nu+1}} \text{ με } x \geq 0.$$

18. Αν $x^3 + x^4 = 2011$, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \sqrt[\nu+2]{x^{2\nu+2} \cdot x^{\nu+4}} + \sqrt[\nu+2]{x^{\nu-3} \cdot x^{3\nu+11}}, \text{ με } x \geq 0.$$

19. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}} = 5$,

β) $\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha^2}}} = \alpha$, $\alpha \geq 0$,

γ) $\sqrt{14x^2 - \sqrt{21x^4 + \sqrt{19x^8 - \sqrt{9x^{16}}}}} = 3|x|$,

δ) $\sqrt{x + y + \sqrt{4xy}} \cdot \sqrt{x + y - \sqrt{4xy}} = x - y$, όπου $x > y \geq 0$,

ε) $\sqrt[3]{\alpha\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha^3-\beta^3}}\cdot\sqrt[3]{\alpha\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha^3-\beta^3}}=\beta$, όπου $\alpha>\beta\geq 0$,

στ) $\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\sqrt[3]{\alpha}}}\cdot\sqrt[2\rho]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\cdot\sqrt{\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha}}}=\sqrt[3\rho\nu]{\alpha^4}$, $\alpha\in IR_+$ και $\nu,\ \rho\in IN^*$,

ζ) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2$,

η) $\left[(2-\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}+(2+\sqrt{3})\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]^2=54$.

θ) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}-\sqrt{x^3-y^6}}\cdot\sqrt[3]{x\sqrt{x}+\sqrt{x^3-y^6}}=y^2$, $x>y^2$.

20. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt[6]{40}$,

β) $B=\sqrt[6]{80}\cdot\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt{20}$.

21. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\alpha^2}\cdot\sqrt[4]{\alpha^3}\cdot\sqrt[12]{\alpha}=\alpha^2$, $\alpha\geq 0$

β) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2+(6\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=105$.

22. Αν είναι $x=4+\sqrt{3}$ και $y=4-\sqrt{3}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=6x^{-2}+6y^{-2}-5x^{-1}y^{-1}$.

23. Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=4$,

β) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=8\sqrt{3}$,

γ) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{6}-1$,

δ) $\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}=\sqrt{\alpha\beta}$, όπου $\alpha,\ \beta\in \mathrm{IR}_+^*$,

ε) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=4x\sqrt{x^2-1}$, αν $x>1$.

24. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=4.$$

25. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{98}+\sqrt{162}}{\sqrt{50}-\sqrt{32}}\cdot\sqrt{\frac{9^{12}+3^{20}}{9^{11}+27^{6}}}=48.$$

26. Αν $\alpha>1$ και $\beta>1$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{\alpha^2+\alpha}{\beta^2+\beta}}:\left(\sqrt{\frac{\beta^2-\beta}{\alpha^2-\alpha}}:\sqrt{\frac{\beta^2-1}{\alpha^2-1}}\right)=\frac{\alpha}{\beta}.$$

27. Αν $\alpha,\ \beta>0$ με $\alpha\neq\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\left(\frac{\sqrt{\alpha^3}+\sqrt{\beta^3}}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}+\sqrt{\frac{1}{\beta}}}\right).$$

28. Αν α, $\beta>0$ και $\alpha\neq\beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{1}{\alpha-\sqrt{\alpha\beta}}+\frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha\beta}}\right)\cdot\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}=2.$$

29. Αν είναι $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$ και $A=\frac{2\alpha\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$, όπου α, $\beta>0$, να αποδείξετε ότι $A=\alpha+\beta$.

30. Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί με $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha\cdot\sqrt{\frac{(\beta^2+1)(\gamma^2+1)}{\alpha^2+1}}+\beta\cdot\sqrt{\frac{(\alpha^2+1)(\gamma^2+1)}{\beta^2+1}}+\gamma\cdot\sqrt{\frac{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)}{\gamma^2+1}}=2.$$

31. Για τις πλευρές α, β και γ ενός τριγώνου ΑΒΓ, όπου $\alpha>\gamma$, ισχύει η σχέση $\sqrt{\frac{1+\frac{\gamma}{\alpha}}{1-\frac{\gamma}{\alpha}}}=\frac{\gamma}{\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο.

32. Αν είναι $A = x^3 - \frac{(\alpha^2+\beta^2)x}{\beta \cdot \sqrt[3]{\alpha^2}} + \sqrt{\beta}$ και $x = \frac{\sqrt[3]{\alpha^2}}{\sqrt{\beta}}$, να αποδείξετε ότι $A = 0$.

33. Αν x και y είναι θετικοί αριθμοί με $x \neq y$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y} \right)^2 .$$

34. Να υπολογίσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}} \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha - \sqrt{\alpha^2+1}} - \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}} \right)$,

β) $B = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^4}}, \alpha \in (-1, 1)$.

35. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 1 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

όπου $x \in \mathbb{R}^*$, με $-1 < x < 1$.

36. Αν α, β, γ και δ είναι φυσικοί αριθμοί με $\alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta}$ (οι β και δ δεν είναι τέλεια τετράγωνα), να αποδείξετε ότι $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.

37. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\cdot\left[\left(\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}}-\frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}\right)^{-2}-\left(\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}}-\frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\right)^{-2}\right]=1,$$

όπου $\alpha,\ \beta>0$ και $\alpha\neq\beta$.

38. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}}{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}}$, όπου

$x=\frac{2\alpha\beta}{\beta^2+1}$, $\alpha>0$, $-\alpha<x<\alpha$, $\beta\geq 1$.

39. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $A=\sqrt{x-2}+\sqrt{7-x}$,

β) $B=\sqrt{\sqrt{x}-3}-\sqrt{5-\sqrt{x}}$,

γ) $\Gamma=\sqrt{3-|x|}+\sqrt{|x|-1}$.

40. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+4}$.

Απαντήσεις – υποδείξεις για τη λύση των ασκήσεων

1. Με $x \geq -3$ παίρνουμε:

$$\sqrt{x+3} = 4 \Leftrightarrow x+3 = 16 \Leftrightarrow x = 13 .$$

Απ. $x = 13$.

2. Από τη σχέση:

$$\sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(3-\frac{5}{2}\right)^2}$$

προκύπτει $\left|2-\frac{5}{2}\right| = \left|3-\frac{5}{2}\right|$ και όχι $2-\frac{5}{2} = 3-\frac{5}{2}$.

Είναι $\left|2-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}-2$.

3. Είναι $256 = 2^8$, οπότε $\sqrt[16]{256} = \sqrt{2}$.

Έτσι $\alpha = 2$, $\beta = 4$ και $\gamma = 16$.

4. Το α′ μέλος δίνει:

$$|x-3| + |x+6| + (3x^2+1) - (3x^2+5) =$$

$$= |x-3| + |x+6| - 4 =$$

$$= (-x+3) + (x+6) - 4 = 5 .$$

5. Συγκρίνουμε τους α^2 και β^2.

Απ. α) $\alpha > \beta$,

β) $\alpha < \beta$.

6. Εξετάζουμε για παράδειγμα αν είναι $\alpha < \beta$. Όμως:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{3} < 2\sqrt{2} + \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + 2\sqrt{3}\right)^2 < \left(2\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} < \sqrt{10}, \text{ που ισχύει.}$$

Άρα $\alpha < \beta$.

7. Επειδή οι αριθμοί α, β και γ είναι ομόσημοι με $\alpha\beta\gamma = 1$ είναι όλοι θετικοί. Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη σχέση με 2 και τελικά παίρνουμε:

$$\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta + \gamma - 2\sqrt{\beta\gamma} + \gamma + \alpha - 2\sqrt{\gamma\alpha} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right)^2 + \left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}\right)^2 + \left(\sqrt{\gamma} - \sqrt{\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta} = \sqrt{\gamma} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$$

Αλλά τότε $\alpha\beta\gamma = 1 \Leftrightarrow \alpha^3 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$. Επομένως:

$$\alpha = \beta = \gamma = 1.$$

8. Θέτουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$, οπότε $\alpha = \lambda\beta$ και $\gamma = \lambda\delta$.

9. Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$\sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4} + \sqrt{(\beta - 3)^2 + 1} = 3.$$

Όμως το πρώτο μέλος είναι μεγαλύτερο ή ίσο από:

$$\sqrt{4} + \sqrt{1} = 2 + 1 = 3.$$

Έτσι η ισότητα ισχύει μόνο αν:

$$(\alpha-1)^2=0 \text{ και } (\beta-3)^2=0.$$

10. Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση.

α) $A=\dfrac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3}$.

β) $B=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}=\dfrac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}-2$.

11. Είναι $\alpha=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ και $\beta=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$.

12. α) Πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με $\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}$.

Απ. $A=\dfrac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}$.

β) Πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$.

Απ. $B=\sqrt{\alpha\beta}$.

13. Είναι $x=2+\sqrt{3}$ και $y=2-\sqrt{3}$ κ.λπ.

14. Είναι $\sqrt{9}=3$, $\sqrt[3]{27}=3$ και $\sqrt{4}=2$.

Απ. $A=-1$.

15. Εκτελούμε τις πράξεις.

Απ. $A=1$.

16. Με $\alpha \neq \beta$, είναι:

$$K = \frac{\left(\alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right)}{\alpha - \beta} + \frac{\left(\alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right)}{\alpha - \beta} = \ldots = 2(\alpha + \beta) \in \mathbb{Q}.$$

17. Είναι $A = \sqrt[\nu+1]{x^{(\nu+1)^2}} = x^{\nu+1}$.

Απ. $A = 1821$.

18. Το πρώτο ριζικό δίνει $\sqrt[\nu+2]{x^{3(\nu+2)}} = x^3$, διότι $x > 0$.

Το δεύτερο ριζικό δίνει $\sqrt[\nu+2]{x^{4(\nu+2)}} = x^4$, διότι $x > 0$.

Απ. $A = 2011$.

19. α) $\sqrt{4} = 2$ κ.λπ.

β) $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha| = \alpha$ κ.λπ.

γ) $\sqrt{9x^{16}} = 3x^8$, $\sqrt{16x^8} = 4x^4$,

$\sqrt{25x^4} = 5x^2$, $\sqrt{9x^2} = 3|x|$.

δ) Το υπόρριζο δίνει $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2$.

ε) Με βάση την $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{xy}$ κ.λπ.

στ) Το Α′ μέλος δίνει:

$$\sqrt[3\nu\rho]{\alpha} \cdot \sqrt[2\nu\rho]{\alpha} \cdot \sqrt[2\nu\rho]{\alpha} = \sqrt[3\nu\rho]{\alpha} \cdot \sqrt[2\nu\rho]{\alpha^2} =$$

$$= \sqrt[3\nu\rho]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu\rho]{\alpha} = \sqrt[3\nu\rho]{\alpha} \cdot \sqrt[3\nu\rho]{\alpha^3} = \sqrt[3\nu\rho]{\alpha^4}.$$

ζ), η), θ) Όμοια.

20. α) $A=10$, β) $B=20$.

21. α) Το Α′ μέλος γράφεται:

$$\sqrt[12]{\alpha^6}\cdot\sqrt[12]{\alpha^8}\cdot\sqrt[12]{\alpha^9}\cdot\sqrt[12]{\alpha}=\sqrt[12]{\alpha^{6+8+9+1}}=\sqrt[12]{\alpha^{24}}=\sqrt[12]{(\alpha^2)^{12}}=\alpha^2.$$

β) Εκτελούμε τις πράξεις.

22. Να γίνουν οι πράξεις.

Απ. $A=\dfrac{163}{169}$.

23. α) – ε) Να γίνουν οι πράξεις.

24. Παίρνουμε:

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}}=$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}}=4.$$

25. Το πρώτο κλάσμα είναι ίσο με 16 και το ριζικό είναι ίσο με 3.

26. Το Α′ μέλος γράφεται:

$$\sqrt{\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}}:\sqrt{\frac{\beta(\beta-1)}{\alpha(\alpha-1)}\cdot\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{(\beta-1)(\beta+1)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}}\cdot\sqrt{\frac{\alpha(\beta+1)}{\beta(\alpha+1)}}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

27. Θέτουμε $\sqrt{\alpha}=x$ και $\sqrt{\beta}=y$, οπότε παίρνουμε:

- $\alpha=x^2$ και $\beta=y^2$.
- $A=\left(\dfrac{\sqrt{\alpha^3}+\sqrt{\beta^3}}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}-\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\right):\dfrac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}=$

$$=\left(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}-\frac{x^2}{x+y}-\frac{y^2}{x-y}\right):\frac{xy}{x+y}=$$

$$=\left(\frac{x^3+y^3}{(x-y)(x+y)}-\frac{x^2(x-y)+y^2(x+y)}{(x-y)(x+y)}\right):\frac{xy}{x+y}\quad \text{κ.λπ.}$$

28. Το Α′ μέλος για $\alpha\neq\beta$ δίνει:

$$\frac{\alpha+\sqrt{\alpha\beta}+\alpha-\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha^2-\alpha\beta}\cdot\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}=$$

$$=\frac{2\alpha}{\alpha(\alpha-\beta)}\cdot(\alpha-\beta)=2.$$

29. Είναι:

- $x=\dfrac{\alpha-\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}$.
- $1+x^2=1+\dfrac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{4\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}$
- $\sqrt{1+x^2}=\dfrac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}$.

Έτσι $A=\ldots=\alpha+\beta$.

30. Είναι:

- $\beta^2+1=\beta^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\beta(\beta+\alpha)+\gamma(\beta+\alpha)=$

$$=(\beta+\alpha)(\beta+\gamma).$$

και όμοια:

- $\gamma^2+1=(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)$,
- $\alpha^2+1=(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$.

Αντικαθιστούμε στο Α′ μέλος και απλοποιούμε.

31. Η υπόθεση δίνει:

$$\frac{\sqrt{\alpha+\gamma}}{\sqrt{\alpha-\gamma}}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\beta=\sqrt{(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}\Leftrightarrow\beta^2+\gamma^2=\alpha^2.$$

Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.

32. Με εκτέλεση των πράξεων.

33. Εκτελούμε τις πράξεις.

Απ. $A=1$.

34. α) Είναι:

$$A=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}}\cdot\frac{\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)^2-\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+1}\right)^2}{\alpha^2-\left(\sqrt{\alpha^2+1}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}}\cdot\frac{4\alpha\sqrt{\alpha^2+1}}{-1}=-4\alpha.$$

Απ. $A=-4\alpha$.

β) $B=\dfrac{(1+\alpha^2)+(1-\alpha^2)}{\sqrt{1-\alpha^4}}-\dfrac{2}{\sqrt{1-\alpha^4}}=0$.

Απ. $B=0$.

35. Να γίνουν ομώνυμα τα κλάσματα στο Α′ μέλος.

36. Είναι $(\alpha-\gamma)+\sqrt{\beta}=\sqrt{\delta}$, οπότε:

$$(\alpha-\gamma)^2+\beta+2(\alpha-\gamma)\sqrt{\beta}=\delta\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha-\gamma)\sqrt{\beta}=\delta-\beta-(\alpha-\gamma)^2$$

Αν $\alpha\neq\gamma$, τότε $\sqrt{\beta}=\dfrac{\delta-\beta-(\alpha-\gamma)^2}{2(\alpha-\gamma)}$, άτοπο αφού το β δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Άρα $\alpha=\gamma$, οπότε $\beta=\delta$. (Οι α, β, γ και δ μπορεί να είναι και ρητοί, με β, $\delta\geq 0$.)

37. Η πρώτη παρένθεση δίνει:

$$\left(\frac{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}-\alpha-\beta}{\sqrt{\alpha+\beta}\cdot\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)}\right)^{-2}=\left(\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}\cdot\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\alpha+\beta}\cdot\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)}{2\sqrt{\alpha\beta}}\right)^{2}.$$

Η δεύτερη παρένθεση δίνει:

$$\left(\frac{\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}-\alpha-\beta}{\sqrt{\alpha+\beta}\cdot\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\alpha+\beta}\cdot\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)}{2\sqrt{\alpha\beta}}\right)^{2}.$$

Έτσι το Α′ μέλος γίνεται:

$$\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\left[\frac{(\alpha+\beta)\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2}{4\alpha\beta}-\frac{(\alpha+\beta)\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2}{4\alpha\beta}\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{4\alpha\beta}\left[\left(\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}\right)-\left(\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}\right)\right]=\ldots=1.$$

38. Είναι:

$$\sqrt{\alpha+x}=\sqrt{\alpha+\frac{2\alpha\beta}{\beta^2+1}}=\sqrt{\alpha\cdot\frac{(\beta+1)^2}{\beta^2+1}} \text{ κ.λπ.}$$

39. Πρέπει όλα τα υπόρριζα να είναι μεγαλύτερα ή ίσα από το μηδέν.

Απ. α) $x\in[2,7]$, β) $x\in[9,25]$

γ) $x\in[-3,-1]\cup[1,3]$.

40. Πρέπει $x\geq 5$. Υψώνουμε στο τετράγωνο και παίρνουμε:

$$x-5+x+3+2\sqrt{(x-5)(x+3)}=2x+4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x-5)(x+3)}=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-15-9=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-24=0\Leftrightarrow(x=6 \text{ ή } x=-4).$$

Η τιμή $x=-4$ απορρίπτεται.

Απ. $x=6$.

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.

Τίτλος: Διδακτικό εγχειρίδιο-οδηγός στις ρίζες πραγματικών αριθμών

Έκδοση: 1.0 Ημερομηνία: 26.04.2024

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

ΕΜΠΝΕΥΣΤΕΣ/ ΟΜΑΔΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ/ ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Κωνσταντίνος Ρεκούμης
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Λάμπρος Κατσάπας
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Νικόλαος Κουμάντος
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03
Ελένη Ρεκούμη
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης ΠΕ03