



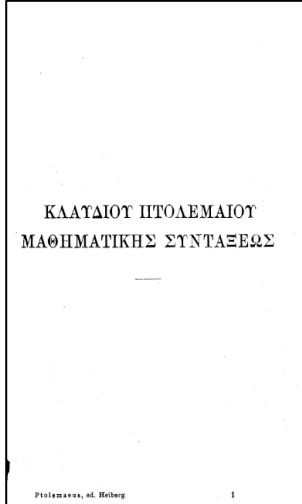
# Συναρτήσεις

## Οι απαρχές της έννοιας της συνάρτησης

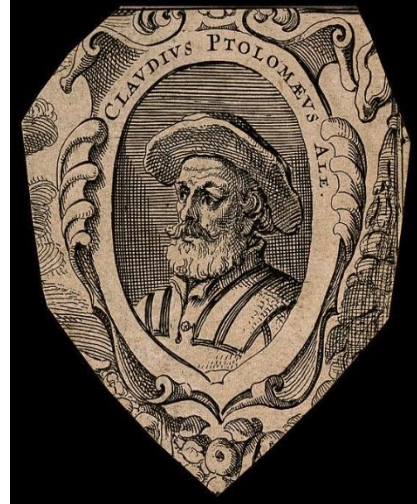
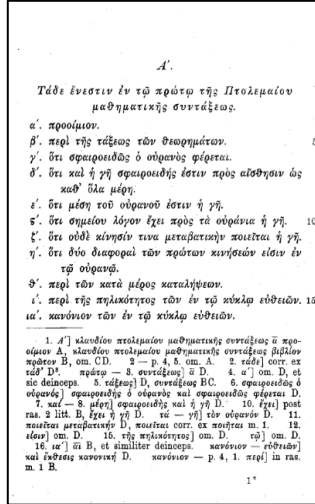
Η έννοια της συνάρτησης, άρχισε να παίρνει την μορφή που ξέρουμε σήμερα από τον 18ο αιώνα και μετά. Όμως, υπάρχουν μαθηματικά έργα πολύ προγενέστερα, στα οποία μπορεί κάποιος να διακρίνει την ανάγκη εισαγωγής αυτής της έννοιας, αλλά και τις πρώιμες μορφές της. Το πιο σημαντικό από αυτά τα έργα, ήταν η **Αλμαγέστη (Almagest ή Al-magisti)** του **Πτολεμαίου**.

(Στα ελληνικά μπορείτε να την δείτε στον σύνδεσμο που ακολουθεί:

[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Almagest\\_Complete%2C\\_Heiberg.pdf?uselang=el](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Almagest_Complete%2C_Heiberg.pdf?uselang=el)).



Εικόνα 1: Το εξώφυλλο και η πρώτη σελίδα της Αλμαγέστης



Εικόνα 2: Γκραβούρα του Κλαύδιου Πτολεμαίου

Για την προσωπική ζωή του σπουδαίου μαθηματικού και αστρονόμου Κλαύδιου Πτολεμαίου που άκμασε γύρω στο 100 – 178 μ.Χ. στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, γνωρίζουμε ελάχιστα πράγματα. Το πιο σημαντικό από αυτά, είναι ότι έκανε πολυάριθμες παρατηρήσεις των ουράνιων σωμάτων από τοποθεσίες κοντά στην Αλεξάνδρεια και έγραψε αρκετά σημαντικά βιβλία. Η Μαθηματική Σύνταξη (Μαθηματική Συλλογή) είναι το έργο που τον έκανε διάσημο και αποτελείται από 13 βιβλία με πλήρη μαθηματική περιγραφή του ελληνικού μοντέλου του σύμπαντος, για τις διάφορες κινήσεις του ήλιου, της σελήνης και των πλανητών.

Το βιβλίο ήταν το πιο σπουδαίο έργο της ελληνικής αστρονομίας. Ήταν τόσο σημαντικό για την Αστρονομία, όσο σημαντικά ήταν τα Στοιχεία του Ευκλείδη για την Γεωμετρία και αντικατέστησε όλα τα προηγούμενα έργα σχετικά με το θέμα του.

Επέδρασε στον μέγιστο βαθμό στην εξέλιξη της Αστρονομίας μέχρι τον 16<sup>ο</sup> αιώνα, αντιγράφηκε και σχολιάστηκε αμέτρητες φορές. Η βασική ιδέα που διέπνεε το βιβλίο αυτό, και μάλιστα περισσότερο από οποιοδήποτε άλλο βιβλίο, ήταν ότι θα μπορούσαμε να



Εικόνα 3: 1528 copy of "Almagestum seu Magnae Constructionis Mathematicae Opus plane Divinum Latina donatum lingua ab Georgio Trapezuntio usquequaq.doctissimo. Copy located in the Niels Bohr Library & Archives, American Institute of Physics, in College Park, Maryland.

δημιουργήσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο για τα φυσικά φαινόμενα, το οποίο θα μας έδινε αξιόπιστες προβλέψεις.

Σχεδόν όλα τα επόμενα αστρονομικά έργα, τόσο στον ισλαμικό κόσμο όσο και στη Δύση, μέχρι και το έργο του Κοπέρνικου, βασίστηκαν στο αριστούργημα του Πτολεμαίου. Πολλούς αιώνες μετά τη συγγραφή της, έγινε γνωστή ως **Σύνταξη της Μεγίστης (η μεγαλύτερη συλλογή)**, για να τη διακρίνει από μικρότερα αστρονομικά έργα. Οι Ισλαμιστές επιστήμονες άρχισαν τότε να αποκαλούν το βιβλίο **Al-magisti**, και από τότε είναι γνωστό ως **Almagest** και εξελληνισμένα **Αλμαγέστη**.

Η πρώιμη μορφή της συνάρτησης υπάρχει στο έργο αυτό, μέσα από παραδείγματα πινάκων που παρουσιάζουν μια σχέση (συναρτησιακή) μεταξύ συνόλων ποσοτήτων. Πολύ νωρίτερα από τον Πτολεμαίο, οι Βαβυλώνιοι είχαν συντάξει πίνακες για τις τετραγωνικές ρίζες, καθώς και αστρονομικούς πίνακες που δίνουν τον προβλεπόμενο χρόνο διαφόρων ουράνιων φαινομένων. Η διαφορά με το έργο του Πτολεμαίου είναι ότι οι Βαβυλώνιοι ενδιαφέρονταν μόνο για μεμονωμένες τιμές. Αντίθετα, ο Πτολεμαίος δεν ασχολήθηκε μόνο με πίνακες, αλλά έδειξε πώς να βρίσκουμε αυτό που σήμερα ονομάζουμε «εξαρτημένη μεταβλητή», για οποιαδήποτε δεδομένη τιμή της «ανεξάρτητης μεταβλητής». Για παράδειγμα:

- η χορδή εκφράζεται ως συνάρτηση του αντίστοιχου τόξου κατά μήκος της εκλειπτικής
- η απόκλιση του ήλιου ως συνάρτηση του γεωγραφικού μήκους

Ο Πτολεμαίος συχνά χρησιμοποιούσε τους πίνακες του και αντίστροφα, βρίσκοντας, για παράδειγμα, το τόξο από τη χορδή (αυτό που σε μεγαλύτερες τάξεις ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση).

Δεδομένου ότι ο γενικός στόχος του Πτολεμαίου ήταν να προβλέψει τις θέσεις των πλανητών, σε πολλά σημεία έγραψε έναν αλγόριθμο που περιγράφει πώς να το κάνει αυτό για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Για παράδειγμα, για να υπολογίσει τη θέση του ήλιου σε οποιαδήποτε δεδομένη στιγμή, ο Πτολεμαίος περιέγραψε τα διάφορα βήματα που απαιτούνται, χρησιμοποιώντας την ιδέα μιας συναρτησιακής σχέσης.

Ωστόσο, ο Πτολεμαίος δεν συζήτησε τη γενική έννοια της συνάρτησης, με τη θεωρητική μορφή που της δίνουμε σήμερα. Κάποιες από τις διαδικασίες που χρησιμοποιούμε σήμερα στις συναρτήσεις, μάλλον τις θεωρούσε δεδομένες. Αυτό, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι διαδικασίες αυτές ήταν γνωστές από το έργο προγενέστερων αστρονόμων.

Ακόμα, μέσα από το έργο αυτό συνειδητοποιούμε ότι τα ελληνικά μαθηματικά της αρχαιότητας, δεν ήταν μόνο γεωμετρικού περιεχομένου, αλλά υπήρχαν τομείς πρακτικών μαθηματικών, που ήταν απαραίτητοι για την επίλυση προβλημάτων, τόσο στον ουρανό, όσο και στη γη.

Períodos 18 años	Incremento en Latitud [Posición de la Época] 354:15°									Incremento en Elongación [Posición de la Época] 70:37°									
	o	'	''	'''	''''	'''''	''''''	'''''''	''''''''	'''''''''	o	'	''	'''	''''	'''''	''''''	'''''''	''''''''
18	156	50	9	49	19	31	30	0	173	12	26	32	49	10	30				
36	313	40	19	38	39	3	0	346	24	53	5	38	21	0					
54	110	30	29	27	58	34	30	159	37	19	38	27	31	0					
72	267	20	39	17	18	6	0	332	49	46	11	16	42	0					
90	64	10	49	6	37	37	30	146	2	12	44	5	52	30					
108	221	0	58	55	57	9	0	319	14	39	16	55	3	0					
126	17	51	8	45	16	40	30	132	27	5	49	44	13	30					
144	174	41	18	34	36	12	0	305	39	32	22	33	24	0					
162	331	31	28	23	55	43	30	118	51	58	55	22	34	30					
180	128	21	38	13	15	15	0	292	4	25	28	11	45	0					
198	285	11	48	2	34	46	30	105	16	52	1	0	55	30					
216	82	1	57	51	54	18	0	278	29	18	33	50	6	0					
234	238	52	7	41	13	49	30	91	41	45	6	39	16	30					
252	35	42	17	30	33	21	0	264	54	11	39	28	27	0					
270	192	32	27	19	52	52	30	78	6	38	12	17	37	30					
288	349	22	37	9	12	24	0	251	19	4	45	6	48	0					
306	146	12	46	58	31	55	30	64	31	31	17	55	58	30					
324	303	2	56	47	51	27	0	237	43	57	50	45	9	0					
342	99	53	6	37	10	58	30	50	56	24	23	34	19	30					
360	256	43	16	26	30	30	0	224	8	50	56	23	30	0					
378	53	33	26	15	50	1	30	37	21	17	29	12	40	30					
396	210	23	36	5	9	33	0	210	33	44	2	1	51	0					
414	7	13	45	54	29	4	30	23	46	10	34	51	1	30					
432	164	3	55	43	48	36	0	196	58	37	7	40	12	0					
450	320	54	5	33	8	7	30	10	11	3	40	29	22	30					
468	117	44	15	22	27	39	0	193	23	30	13	18	33	0					
486	274	34	25	11	47	10	30	356	35	56	46	7	43	30					
504	71	24	35	1	6	42	0	189	48	23	18	56	54	0					
522	228	14	44	50	26	13	30	343	0	49	51	46	4	30					
540	25	4	54	39	45	45	0	156	13	16	24	35	15	0					
558	181	56	4	29	5	16	30	329	25	42	57	24	25	30					
576	338	45	14	18	24	48	0	142	38	9	30	13	36	0					
594	135	35	24	7	44	19	30	315	50	36	3	2	46	30					
612	292	25	33	57	3	51	0	129	3	2	35	51	57	0					
630	89	15	43	46	23	22	30	302	15	29	8	41	7	30					
648	246	5	53	35	42	54	0	115	27	55	41	30	18	0					
666	42	56	3	25	2	25	30	288	40	22	14	19	28	30					
684	199	46	13	14	21	57	0	101	52	48	47	8	39	0					
702	356	36	23	3	41	28	30	275	5	15	19	57	49	30					
720	153	26	32	53	1	0	0	88	17	41	52	47	0	0					
738	310	16	42	42	20	31	30	261	30	8	25	36	10	30					
756	107	6	52	31	40	3	0	74	42	34	58	25	21	0					
774	263	57	2	20	59	34	30	247	55	1	31	14	31	0					
792	60	47	12	10	19	6	0	61	7	28	4	3	42	0					
810	217	37	21	59	38	37	30	234	19	54	36	52	52	30					

Εικόνα 4: Πίνακας κινήσεων της σελήνης, γραμμένος με τη σύγχρονη μορφή των αριθμών

## Πηγή:

Katz, V.J. (2009). A history of mathematics (3rd ed.), Boston: Pearson Education.

## Εικόνες:

1. [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Almagest\\_Complete%2C\\_Heiberg.pdf?uselang=el](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Almagest_Complete%2C_Heiberg.pdf?uselang=el))
2. <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?search=%CE%9A%CE%BB%CE%B1%CF%8D%CE%B4%CE%B9%CE%BF%CF%82+%CE%A0%CF%84%CE%BF%CE%BB%CE%B5%CE%BC%CE%B1%CE%AF%CE%BF%CF%82&title=Special:MediaSearch&go=Go&type=image&uselang=el>
3. <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?search=%CE%91%CE%BB%CE%BC%CE%B1%CE%B3%CE%AD%CF%83%CF%84%CE%B7&title=Special:MediaSearch&go=Go&type=image>
4. [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/26/Almagesto\\_Libro\\_IV\\_TABLA\\_MOVIMIENOS\\_MEDIOS\\_LUNA\\_02.png?uselang=el](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/26/Almagesto_Libro_IV_TABLA_MOVIMIENOS_MEDIOS_LUNA_02.png?uselang=el)

## ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

**ΤΙΤΛΟΣ:** Οι απαρχές της έννοιας της συνάρτησης

### **ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ / ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ / ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ:**

Δημήτρης Διαμαντίδης

Ελισσάβητ Καλογερία

Ειρήνη Περυσινάκη

Γιάννης Σταμπόλας

Κώστας Στουραΐτης

Βαγγέλης Φακούδης

Γιώργος Ψυχάρης

**ΕΚΔΟΣΗ:** 1.0

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 28-12-2024

Το παρόν αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Πράξης «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 6010165, του Προγράμματος «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή 2021-2027» που υλοποιείται από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Υπουργείο Παιδείας, Θρησκευμάτων  
και Αθλητισμού

ΙΕΠ  
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ  
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Με τη συγχρηματοδότηση  
της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ  
2021-2027

Πρόγραμμα  
Ανθρώπινο Δυναμικό και  
Κοινωνική Συνοχή